现代位势理论导引

吴炯圻　编著 XIANDAIWEISHILILUNDAOYIN



厦门大学出版社

□责任编辑／吴天祥
□特约编辑／高鸿桢
□封面设计／蒋东明





ISBN 7-5615-1418-2/O·91
定价： 22.00 元

现代位势理论导引

吴炯圻　编著

厦门大学出版社

现代位势理论导引
吴炯圻　编著
*
厦门大学出版社出版发行
（地址：厦门大学　邮编：361005）
三明地质印刷厂印刷
（地址：三明市富兴路 15 号　邮编：365001）
*
开本 850×1168　1/32　14.25 印张　2 插页　345 千字
1998 年 10 月第 1 版　　1998 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—1000 册
ISBN 7-5615-1418-2/O・91
定价：22.00 元
本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

内容简介

位势理论是数学分析领域中最早完成现代化变革的一个分支，与函数论、微分方程、概率论、物理学等分支或学科紧密关联。本书是现代位势理论的导引，全书分为三篇，共十三章。重点是第二篇，介绍该理论中最基本且最重要的组成部分 — 调和空间．它通过建立公理体系，概括并统一处理了关于椭圆型与抛物型微分方程的位势论，而且可建立相应的Markov过程。第一篇是学习现代位势论的预备知识，简要介绍位势论常用的拓扑与测度的基本知识，其中有部分内容在通常的教科书（包括研究生教材）中并不容易找到。第三篇旨在帮助读者尽快接近科研前沿，介绍现代位势论中几个较有特色的研究新方向，并概述位势论的发展史、研究近况。为了便于学习，书中附有较多的注解、例题和部分习题。

本书内容丰富且具有先进性，穿插评述而富于启发性，适合作为数学、概率及物理专业研究生和高年级大学生的教材或参考书，也可作为位势论及有关专业的科研人员的参考资料。

序　　言

张鸣镛教授在世时，曾多次和我讲起位势理论的重要性，讲起他对这一理论的赞赏。可惜我的研究方向不在这一领域，再加见面机会不多，不能多多倾听他详细的讲解。对于他坚强地、孜孜不倦地从事研究和教学的情景，我印象很深。不幸的是，天不假年，他于 1986 年便因病而逝世了，享年 60 岁。虽然他已很有成就，很有贡献，是我国很有声望的数学家。但是，以他的才华和抱负来衡量，仍属壮志未酬，好友们无不为之叹息。

我在追忆他时，常常担心他的学术成就未能得到继续发展。现在吴炯圻教授的著作《现代位势理论导引》可以说是部分地实现了张鸣镛教授的遗愿。吴教授曾在张鸣镛指导下学习和研究位势理论，后来又多次讲授这方面的课程，有丰富的经验。这本书从基础知识讲起，然后对调和空间的位势理论作了充分的叙述，又扼要地介绍了现代位势理论的进展。无论是作为研究生教材或专门著作，这本书都将是很有价值的。

我不是这方面的专家，出于对张鸣镛教授的怀念，在本书即将出版的时候，特写了以上简短的话作为纪念。

谷超豪

1998 年 9 月

前　言

位势论起源于物理学的万有引力学说和静电学。在不分布质量的地方，位势满足 Laplace 方程。这样，物理问题便化为求解偏微方程的数学问题。位势论在较长的一段时间里，一直被当成函数论的一个部分来加以研究，这不仅由于解析函数的实部与虚部都是调和函数，而且由于 1850 年，Rieman 把位势论与函数论做统一处理，揭示了 Green 函数和位势与保形映射之间的密切联系。本世纪以来，由于深入运用现代函数论、测度和积分理论、泛函分析、一般拓扑学、抽象代数以及现代概率论等分支的思想方法，位势论得到了蓬勃发展，开辟了新的研究方向，创造了新的方法，它从函数论中脱胎出来，成为分析领域中比较彻底地完成了现代化变革的一个分支，也促进了函数论及其它数学分支的发展。

50 年代后，位势论迅速发展，除了它越来越广泛地与复分析、拓扑学、几何测度论、调和分析、微分方程、微分几何、泛函分析等相邻数学分支相互结合、相互渗透且发挥着日益显著的作用外，还具有如下两个显著特点:

其一是，各种公理体系的位势论不断建立和完善． 为了统一处理已有的理论并加以推广，使之适用于一般椭圆和抛物型方程或随机过程，不同的公理系统相继形成;

其二是，位势论与随机过程的内在联系逐步深入研究，同时

促进了分析与概率论这两个在 40 年代前仍被视为互不相干的数学领域的发展。

位势论历来深得数学大师的重视，从早期 Newton I, Lagrange J, Gauss C F, Dirichlet G L, Riemann B, Poicare H 等人的杰出工作，到本世纪初 Lebesgue H, Wiener N, Perron O, Riesz F 等人的重要贡献都是明显的例子；H. Cartan, M. Brelot, J. Doob, Choqet G, Deny J 等对现代位势论的创立与发展建立了丰功伟绩。70 年代起，更是群雄四起，本书的第十章将给出简要介绍。这里仅指出，Constantinescu C, Cornea A, Bliedtner J, Hansen W 等人都是佼佼者之一。国内杰出的函数论、位势论专家、厦门大学已故教授张鸣镛老师从 50 年代就注意到这个重要的研究方向，并为推动国内位势论研究的发展而努力奋斗，直到他生命的最后一刻。历史将永远记载他的功绩。

本书是作者在向张鸣镛老师学习位势论的心得体会的基础上，经过多年的教学实践（如在厦门大学、华侨大学、福州大学和漳州师院，给研究生及进修教师讲课、做专题报告）编写而成；在本人访德期间还得到德国比莱佛尔特大学教授 Hansen W 的具体指导。

本书的重点是第二篇，介绍现代位势论中最基本且最重要的组成部分——调和空间，即 Constantinescu C, Cornea A 等人创立的公理体系位势论，它概括并统一处理了关于椭圆型与抛物型微分方程的位势论，而且可建立相应的 Markov 过程。第一篇是学习现代位势论的预备知识，简要介绍位势论常用的拓扑与测度的基本知识，其中有部分内容在通常的教科书（包括研究生教材）中并不容易找到。第三篇首先简要略述位势论的发展史，综述其研究近况；而后介绍现代位势论中另外几个较有特色的研究

方向，尤其是Blidtner J,Hansen W创立的扫除空间论，它利用扫除把分析与概率很好地统一起来。总之，三篇的安排注意到了：一、突出中心，把重点尽量讲透；二、提供基础，使初学者方便学习或查阅预备知识；三、帮助有一定基础的读者加深加宽知识面，尽快接近位势论的研究前沿。

在编写中，作者致力于博采世界各国有关专著、优秀教材、近期发表的论文与综述之精华，努力体现我国学者的研究工作，包含了作者本人的科研成果；同时注意到国内初学者的实际情况和特点，多次征求同行专家的意见和建议，力求做到内容新颖，选材得当，推理严格，叙述规范，简明易学，使之适合于作为研究生教材，大学数学及物理专业高年级选修课教材或参考书，也希望能为其它研究方向的科研人员提供一条较快地了解现代位势论的途径。

杰出的数学家、中国科学院院士、中国科技大学原校长谷超豪教授对本书的出版极为关切，于百忙之中为本书题写了序言，表达了他对张鸣镛教授的深情怀念和对发展我国位势论研究的热心支持，作者谨此表示衷心的谢意。

张师母曾僖女士对作者的工作极为关心，厦门大学教授高琪仁老师对本书全面审阅并提出许多宝贵的修改意见，漳州师院院长林继中博士和许多同事、厦门大学出版社以及梁益兴、高鸿桢教授等对本书的出版给予大力支持和帮助，作者在此一并致谢。

尽管作者做了许多努力，但因本书覆盖的知识面甚宽，付印也较仓促，一定会有不完善之处。欢迎读者批评指正。

吴炯圻

1998.9.

记号与约定

1. 设 X 为集，X 的子集全体记作 2^X，$\mathscr{A} \subset 2^X$ 称为 X 的子集族，有时用号码集 J 表示成为 $\mathscr{A} = \{ A_j \mid j \in J \}$. $\cup\mathscr{A} = \cup_j A_j$；$\cap\mathscr{A} = \cap_j A_j$.

当号码集 J 为可数集时，称 $\mathscr{A}$ 为集列；集列 $\{ A_1, A_2, A_3, \cdots \}$ 常简记作 $\{ A_j \}$.

$A \setminus B$ 表示集 A 与 B 的差集.

2. $\boldsymbol{R}$ 表示实数全体；$\boldsymbol{R}^N$ 表示 N 维欧几里德空间；有时也将 $\boldsymbol{R}^1$ 简记作 $\boldsymbol{R}$；$\boldsymbol{R}_+$ 表示 $[0, \infty)$. ∞ 与 $-\infty$ 叫做广义实数，实数与广义实数统称为数值. $\mathbf{N}$ 表示自然数集 $\{1, 2, 3, \cdots\}$.

3. 从集 X 到 $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$(或记作 $[-\infty, \infty]$)的映照 f 称作数值函数或简称函数，到 $\boldsymbol{R}$ 的映照 f 称作实函数；当 $f \geq 0$（即 f 是到 $[0, \infty] = \boldsymbol{R}_+ \cup \{\infty\}$ 的映照）时称作正函数. 一般地，“正”指“≥ 0”，严格正指“> 0”；单调的概念是广义的，如从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 的常值函数既是单调增又是单调减的. “常数”如未加声明，指的是“实常数”.

说一个函数在某个集或点上是有限的，指的是它只取实数值；而“下有限”指“不取 $-\infty$ 为函数值”.

4. 对集 X 上的一族函数 $\mathscr{F} := \mathscr{F}(X)$，$\mathscr{F}^+ := \mathscr{F}^+(X)$ 表示其中正函数全体. 但是，调和空间 X 上的正超调和函数全体记作 $\mathscr{U}_+$.

$$\inf \mathscr{F} := \inf \{ g \mid g \in \mathscr{F} \} = \inf \{ g(x) \mid g \in \mathscr{F} \}, x \in X;$$

$$\sup \mathscr{F} := \sup \{ g \mid g \in \mathscr{F} \} = \sup \{ g(x) \mid g \in \mathscr{F} \}, x \in X;$$

其中“:=”表示左边的符号或式子用右边的符号或式子来定义，偶然也有反过来的情形.

X 的子集 E 的特征函数记作 1_E . 对集 X 上的函数 f、g, 记号$\{f>g\}$ 与$\{x\in X\,|\,f(x)>g(x)\}$ 表示同一个集; 把">"换成"<"、"$=$" 或 "$\neq$" 等时, 情况类似.

5. 拓扑空间上的(数值)函数 f 的支柱记作 $S(f)$, 它是集$\{f\neq 0\}$的闭包. 说拓扑空间上的一个函数连续通常指的是, 它是实值连续函数, 有时为明显起见, 还附加括号(有限). X 上的实函数全体记作 $C(X)$, 其中具紧支柱者全体记作 $\boldsymbol{K}(X)$; $C(X)$中那些在紧集外可以任意小 (或说成在 ∞ 趋于 0) 的函数全体记作 $C_0(X)$; X 上的 Borel 函数全体记作 $\boldsymbol{B}(X)$, 而 $\boldsymbol{B}_b(X)$表示其中有界函数全体. 据上条, $\boldsymbol{B}^+(X)$表示正的 Borel 函数全体.

X 上的 Borel 代数记作 $\mathbf{B}(X)$.

$\boldsymbol{R}^N$ 的开集 G 上的具有 k 阶连续偏导数的函数全体表为 $\boldsymbol{C}^k(G)$; 具有任意阶连续偏导数的函数全体记作 $\boldsymbol{C}^\infty(X)$, 其中具紧支柱者全体记作 $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$.

6. 有广义实数参加的数值运算的法则按照惯例, 这里仅强调, $\infty-\infty$, $(-\infty)-(-\infty)$, $\infty\cdot(-\infty)$, $(-\infty)\cdot\infty$是没有意义的, 而 $0\cdot\infty=\infty\cdot 0=(-\infty)\cdot 0=0\cdot(-\infty)=0$.

7. 从第三章起, 谈及一个拓扑空间 X 上的测度, 指 Radon 测度, 它是在一个包含 $\mathbf{B}(X)$的 σ 代数上的完备的、正则的(正的)测度, 使得每个紧集具有有限的测度值(详见第二章 § 2.3 及 § 2.6). 用 $\mathscr{M}$ 或 $\mathscr{M}(X)$表示 X 上的广义(或称带号)测度全体, 用 $\mathscr{M}^+$或 $\mathscr{M}^+(X)$表示 X 上的 Radon 测度全体. 测度或广义测度 μ 的支柱记作 $\mathrm{supp}(\mu)$.

8. 符号□表示一个命题叙述完毕或证明完毕.

目　　录

第一篇　现代分析基础选讲

第二篇　调和空间位势论

第三篇　现代位势论概述

第一篇　现代分析基础选讲

本篇主要目的是为学习调和空间位势论提供必备的基本知识. 要点之一是局部紧 Hausdorff 空间的基本性质及建立在这样一个空间 X 上的一个正则且完备的测度—Radon 测度，它可以由具紧支柱的连续函数空间上的一个正线性泛函导出，因此，有的文献也把这种泛函本身称为Radon测度. 要点之二是现代分析常用的其它一些测度论知识，特别是浑收敛的性质和已故厉则治教授推广的 Fubini 定理. 要点之三是 Baire 拓扑及函数锥等位势论常用的研究工具与研究对象.

第一章　点集拓扑基础

§1.1　拓扑与拓扑空间

调和空间位势论的研究对象常置于一个比欧氏空间远为一般的拓扑空间，即局部紧 Hausdorff 空间上来讨论. 因此，我们必须对这样的空间有较多的了解. 本节先介绍拓扑空间的一些常用的基本概念与结论.

以下设 X 是一个非空集合.

1. 拓扑，基，子基，邻域基

定义 X的一个子集族 $\mathcal{T}$ 若满足下面条件(1)，(2)，(3)，则称为X上的一个拓扑：

(1) 空集 $\varnothing \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$;

(2) 关于有限交封闭：若E, $F \in \mathcal{T}$, 则 $E \cap F \in \mathcal{T}$;

(3) 关于任意并封闭：若$\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, 则$\cup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

若 $\mathcal{T}$ 为X上的拓扑，则序偶 $(X, \mathcal{T})$ 称为一个**拓扑空间**，在不至于混淆的情况下，可简记作X. $\mathcal{T}$ 的元素叫做 $\mathcal{T}$ **开集**，简称**开集**. $\mathcal{T}$ 开集在X中的余集叫做 $\mathcal{T}$ **闭集**，简称**闭集**.

由关于集合运算的 De.Morgen 律知，空集与X都是闭集，从而既又闭；任意有限个闭集的并是闭集，任意多个闭集的交仍然是闭集.

定义 在拓扑空间$(X, \mathcal{T})$中，若 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ 满足：对任何 $G \in \mathcal{T}$, 对任何 $x \in G$, 存在 $U \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in U \subset G$, 则称 $\mathcal{B}$ 是该空间的或 $\mathcal{T}$ 的一个**拓扑基**,简称为**基**. 若 $\mathcal{T}$ 有一个可数基 $\mathcal{B}$(即 $\mathcal{B}$ 仅含可数个开集)，则称该空间为**第二可数的**.

定理 1-1-1 1) 设 $\mathcal{T}$是X上的拓扑，则 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$的一个基，当且仅当 $\forall G \in \mathcal{T}$, 存在$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$使得 $G = \cup \mathcal{A}$.

2) 若X上的两个拓扑 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{T}$有一个共同的基 $\mathcal{B}$, 则 $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

证明 1) 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的基，取定一个 $G \in \mathcal{T}$, 据基的定义，$\forall x \in G$, 存在 $U_x \in \mathcal{B}$使得 $x \in U_x \subset G$. 令 $\mathcal{A} :=\{U_x | x \in G\}$, 则 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$且 $G = \cup \mathcal{A}$. 反之，若 $\forall G \in \mathcal{T}$, 有 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$使得 $G = \cup \mathcal{A}$, 则$\forall x \in G$, 有 $A \in \mathcal{A}$使得 $x \in A$，显然 $A \subset G$.

2) 由拓扑的定义及结论 1)直接推出. □

定理 1-1-2 X的子集族 $\mathcal{B}$若满足: 1) $\cup \mathcal{B} = X$及 2) 对任意

$E, F \in \mathscr{B}$ 及任意 $x \in E \cap F$，都存在 $G \in \mathscr{B}$，使得 $x \in G \subset E \cap F$，则 X 上有唯一的、以 $\mathscr{B}$ 为基的拓扑 $\mathscr{T}$，称为以 $\mathscr{B}$ 为**基生成的拓扑**.

证明 令

$$\mathscr{T} := \{U \subset X \mid \forall x \in U \text{ 存在 } V \in \mathscr{B} \text{ 使得 } x \in V \subset U\}.$$

那么 $\mathscr{T}$ 是 X 上的一个拓扑. 事实上，$\varnothing \in \mathscr{T}$；由条件(1)知 $X \in \mathscr{T}$. 设 $A, B \in \mathscr{T}$，$x \in A \cap B$. 据 $\mathscr{T}$ 的定义，有 $E, F \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in E \subset A$ 且 $x \in F \subset B$，即 $x \in E \cap F$. 据条件(2)，有 $G \in \mathscr{B}$，使得 $x \in G \subset E \cap F \subset A \cap B$. 故 $A \cap B \in \mathscr{T}$，即 $\mathscr{T}$ 关于有限交封闭. 设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}$，$x \in \cup\mathscr{A}$，则有 $U \in \mathscr{A}$ 使得 $x \in U \in \mathscr{T}$，从而存在 $G \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in G \subset U \subset \cup\mathscr{A}$，故 $\cup\mathscr{A} \in \mathscr{T}$，即 $\mathscr{T}$ 关于任意并封闭. 所以 $\mathscr{T}$ 是拓扑. 由 $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ 及 $\mathscr{T}$ 的定义知 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{T}$ 的基，由上一定理之(2)知，以 $\mathscr{B}$ 为基的拓扑唯一. □

定义 X 的子集族 $\mathscr{S}$ 称为空间$(X, \mathscr{T})$ 或拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个**子基**，如果 $\mathscr{S}$ 的任意有限个成员之交全体是 $\mathscr{T}$ 的一个基.

定义 设 $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑，若 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$ 就说 $\mathscr{T}_1$ **粗于** $\mathscr{T}_2$ 或 $\mathscr{T}_2$ **细于** $\mathscr{T}_1$.

定理 1-1-3 若 X 的子集族 $\mathscr{S}$ 满足 $\cup\mathscr{S} = X$，包含 $\mathscr{S}$ 的、X 上的最粗拓扑就是以

$$\mathscr{B} := \{A \subset X \mid A \text{ 是 } \mathscr{S} \text{ 中某有限个成员之交}\}$$

为基的拓扑 $\mathscr{T}$，称 $\mathscr{T}$ 为以 $\mathscr{S}$ 为**子基生成的拓扑**.

证明 因 $\mathscr{S} \subset \mathscr{B}$、$\mathscr{B}$ 满足定理 1-1-2 的两个条件，故 X 上有唯一的以 $\mathscr{B}$ 为基生成的拓扑 $\mathscr{T}$. 设 $\mathscr{T}_1$ 是包含 $\mathscr{S}$ 的拓扑，$U \in \mathscr{T}$，要证 $U \in \mathscr{T}_1$，从而 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_1$. 由于 $\mathscr{T}_1$ 是拓扑，$\mathscr{S} \in \mathscr{T}_1$，故 $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}_1$. 另一方面，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的基，据定理 1-1-1，存在 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ 使得

$$U = \cup\mathscr{A};\ \cup\mathscr{A} \in \mathscr{T}_1,$$

因 $\mathscr{T}_1$ 是拓扑且 $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}_1$，故 $U \in \mathscr{T}_1$. □

例 1 $\boldsymbol{R}^N$ 的有理点 $x := (x_1, \cdots, x_N)$ （其中每个 x_i 是有理数）全体 Q 是一个可数集，$\mathscr{B} := \{B(x, r) \mid x \in Q, r > 0 \text{ 为有理数}\}$ 满足定

理 1-1-2 的条件, 以它为基所确定的拓扑就是 $\boldsymbol{R}^N$ 上的通常欧氏拓扑. 因 $\mathcal{B}$ 为可数集, 故 $\boldsymbol{R}^N$ 为第二可数.

例 2 $\boldsymbol{R}$ $(=\boldsymbol{R}^1)$ 上的通常欧氏拓扑是以所有形如 (a,∞), $(-\infty, b)$ 的区间全体为子基所生成的拓扑.

例 3 设 $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$是两个拓扑空间, 在 X 与 Y 的笛卡儿乘积 $X\times Y$ 上的以$\{U\times V \mid U\in\mathcal{T}, V\in\mathcal{S}\}$为基生成的拓扑称为乘积拓扑. 例如, $\boldsymbol{R}^2$ 上的拓扑就是 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 上的乘积拓扑; 一般地, $\boldsymbol{R}^N$ 上的欧氏拓扑可看成 $\boldsymbol{R}^{N-1}\times\boldsymbol{R}$ 上的乘积拓扑.

定义 1) 设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间, $x\in X$, $A\subset X$ 称为 x 的一个邻域, 如果存在 $U\in\mathcal{T}$ 使得 $x\in U\subset A$. 特别, 若 $x\in A\in\mathcal{T}$, 称 A 是 x 的开邻域. 把上述点 x 换成一个集 E, “$x\in U$”换成 “$E\subset U$”, “$x\in A$”换成“$E\subset A$”, 就得到 E 的邻域与开邻域的定义.

2) 称 $\mathcal{B}(x)$ 为 $x\in X$的一个邻域基, 若每个 $U\in\mathcal{B}(x)$ 是 x 的一个开邻域且对 x 的任一邻域 A, 存在 $U\in\mathcal{B}(x)$使得 $x\in U\subset A$.

3) 若每个 $x\in X$ 有一个可数的邻域基, 则称 X 是第一可数的.

显然, 若 X 为第二可数, 则必为第一可数. 又, $G\subset X$ 为开集的充要条件是: G 是它的每个元素 (即 G 中的每个点) 的邻域.

也可以用规定满足邻域公理的邻域基的办法来产生拓扑.

定理 1-1-4 若对每个 $x\in X$ 有一个 X 的子集族 $\mathcal{U}_x$ 满足下面条件:

(1)$\forall x\in X$, $\mathcal{U}_x$ 不是$\varnothing$; 若 $U\in\mathcal{U}_x$, 则 $x\in U$;

(2)若 $x\in U\in\mathcal{U}_y(y\in X)$, 则存在 $V\in\mathcal{U}_x$ 使得 $V\subset U$;

(3)若 $U, V\in\mathcal{U}_x$, 则存在 $W\in\mathcal{U}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$, 则

$$\mathcal{B}:=\cup_{x\in X}\mathcal{U}_x$$

满足定理 1-1-2 的两个条件, 从而有唯一的以 $\mathcal{B}$ 为基的拓扑 $\mathcal{T}$, 使得对每个 $x\in X$, $\mathcal{U}_x$ 是 x 的一个邻域基. $\mathcal{T}$ 也称作以 $\{\mathcal{U}_x \mid x\in X\}$ 为邻域基族生成的拓扑.

证明不难，留作练习. □

例 4 设 Y 为非空集, $Y\times Y$ 上的实函数 d 若满足下面三个条件就叫做 Y 的一个度量:

(1)正性: $\forall\, x, y\in Y, d(x,y)\geq 0$; 当且仅当 $x=y$ 时 $d(x,y)=0$.

(2)对称性: $\forall\, x, y\in Y, d(x,y)=d(y,x)$;

(3)三角不等式: $\forall\, x, y, z\in Y, d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

(Y, d)称为以 d 为度量的度量空间; 当度量明确时, 常简记作 Y.

在度量空间(Y, d)中, 称 $B(x,r):=\{y\in Y\mid d(x,y)<r\}$ 为以 $x\in Y$ 为中心 $r>0$ 为半径的球. 显然, $\{B(x,r)\mid 0<r<\infty, x\in Y\}$ 满足定理 1-1-4 的条件, 由它生成的 Y 上的拓扑称为由度量 d 导出的拓扑.

熟知 $\boldsymbol{R}^N$ 就是以

$$d(x,y):=|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_N-y_N)^2}$$

为度量的度量空间; $\boldsymbol{R}^N$ 的拓扑就是以度量 d 导出的拓扑.

显然, 度量空间都是第一可数的.

2. 聚点、孤立点、边界点、内部、外部、闭包

定义 设 $X=(X,\mathcal{T})$为拓扑空间, $E\subset X, x\in X$.

1) 若 x 的每个邻域都含有 E 中异于 x 的点, 则称 x 是 E 的**聚点**; 若 $x\in E$ 且 x 不是 E 的聚点, 则称 x 是 E 的**孤立点**.

E 的聚点全体记作 E^{d}, 称为 E 的**导集**; E 的孤立点全体记作 E^{i}, 称为 E 的**孤立点集**.

(注意: E 的聚点可不属于 E, E 的孤立点必为 E 的点.)

2) 若 x 有邻域 U 使得 $U\subset E$, 则称 x 为 E 的**内点**; E 的内点全体称为 E 的**内部**, 记作 E^0; $X\setminus E$ 的内部称为 E 的**外部**, 其中的

点称为 E 的外点.

3)若 x 的任何一邻域同时含有 E 的点与 $X\setminus E$ 的点, 则称 x 为 E 的边界点. E 的边界点全体记作 ∂E, 称为 E 的**边界**.

显然, x 必为 E 的内点, 外点, 边界点三者之一.

4)令 $\overline{E} := E\cup\partial E$, 称 $\overline{E}$ 为 E 的**闭包**.

易知, $\overline{E}=E^0\cup\partial E=E^d\cup E^i$; $\overline{E}$ 是包含 E 的最小闭集, 也就是包含 E 的所有闭集之交; $x\in\overline{E}$ 的充要条件是 x 的任一邻域都包含有 E 的点.

3. 稠密与可分

定义 设 X 为拓扑空间, $E, F\subset X$, 若 $F\subset\overline{E}$, 则称 E 在 F 中**稠密**; 空间 X 称为**可分的**, 若有一个可数子集 E 在 X 中稠密.

易知, E 在 F 中稠密的充要条件是, $\forall\, x\in F, x$ 的任何一个邻域都含有 E 的点.

例 1 中所说的 $\boldsymbol{R}^N$ 的有理点集 Q 在 $\boldsymbol{R}^N$ 中稠密, 因 Q 是可数的, 故 $\boldsymbol{R}^N$ 是可分的.

定理 1-1-5 第二可数空间是可分的.

证明 设$(X, \mathcal{T})$为第二可数, 即存在可数基$\{U_i \mid i=1,2,\cdots\}$. 那么在每个 $U_i\,(\neq\varnothing)$中取一点 x_i 组成的集 E 为 X 的可数稠密子集. □

4. 定向集、网与子网

定义 设 $P\neq\varnothing, G\subset P\times P=\{(x,y)\mid x\in P, y\in P\}$, 那么 G 叫做 P 上的一个**关系**. 若关系 G 满足:

(1)自反性: $\forall\, x\in P, (x,x)\in G$;

(2)传递性: 若 $(x, y) \in G, (y, z) \in G$, 必有 $(x, z) \in G$;

(3) 定向性: $\forall x, y \in P$, 存在$z \in P$满足: $(x, z) \in G, (y, z) \in G$;
则称 G 是 P 上的一个**定向关系**或**序**; (P, G)为**定向集**或 P 关于 G 成为一个**定向集**.

事实上, 定向关系 G 是自然数集 $\mathbf{N}$ 上的序 "≤" 的推广, 因此也常用 "≤" 代表 G, 并把 $(x, y) \in G$ 改写成 $x \le y$ 或 $y \ge x$.

定义 从定向集 P 到集 X 的一个映射称为 X 里的一个**点网**或**网**. 通常把 $a \in P$ 在这个映射下的像记作 x_a, 并用$(x_a | a \in P)$来表示这个网, 有时也记作$\{x_a | a \in P\}$.

网的概念是序列的推广, X 里的每个点列$\{x_i\}$就是以 $\mathbf{N}$ 为定向集的、X 里的网$\{x_i | i \in \mathbf{N}\}$.

定义 设 $(x_a | a \in P)$ 是拓扑空间 X 里的一个网, 如果对 $x_0 \in X$ 的任一邻域 U, 都存在 $b \in P$ 使得: 对任何 $a \in P$, 当 $b \le a$ 时恒有 $x_a \in U$, 那么说该网**收敛**于 x_0. 这时 x_0 称为该网的一个**极限点**. 常记作 $\lim_P x_a = x_0$.

例 5 设 x 为拓扑空间 X 中的一点. $\mathscr{U}_x$ 为 x 的一个邻域基, 在 $\mathscr{U}_x$ 中规定定向关系 "≤" 为:

$$U \le V \Leftrightarrow V \subset U,$$

则$(\mathscr{U}_x, \le)$是一个定向集. 对每个 $V \in \mathscr{U}_x$, 任取一点 $x_V \in V$, 那么映射 $V \mapsto x_V$ 定义了 X 里的一个网$(x_V | V \in \mathscr{U}_x)$, 它收敛于 x.

又, 对于从 X 到集 Y 的任一映射 g, $g(x_V | V \in \mathscr{U}_x)$ 是 Y 里的一个网.

定义 设 g 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射, $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 如果对 $X \setminus \{x_0\}$中任何一个收敛于 x_0 的网 $(x_a | a \in P)$, Y 中的网 $(g(x_a) | a \in P)$ 收敛于 y_0, 就说当 $x \to x_0$ 时 $g(x)$收敛于 y_0, 并记作

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0.$$

定理 1-1-6 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$ 当且仅当对 y_0 的任一邻域 G, 存在 x_0 的邻域 U 使得 $g(U\backslash\{x_0\})\subset G$.

证明 充分性. 设 G 为 y_0 的任一邻域, U 为 x_0 的邻域使得 $g(U\backslash\{x_0\})\subset G$. 又设 $(x_a|a\in P)$是 $X\backslash\{x_0\}$ 中收敛于 x_0 的网. 那么存在 $b\in P$ 使得对任何 $a\in P$, 当 $b\le a$ 时恒有 $x_a\in U\backslash\{x_0\}$, 故 $g(x_a)\in G$, 这就说明 $(g(x_a)\,|\,a\in P)$ 收敛于 y_0.

必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$. 如果 y_0 有一个邻域 G, 使得对 x_0 的一个邻域基 $\mathscr{B}_0$ 的任一成员 U, 总有 $x_U\in U\backslash\{x_0\}$使得 $g(x_U)\notin G$. 按例 5 的规定, X 里的网 $(x_U|\,U\in\mathscr{B}_0)$ 收敛于 x_0. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$, 故 Y 中的网 $(g(x_U)\,|U\in\mathscr{B}_0)$ 收敛于 y_0, 即存在 $V\in\mathscr{B}_0$ 使得对任何 $U\in\mathscr{B}_0$, 当 $U\subset V$ 时恒有 $g(x_U)\in G$. 矛盾. □

定义 设 $(x_a|\,a\in P)$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 里的一个网, $A\subset X$. 称该网终于 A, 若有 $b\in P$ 使得对任何 $a\in P$, 当 $a\ge b$ 时恒有 $x_a\in A$. 若对任意一个 $b\in P$, 都可以找到一个 $a\in P$ 使得 $a\ge b$ 且 $x_a\in A$, 则称该网常在 A 内或常返于 **A**. 若网常在 x 的每一个邻域, 则称 x 为该网的一个聚点.

由网收敛的定义知, x 为网的极限当且仅当该网终于 x 的每一个邻域; 极限点必为聚点.

定义 设$(x_a|\,a\in P)$是集 X 中的网, $(y_t|\,t\in Q)$是集 $Y\,(Y\subset X)$ 中的网. 若存在从 Q 到 P 的映射 m 满足: 对每个 $t\in Q$, 有 $y_t=x_{m(t)}$ 且对每个 $a\in P$, 存在 $s\in Q$ 使得对任意 $t\in Q$, 当 $t\ge s$ 时有 $m(t)\ge a$, 则称 $(y_t|\,t\in Q)$是网$(x_a|\,a\in P)$ 的一个子网.

显然, 子网的概念是点列的子列的推广.

定理 1-1-7 拓扑空间 X 中的网 $(x_a|\,a\in P)$ 以 $x\in X$ 为聚点的充要条件是该网有子网收敛于 x.

证明 $\Leftarrow$: 设$(x_a|\,a\in P)$有子网收敛于 x, 那么对 x 的任何一个邻域 U, 该子网终于 U. 由子网的定义知, $(x_a|\,a\in P)$常在 U 中,

故 x 为该网的聚点.

$\Rightarrow$: 设 x 是 $(x_a \mid a \in P)$的聚点，用 $\mathscr{B}$ 表示 x 的一个邻域基. 对 $a \in P$ 和 $U \in \mathscr{B}$, 当 $x_a \in U$ 时, 作序偶(a, U). 把这种序偶全体记作 Q, 在 Q 中规定序关系 "$\leq$" 如下:

$$(a, U) \leq (b, V) \Leftrightarrow a \leq b \text{ 且 } V \subset U.$$

于是, $(Q, \leq)$是一个定向集. 作 Q 到 P 的映射 m: $(a, U) \mapsto a$. 令 $y_{(a,U)} = x_a$ ，则 $(y_{(a,U)} \mid (a, U) \in Q)$是 X 里的一个网. 因为 x 是 $(x_a \mid a \in P)$ 的聚点, 对任意 $V \in \mathscr{B}$和任意 $b \in P$, 总有 $c \in P, c \geq b$, 使得 $x_c \in V$. 于是 $(c, V) \in Q$ 且当$(a, U) \in Q$, $(a, U) \geq (c, V)$ 时, 恒有 $a \geq c$, $x_a \in U \subset V$. 这说明了$(y_{(a,U)} \mid (a, U) \in Q)$ 是 $(x_a \mid a \in P)$ 的子网且收敛于 x. □

5. 相对开(闭)集，子空间

定义 设$(X, \mathscr{T})$为拓扑空间, $Y \subset X$. 称 Y 的子集 G 为**相对(于 Y 的)开集**, 若存在 $G_1 \in \mathscr{T}$ 使得 $G = Y \cap G_1$. Y 的子集 F 称为**相对(于 Y 的)闭集**, 若 $Y \setminus F$ 是相对开集.

易验证，相对(于 Y 的)开集全体构成 Y 上的一个拓扑 $\mathscr{T}_1$，称为 $\mathscr{T}$ 在 Y 上的**引出 (或诱导)拓扑**, $(Y, \mathscr{T}_1)$ 称为 $(X, \mathscr{T})$的**子空间**.

显然, 若 F 是相对闭集，则存在 X 中的闭集 F_1，使得

$$F = Y \cap F_1.$$

6. 连续映射与连续函数

定义 设$(X, \mathscr{T})$, $(Y, \mathscr{S})$ 是两个拓扑空间，f是从 X 到 Y 的映射. 称 f 在 $x \in X$ **连续**，若 $f(x)$的每个邻域 U 的原像

$$f^{-1}(U) = \{ x \in X \mid f(x) \in U \}$$

是 x 的邻域. 若 f 在 x 的每一点都连续, 则称 f 在 X 上为 ($\mathcal{T}$-$\mathcal{S}$) **连续**. 若 f 是满单射且在 X 上为 $\mathcal{T}$-$\mathcal{S}$ 续, 而逆映射 f^{-1} 在 Y 上为 $\mathcal{S}$-$\mathcal{T}$ 连续, 则称 f 是从 X 到 Y 的**同胚映射**. 若存在一个从 X 到 Y 的同胚映射, 则称 X 与 Y 同胚.

易验证, f 在 X 上($\mathcal{T}$-$\mathcal{S}$)连续的充要条件是: 对每个 $G \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$. 更一般地, 若 $\mathcal{S}_1$ 为 $\mathcal{S}$ 的一个子基, 则 f 为 $\mathcal{T}$-$\mathcal{S}$ 连续当仅当对每个 $V \in \mathcal{S}_1$, 都有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

f 在 X 的子集 E 上的连续性可看成子空间上的映射来处理.

定义 称从集 A 到 $[-\infty, \infty]$的映射叫做**数值函数**, 简称**函数**; 把从 A 到$(-\infty, \infty)$ 的映射叫做**实函数**; 连续的实函数简称**连续函数** (参看 § 1.4 中关于上、下半连续性的定义); 从集 A 到有限区间$[-a, a]$的映射叫做**有界函数**.

定义 设 $\mathcal{F}$ 为 A 上的函数全体组成的集, 从定向集 P 到 $\mathcal{F}$ 的映射$\{f_i \mid i \in P\}$称为 A 上的**函数网**. 当 A 是拓扑空间时, 若其中每个 f_i 在 A 连续, 则称该网为**连续函数网**. 类似地, 可定义其它满足某种性质的函数网.

设 $\{f_i \mid i \in P\}$为集 A 上的函数网, f 为 A 上的函数. 若 $\forall x \in A$, 网 $\{f_i(x) \mid i \in P\}$收敛于$f(x)$, 则称 $\{f_i \mid i \in P\}$ 在 A 上**点点收敛**于 f.

一致收敛的概念可用类似于数学分析教程的方法给出, 即对任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在 $j \in P$ 使得对任何 $i \in P$, 当 $i > j$ 时恒有

$$|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

对所有 $x \in A$ 一致成立, 则称 $\{f_i \mid i \in P\}$ 在 A 上**一致收敛**于函数 f.

把集 A 上的有界函数全体记作 $\mathcal{E}$, $\forall f, g \in \mathcal{E}$, 令

$$d(f, g) := \sup_{i \in A} |f(x) - g(x)|,$$

则 d 是 $\mathcal{E}$ 上的一个度量, 由它在 $\mathcal{E}$ 上引出的拓扑 T 称为**一致收敛拓扑**. 易验证, A 上的有界函数网$\{f_i \mid i \in P\}$一致收敛于某个 g

$\in \boldsymbol{E}$ 当且仅当 $\{f_i \mid i\in P\}$ 在 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 上关于一致收敛拓扑 $\boldsymbol{T}$ 上收敛于 g.

若拓扑空间 X 上的连续实函数网 $\{f_i \mid i\in P\}$ 一致收敛于 f, 则可用类似于数学分析的方法证明, f 在 X 连续.

7. 连通性与连通分支

定义 设 X 是拓扑空间, $Y\subset X$. 若 Y 不能表示成两个非空的、不相交的相对开集之并, 则称 Y 是**连通的**.

上述“相对开集”可改为“相对闭集”.

易知, 一维直线 $\boldsymbol{R}$ 的子集 E 是连通的, 当且仅当 E 为区间(有限或无限, 开或闭, 或半开半闭区间).

$\boldsymbol{R}^N$ 中的连通开集称为区域. 对于区域内的任何两点, 可用一条位于区域内的折线将它们连接起来.

一般地, 若 $E\subset G\subset X$, E 是连通的且 G 不存在别的连通子集以 E 为真子集, 则说 E 是 G 的一个**连通分支**. G 是它的所有连通分支之并, 且任意两个不同分支不相交.

$\boldsymbol{R}^N$ 中的开集可表为至多可数个两两不交的区域(连通分支)的并, 这些连通分支都是既相对开, 又相对闭的.

8. 滤基、滤子及其关联的点网

滤子与点网是等价的概念, 许多著名的学者在他们的文献中都依自己的需要与偏好来选用它们. 因此有必要了解滤子与滤基的概念、主要结论及其它们与点网如何建立等价关系的.

以下均设 Ω 是一个非空集合.

（一）滤基与滤子

定义 设$\mathscr{A}$是 Ω 的一个非空子集族. $\mathscr{A}$若满足下面条件，则称之为 Ω 上的一个**滤基**：

1) $\varnothing \notin \mathscr{A}$;

2) 若 $U, V \in \mathscr{A}$, 则存在 $W \in \mathscr{A}$使得 $W \subset U \cap V$.

定义 设$\mathscr{F}$是 Ω 的一个非空子集族且满足下面三条件，则称$\mathscr{F}$是 Ω 上的一个**滤子**：

1) $\varnothing \notin \mathscr{F}$;

2) 若 $U, V \in \mathscr{F}$, 则 $U \cap V \in \mathscr{F}$;

3) 若 $U \in \mathscr{F}$, $V \subset \Omega$ 且 $U \subset V$, 则 $V \in \mathscr{F}$.

显然，滤子是特殊的滤基. 反过来，若 $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的一个滤基，则

$$\mathscr{F} := \{ B \subset \Omega \mid \text{存在 } V \in \mathscr{A} \text{使得 } V \subset B \}$$

是 Ω 上的一个滤子，称之为**由滤基$\mathscr{A}$生成的滤子**.

定义 若 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的滤子且它不是 Ω 上其它滤子的真子集，则称$\mathscr{F}$是 Ω 上的**超滤子**.

容易验证：1) $\mathscr{F}_0$ 是 Ω 上的超滤子的充要条件是，对 Ω 的任一子集 E，如果 $E \notin \mathscr{F}_0$, 则必有 $\Omega \setminus E \in \mathscr{F}_0$.

2) Ω 上的每个滤子 $\mathscr{F}$ 必有包含它的超滤子 （利用 Zorn 引理，留作练习）.

（二）滤子与滤基的极限点、聚点

定义 设 Ω 为拓扑空间. $\mathscr{F}$与$\mathscr{A}$分别是 Ω 上的滤子与滤基. 若 $x \in \Omega$ 的每个邻域都包含有 $\mathscr{F}$（或 $\mathscr{A}$）的某个成员，则称 x 为 $\mathscr{F}$（或 $\mathscr{A}$）的**极限点**. 也称 $\mathscr{F}$（或 $\mathscr{A}$）**收敛于** x. 显然 x 是 $\mathscr{F}$ 的极限点等价于 x 的每个邻域都是 $\mathscr{F}$ 的成员

当考虑 Ω 的子集 D 上的滤子 $\mathscr{F}$ 是否收敛于 $x \in \Omega$ 时，应把 $\mathscr{F}$ 当成子空间 $D \cup \{x\}$上的滤子来考虑. 这时 x 可不属于 D.

例 6 设 $x \in \Omega$, $\mathscr{U}_x$ 表示 x 的所有邻域组成的集，则 $\mathscr{U}_x$ 是一个滤子，且收敛于 x；若 $\mathscr{B}$ 表示 x 的一个邻域基，则 $\mathscr{B}$ 就是一个滤基而且收敛于 x.

若 x 的任一邻域与滤基 $\mathscr{A}$（或滤子 $\mathscr{F}$）的每个成员之交皆不空，则称 x 是 $\mathscr{A}$（或相应地, $\mathscr{F}$）的聚点（附着点）.

易验证：(1) 闭集 $\cap\{\overline{B} \mid B \in \mathscr{F}\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的聚点全体.

(2) x 是 $\mathscr{F}$ 的聚点当且仅当至少存在一个包含 $\mathscr{F}$ 的滤子 $\mathscr{G}$ 使得 $\mathscr{G}$ 收敛于 x.

(3) 超滤子的每个聚点都是极限点.

（三）与点网相关联的滤基

设（$x_a \mid a \in P$）是 Ω 里的一个点网，其中 P 是以"$\leq$"为序的定向集. 令

$$\mathrm{T}_a := \{b \in P \mid a \leq b\},$$

则$\{\mathrm{T}_a \mid a \in P\}$是 P 上的一个滤基，由它生成的 P 上的滤子，称为**截口滤子**. 令

$$x(\mathrm{T}_a) := \{x_b \mid b \in P \text{ 且 } a \leq b\} = \{x_b \mid b \in \mathrm{T}_a\}.$$

它是 Ω 的一个子集，称为点网$(x_a \mid a \in P)$的一个尾巴. 那么，易验证，这种尾巴全体 $\mathscr{A} := \{x(\mathrm{T}_a) \mid a \in P\}$是 Ω 上的一个滤基，称之为**与网（$x_a \mid a \in P$）相关联的滤基**.

定理 1-1-8 拓扑空间 Ω 上的点网（$x_a \mid a \in P$)收敛于 $x \in \Omega$ 当且仅当与该网相联的滤基 $\mathscr{A}$ 也收敛于 x.

证明 设 $\lim x_a = x$. 那么对 x 的任一邻域 U，存在 $b \in P$，使得当 $a \geq b$ 时恒有 $x_a \in U$，即 $x(\mathrm{T}_b) \subset U$，这说明滤基 $\mathscr{A}$ 收敛于 x.

逆命题只须把上述过程逐步反推即可证得. □

（四）滤基生成点网

设 $\mathscr{A}$ 是集 Ω 上的一个滤基. 那么 Ω 上必有一个网，它所关

联的滤基就是 $\mathscr{A}$.

事实上，令 $P:=\{(a, \mathscr{A}) \mid a \in A \in \mathscr{A}\}$并在 P 中定义次序 "≤" 如下：

$$(a, A) \leq (b, B) \Leftrightarrow B \subset A.$$

再令 $x_{(a, A)}: = a$. 称$(x_{(a, A)} \mid (a, A) \in P)$为 $\mathscr{A}$ 所关联的点网. 易验，这个点网所关联的滤基就是 $\mathscr{A}$. □

（五）非凡点网(universal net)与超滤子

集 Ω 里的一个网（$x_a \mid a \in P$）称为非凡的，如果对Ω的任意子集 A，该网必终于 A 或 $\Omega \setminus A$.

易验证，由非凡点网所关联的滤基所生成的滤子必为超滤子. 因此 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的超滤子的充要条件是，对 Ω 的任一子集 B，B 与$\Omega \setminus B$ 二者必有一个是 $\mathscr{F}$ 的成员.

定理 1-1-9 设 f 是从集 Ω 到集 Ω' 的映射，若 $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的滤基，则 $f(\mathscr{A}) :=\{f(B) \mid B \in \mathscr{A}\}$是 Ω' 上的滤基；若 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的超滤子，则由滤基 $f(\mathscr{F}):= \{f(B) \mid B \in \mathscr{F}\}$在 Ω' 上生成的滤子为超滤子（注意：$f(\mathscr{F})$未必为滤子).

证明 第一个命题是显然的. 现设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的超滤子，令

$$\mathscr{G}:=\{B \mid B \in \Omega' \text{ 且存在某个 } F \in \mathscr{F} \text{ 使得 } f(F) \subset B\},$$

则 $\mathscr{G}$ 是 Ω'上由 $f(\mathscr{F})$ 生成的滤子. 事实上，$\varnothing \notin \mathscr{G}$；若 $B', B'' \in \mathscr{G}$，则存在 $F', F'' \in F$ 使得 $f(F') \subset B', f(F'') \subset B''$，从而 $f(F' \cap F'') \subset B' \cap B'' \in \mathscr{G}$，因 $F' \cap F'' \in \mathscr{F}$，故 $B' \cap B'' \in \mathscr{G}$. 若 $B \in \mathscr{G}$ 且 $B \subset C \subset \Omega'$，显然 $C \in \mathscr{G}$. 故 $\mathscr{G}$ 为滤子，且为 $f(\mathscr{F})$ 的生成的滤子.

对 Ω' 的任一子集 A，要么 $f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$，要么 $\Omega \setminus f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$（因 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的超滤子). 若 $f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$，则 $A \in f(\mathscr{F})$，从而 $A \in \mathscr{G}$；否则，因$\Omega \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\Omega' \setminus A) \in \mathscr{F}$，故$\Omega' \setminus A \in f(\mathscr{F})$，同样得 $\Omega' \setminus A \in \mathscr{G}$. 这说明 $\mathscr{G}$ 是超滤子. □

§1.2 局部紧 Hausdorff 空间

本节设 $X:=(X,\mathcal{T})$为拓扑空间. 先介绍空间的分离程度和紧性, 然后再着重介绍局部紧性质. 其中局部紧空间、相对紧开集等概念及定理 1-2-8 (Urysohn 引理)和定理 1-2-5 等性质在位势论中使用频率最高, 必须熟练掌握. 本节最后对σ紧概念作了简单叙述。

1. 拓扑空间的分离程度

T_1空间 若 X 里不同的两点 x, y 必有各自的邻域不包含另一点, 就叫 X 为一个 T_1 空间.

例 设 X 是一个无限集, X 中规定拓扑

$$\mathcal{T}:=\{A\subset X \mid X\setminus A \text{ 是有限集}\}\cup\{\varnothing\}.$$

$\mathcal{T}$ 就是一个 T_1 空间. 这时 X 中任何一个含有无限个不同元素的数列收敛于 X 中任意一点.

X 是 T_1 空间当且仅当 X 中的每一个单点集是闭集.

T_2空间 若 X 中不同两点一定有不相交的邻域, 则说 X 是 T_2空间, 常称为 **Hausdorff** 空间.

易验证: T_2空间必为 T_1 空间; 在 T_2 空间中任何点网的极限点至多只有一个.

正则空间 若 X 中的点 x 不属于某一个闭集 E, 则 x 必有邻域与 E 的某个邻域不相交, 则称 X 是正则空间.

正规空间 若 X 中两个不相交的闭集必有不相交的邻域, 就说 X 是正规空间.

正则的 T_1 空间叫做 **T_3空间**, 它必为 T_2空间; 正规的 T_1空间叫做 **T_4空间**, 它必为 T_3 空间.

2. 紧致性

定义 设$E \subset X$. $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$, 即$\mathcal{O}$ 是一族开集.

1) 若 $\cup \mathcal{O} \supset E$, 则说$\mathcal{O}$是$E$的一个开覆盖族.

2) 若E的任何一个开覆盖族$\mathcal{O}$都有有限的子覆盖族, 即存在由有限个开集组成的族$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, 使得 $\cup \mathcal{O}_1 \supset E$, 则说$E$是紧集或是紧的. 当$X$本身为紧集时, 称$X$为紧空间.

显然, 有限个紧集的并也是紧集. $\boldsymbol{R}^N$中的有界闭集是紧集.

定理 1-2-1 设$K \subset X$为紧集, f是从X到拓扑空间Y的连续映照, 则$f(K)$在Y中也是紧集.

证明 由紧集及连续映射的定义立即推出. □

定理 1-2-2 紧集K的相对闭子集K_1也是紧集.

证明 设$\mathcal{O}$为K_1的一个开覆盖族. 因$K \setminus K_1$为相对于K开集, 故有X的开集U使得$U \cap K = K \setminus K_1$. 于是$\mathcal{O} \cup \{U\}$是$K$的覆盖族, 其中必有有限子族$\mathcal{O}_1$覆盖了$K$; 因$U \cap K_1 = \varnothing$, 故$\mathcal{O}_1 \setminus \{U\}$覆盖了$K_1$, 它是$\mathcal{O}$的有限子覆盖族. □

定理 1-2-3 Hausdorff 空间X中的紧集K必为闭集.

证明 假定K不是闭集, 则存在K的聚点$x \notin K$. 即$x \in \overline{K} \setminus K$. 于是对任意$y \in K, y \neq x$. 由Hausdorff空间的定义知存在开集$U$与$V_y$ 使得$x \in U, y \in V_y$且$U \cap V_y = \varnothing$, 于是$x \notin \overline{V_y}$. 显然 $\{ V_y | y \in K \}$是紧集 K 的一个开覆盖族, 故必存在有限子覆盖族$\{V_1, V_2, \cdots, V_l\}$. 于是$x \notin \cup_{j=1}^{l} \overline{V_j} \supset \overline{K}$. 矛盾. □

定义 设$\mathcal{E}$是X的一个子集族, 若其中任意有限个成员的交不空, 则称该族具有有限相交性质.

定理 1-2-4 设X为拓扑空间, $K \subset X$. 那么下面四个命题等价:

(1) K 为紧集;

(2) 任何一个具有有限相交性质的、K 的相对闭子集族的交不空;

(3) K 中任何一个网在 K 中有聚点;

(4) K 里的任何一个网必有收敛子网.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2)可由紧集的定义用关于集合运算的 De. Morgen 律直接得出.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) 可由定理 1-1-7 得到.

下面先证(1) $\Rightarrow$ (3). 设 K 为紧集, $(y_i \mid i \in Q)$是 K 里的一个网, 它不以 K 中的任何点为聚点. 那么 K 的每个点 x 都有一个开邻域 V_x 使得该网终于 $K \setminus V_x$. 因$\{V_x \mid x \in K\}$是 K 的一个开覆盖族, 故有子族$\{V_1,\cdots,V_n\}$覆盖 K, 于是该网终于 $K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i = \varnothing$, 矛盾. 故 K 中有该网的聚点.

再证(3) $\Rightarrow$(2). 设 $\mathscr{F}$ 是 K 的相对闭子集族, 它具有有限相交性质. 令 $\mathscr{E}$:=\{ E | E 为 $\mathscr{F}$ 中有限个元素之交\}. 在 $\mathscr{E}$ 上定义关系"$\leq$"如下:

$$E \leq F \Leftrightarrow E \supset F,$$

那么$(\mathscr{E}, \leq)$是一个定向集. 因为每个 $E \in \mathscr{F}$ 不空, 任取一点 $y_E \in E$, 则$(y_E \mid E \in \mathscr{F})$是 K 上的网. 由假定, 命题(3)成立, 即该网有一个聚点 $y \in K$, 我们断言 $y \in \cap \mathscr{F}$. 否则, 有 $E_0 \in \mathscr{F}$ 使得 $y \in K \setminus E_0$, 那么 $K \setminus E_0$ 是 y 在 K 的一个相对开邻域. 据聚点的定义, 存在 $E \in \mathscr{E}$ 且 $E_0 \leq E$, 即 $E \subset E_0$, 使得 $y_E \in K \setminus E_0$. 这与 $y_E \in E \subset E_0$ 矛盾. 因此 $\cap \mathscr{F} \neq \varnothing$, 即(2)成立. □

3. 局部紧 Hausdorff 空间的性质

定义 若拓扑空间 X 的每一点都有一个邻域是紧的, 则称 X

为局部紧的. 若对 X 的任一闭集 F 和任一点 $x\in X\setminus F$, 都存在 $f\in C(X), f(X)\subset[0,1]$($R^1$ 的区间)使得 $f(x)=0$ 且 $f(F)=\{1\}$, 则称 X 为全正则的.

若 X 为全正则的, 对上述 f, 令

$$U:=\{x\mid f(x)<1/2\},\ V:=\{x\mid f(x)>1/2\}.$$

则 U, V 为不相交的开集且 $x\in U, F\subset V$. 这说明全正则空间必为正则空间.

定理 1-2-5 设 X 为局部紧的 Hausdorff 空间, $x\in X$, 则 x 的任一邻域 G 包含了 x 的一个相对紧开邻域的闭包, 即存在开集 V 使得 $\overline{V}$ 为紧集,且 $x\in V\subset\overline{V}\subset G$.

证明 取定 x 的一个邻域 G. 因空间为局部紧, 故 x 有一个紧邻域 K. 那么 $G\cap K$ 仍为 x 的邻域. 其内部记作 W, 它是 x 的开邻域. 因 x 是 Hausdorff 空间, 由定理 1-2-3, K 为闭集. 又, $\overline{W}\setminus W$ 为 K 的闭子集, 由定理 1-2-2, 它是紧集. 因 $x\notin\overline{W}\setminus W$, 故对任意 $y\in\overline{W}\setminus W$, 存在不相交的开集 U_y 与 V_y 使得 $x\in V_y\subset W$, $y\in U_y$. 因为 $\{U_y\mid y\in\overline{W}\setminus W\}$ 是紧集 $\overline{W}\setminus W$ 的开覆盖族, 必有有限的子覆盖族 $\{U_{y_i}\mid i=1,2,\cdots,n\}$, 记其并集为 U, 又记 $V:=\cap_{i=1}^{n}V_{y_i}$, 则 U 与 V 为不相交的开集且 $x\in V$, $\overline{W}\setminus W\subset U$. 令 $E:=\overline{W}\setminus U$, 于是, $x\in V\subset E\subset W$. 因 $\overline{V}$ 与 E 都是 $\overline{W}$ 的闭子集, 故为紧集且 $x\in V\subset\overline{V}\subset E\subset G$. □

今后我们把闭包为紧集的开集称为相对紧的开集.

定理 1-2-6 设 X 是局部紧 Hausdroff 空间, K 为紧集, F 为与 K 不相交的闭集, 则存在开集 U 和相对紧开集 V 使得

$$K\subset V, F\subset U \text{ 且 } U\cap V=\varnothing.$$

这等价于对紧集 K 的任一邻域 G, K 有相对紧的开邻域 V 使得 $K\subset V\subset\overline{V}\subset G$.

证明 由上一定理, 对任意 $x\in K$, 有相对紧的开邻域 V_x 使

得 $x\in V_x\in\overline{V_x}\subset X\setminus F$. 由于 K 紧, 存在有限族$\{V_{x_i}\mid i=1,2,\cdots,m\}$覆盖了 K, 记这个有限族的并集为 V, 因每个$\overline{V_{x_i}}$紧，故$\overline{V}$为紧集且 $K\subset V\subset\overline{V}\subset X\setminus F$. 令 $U=X\setminus\overline{V}$，则 $F\subset U$ 且 $U\cap V=\varnothing$. □

推论 1-2-7 紧的 Hausdroff 空间是正规的. □

定理 1-2-8 (Urysohn 引理) 设 K, F 分别为局部紧 Hausdroff 空间 X 的紧集与闭集, 二者不相交, 则存在 $f\in C(X)$ 使得 $f(X)=[0,1], f(K)=\{0\}, f(F)=\{1\}$. 因此局部紧 Hausdroff 空间是全正则的.

证明 用 $E:=\{r_1=0, r_2=1, r_3, r_4,\cdots\}$表示[0, 1]中的有理数全体, 用归纳法来构造 K 的开邻域族 $\{G(r)\mid r\in E\}$ 使之满足:

(1) $\forall\, r\in E$ 且 $r<1$ 则 $G(r)$是相对紧的;

(2) $\forall\, r,s\in E$ 且 $r<s$, 则$\overline{G(r)}\subset G(s)$. (2.1)

首先, 令 $G(r_2)=X\setminus F$. 由上一定理, 存在相对紧的开集$G(r_1)$使得 $K\subset G(r_1)\subset\overline{G(r_1)}\subset G(r_2)$. 故开集族$\{G(r_1), G(r_2)\}$满足条件(2.1).

假定对 $k\geq 2$ 已构造好满足条件(2.1)的、K 的开邻域族

$$\{G(r_i)\mid i=1,2,\cdots,k\}.$$

令

$$r_m:=\max\{r_i\mid r_i<r_{k+1}, i=1,2,\cdots,k\};$$
$$r_n:=\min\{r_i\mid r_i>r_{k+1}, i=1,2,\cdots,k\},$$

则 $r_m<r_n$, $m, n\leq k$. 由假定 $G(r_m)$是相对紧的且$\overline{G(r_m)}\subset G(r_n)$, 由上一定理, 存在相对紧的开集 $G(r_{k+1})$满足

$$\overline{G(r_m)}\subset G(r_{k+1})\subset\overline{G(r_{k+1})}\subset G(r_n).$$

于是得到所要的开邻域族. 令

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{r\in E\mid x\in G(r)\}, & x\in X\setminus F,\\ 1 & ,x\in F.\end{cases}$$

于是, f 取值于[0, 1], $f(F)=\{1\}$. 又, 当 $x\in K$ 时, $f(x)=\inf E=$

0.

注意到对任意实数 $a, b, a<b$, 区间(a, b)关于 f 的原像

$$\{x \mid f(x) \in (a, b) \cap [0, 1]\}$$
$$= \cup\{G(r) \mid E \ni r > a\} \setminus \cap\{\overline{G(r)} \mid E \ni r \geq b\}$$

是 X 中的开集, 而 $\boldsymbol{R}$ 中开区间全体是一个拓扑基, 因此[0, 1]的所有相对开集在 g 下的原像是开集, 故 $g \in C(X)$.

特取 K 为单点集$\{x\}$, 结论当然成立, 这说明 X 是全正则的. □

定理 1-2-9 (Tietze 延拓定理) 设 K 为局部紧 Hausdorff 空间的紧集, g 是从 K 到实区间 $[c, d]$ 的连续函数, 则存在从 X 到 $[c, d]$ 的连续函数 g 使得 $g|_K = g$ (即 $g(x) = f(x), x \in K$).

证明 为叙述简单不妨设$[c, d] = [-a, a], a > 0$. 注意到 X 的紧集是闭集, K 的闭子集

$$E:=\{x \in K \mid -a \leq f(x) \leq -a/3\} \text{ 与}$$
$$F:=\{x \in K \mid a/3 \leq f(x) \leq a\}$$

是 X 中两个不相交的紧集. 据 Urysobn 引理, 存在 $h \in C(X)$, 满足 $h(X) = [0, 1]$ 且 $h(E) = \{0\}, h(F) = \{1\}$. 令

$$g_1(x) := 2a\,(h(x) - 1/2)/3,\ x \in X,$$

则 $g_1 \in C(X), |g_1(x)| < a/3, x \in X$ 且

$$|g_1(x) - f(x)| \leq 2a/3, \quad x \in K.$$

可用归纳法证明, 对任意自然数 m, 存在$\{g_i \mid i = 1, \cdots, m\} \subset C(X)$满足

$$|g_i(x)| \leq (a/3)(2/3)^{i-1}, \qquad x \in X, \quad i = 1, \ldots, m;$$
$$\left|\sum_{i=1}^{m} g_i(x) - f(x)\right| \leq (2/3)^m a, \qquad x \in K. \qquad (2.2)$$

事实上, 假定对某个自然数 m 上式成立, 用

$$f_m := f - \left(\sum_{i=1}^{m} g_i(x)\right)|_K$$

代替上述的 f, 用$(2/3)^m a$ 代替 a, 知存在 $g_{m+1} \in C(X)$满足

$$|g_{m+1}(x)| \le (a/3)(2/3)^m, \qquad x \in X,$$
$$|g_{m+1}(x) - f_m(x)| = |\sum_{i=1}^{m+1} g_i(x) - f(x)| \le (2/3)^{m+1}a, \quad x \in K.$$
故归纳法成立.

由于函数项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ 以 $\sum_{i=1}^{\infty} (a/3)(2/3)^{i-1} = a$ 为控制级数, 知其在 X 上一致收敛于一个连续函数 g 且$|g| \le a$；又由 (2.2) 式知，在 K 上有 $g = f$. □

定理 1-2-10 (单点紧数化定理) 设 $(X, \mathcal{T})$ 是非紧的, 局部紧的 Hausdorff 空间, 记一个不属于 X 的元素为 ∞, 令 $X^* := X \cup \{\infty\}$, 则集族 $\mathcal{T}^* := \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus K \mid K$ 为 X 的紧子集$\}$ 是 X^*上的一个拓扑, $(X^*, \mathcal{T}^*)$是紧的 Hausdorff 空间且它在 X 的引出拓扑为 $\mathcal{T}$, X 在 X^*中处处稠密. 称$(X^*, \mathcal{T}^*)$ 为 $(X, \mathcal{T})$ 的 (Alexandroff) **单点紧致化**.

证明 首先注意到 Hausdorff 空间 X 的紧子集 K 为闭集，且 $\forall\, G \in \mathcal{T}, G \setminus K \in \mathcal{T}$.

1) 先证 $\mathcal{T}^*$为 X^*上的拓扑. 显然$\varnothing \in \mathcal{T}^*$, $X^* \in \mathcal{T}^*$. 下设 $U, G \in \mathcal{T}^*$. 若 $U, G \in \mathcal{T}$, 则 $U \cap G \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$; 若 $U \in \mathcal{T}$而 $G \notin \mathcal{T}$, 则存在 X 的紧子集 K 使得 $G = X^* \setminus K$, 从而
$$U \cap G = U \cap (X^* \setminus K) = U \setminus K \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*;$$
若 $U \notin \mathcal{T}$且 $G \notin \mathcal{T}$, 则有 X 的紧子集 K, C 使得 $U = X^* \setminus K$, $G = X^* \setminus K$,于是 $U \cap G = (X^* \setminus K) \cap (X^* \setminus C) = X^* \setminus (K \cup C) \in \mathcal{T}^*$, 这因为 $K \cup C$ 是 X 的紧子集.

若 $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^*$, 要证 $\cup\mathcal{S} \in \mathcal{T}^*$. 当 $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, 显然 $\cup\mathcal{S} \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$; 若 $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \varnothing$, 因为任意个紧集的交是紧集的闭子集, 仍是紧的, 故 $\cup\mathcal{S}$ 仍可表示成 $X^* \setminus K$ 的形式;当 $\mathcal{S}$ 不是 $\mathcal{T}$ 的子集且 $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \ne \varnothing$时,$V_1 := \cup(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \in \mathcal{T}$, $V_2 := \cup(\mathcal{S} \setminus \mathcal{T})$可表示为 $X^* \setminus K$ 的形式, $\cup\mathcal{S} = V_1 \cup V_2 = X^* \setminus (K \setminus V_1)$, 因 $K \setminus V_1$, 仍为 X 的紧子集, 故 $\cup\mathcal{S} \in \mathcal{T}^*$.

2) 再证 $\mathcal{T}^*$ 在 X 的引出拓扑是 $\mathcal{T}$. 因 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}^*$. 只须证对每个 $G\in\mathcal{T}^*$ 有 $X\cap G\in\mathcal{T}$. 当 $G\in\mathcal{T}$ 时，显然成立. 当 $G\in\mathcal{T}^*\setminus\mathcal{T}$ 时，存在 X 的紧集 K 使得 $G=X^*\setminus K$，于是 $X\cap G=X\setminus K\in\mathcal{T}$.

3) 现证 $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 是紧空间. 设 $\mathcal{O}$ 是 X^* 的一个开覆盖族，那么其中至少有一个 $G\in\mathcal{T}^*\setminus\mathcal{T}$. 对于 G 有 X 的紧子集 K 使得 $G=X\setminus K$，因 K 在 X^* 中仍为紧集, $\mathcal{O}$ 也是 K 的一个开覆盖族，故存在有限子族 $\mathcal{O}_1$ 覆盖 K，从而 $\mathcal{O}$ 的有限子族 $\mathcal{O}_1\cup\{G\}$ 覆盖了 X^*.

4) 下证 $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 是 Hausdorff 空间. 因 X 是 Hausdorff 空间且 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}^*$，对 X 中任何不同的两点，在 X，从而在 X^* 中有不相交的邻域. 若 $x\in X$, $y:=\infty$, 则由定理 1-2-5，x 有一个紧邻域 $W\subset X$, 而 $X^*\setminus W$ 是 ∞ 的邻域, 显然 W 与 $X^*\setminus W$ 不相交.

最后证 X 在 X^* 中稠密. $\forall x\in X^*$, 设 $G\in\mathcal{T}^*$ 使得 $x\in G$. 若 $G\in\mathcal{T}$，则 $x\in G\subset X$，即 $G\cap X\neq\varnothing$；若 $G\notin\mathcal{T}$，则存在 X 的紧子集 K 使得 $G=X^*\setminus K$，因为 X 非紧，故 $X\neq K$，从而

$$G\cap X=X\setminus K\neq\varnothing. \qquad \square$$

4. σ紧

定义 拓扑空间 X 的一个子集 E 称为 **σ紧的**, 若存在 X 的紧子集列 $\{K_i\}$ 使得 $E=\cup_i K_i$. 特当 X 是σ紧时, 称 X 为 **σ紧空间**.

因有限个紧集的并为紧集, 故在定义中可假定 $\{K_i\}$ 是单调增的紧集列.

当 X 是第二可数的、局部紧的 Hausdorff 空间时, X 是σ紧的, 而且由定理 1-2-6, 存在相对紧的开集列 $\{X_i\}$, 使得 $X_i\subset\overline{X_i}\subset X_{i+1}$, $i=1,2,\cdots$ 且 $X=\cup_i X_i$. 例如 $X:=\boldsymbol{R}^N$ 或它的开子空间, 就是这种空间. 特当 X 是区域时, 可以要求上述每个 X_i 是相对紧的区域.

§1.3 乘积、度量化与Baire拓扑

1. 乘积拓扑空间

定义 设$I\neq\varnothing$，$\{A_i\mid i\in I\}$为一族集. 那么，集

$$A:=\Pi_{i\in I}A_i=\{a\mid a=\{a_i\mid i\in I\},a_i\in A_i,i\in I\}$$

称为$\{A_i\mid i\in I\}$的**乘积集**，A_i称为A的第i个坐标集；a_i称为A中元素a的第i个坐标；A到第j个坐标集A_j的映射

$$\mathrm{p}_j:\ a\mapsto a_j$$

称为从A到第j个坐标集的**投影**.

当I为有限集$\{1,2,\cdots,n\}$时，乘积集常记作

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n.$$

容易看到，当且仅当每个$A_i\neq\varnothing$时，有$A\neq\varnothing$.

定义 设$\{X_i\mid i\in I\}$一族拓扑空间，令

$$\boldsymbol{S}:=\{\mathrm{p}_i^{-1}(V_i)\mid V_i\text{为}X_i\text{ 的开集},i\in I\},$$

那么$\boldsymbol{S}$是$X:=\Pi_{i\in I}X_i$的子集族且$\cup\boldsymbol{S}=X$，从而据定理1-1-3，X上有唯一的拓扑τ以$\boldsymbol{S}$为子基，称此拓扑τ为X上的**乘积拓扑**. (X,τ)称为这一族拓扑空间的**乘积拓扑空间**.

定理1-3-1 当I为有限集时，设$I=\{1,2,\cdots,n\}$时，乘积空间X上的乘积拓扑τ以下面集族为基

$$\mathcal{B}:=\{V_1\times V_2\times\cdots\times V_n\mid V_i\text{ 是 }X_i\text{ 的开集},i=1,2,\cdots,n\}.\ \square$$

定理1-3-2 (1) 拓扑空间族$\{X_i\mid i\in I\}$的乘积拓扑空间X到每一坐标空间X_i的投影都是连续的开映射(即p_i把X中的开集映成X_i中的开集).

(2) 设f是从拓扑空间Y到乘积拓扑空间X的映射，则f连续的充要条件是对每个$i\in I$，从Y到X_i的映射$\mathrm{p}_i\circ f$连续.$\square$

这两个定理都可直接从定义出发验证之. 下面定理的几个结论都很重要. 但限于篇幅, 下面有的定理未给出证明, 请读者自己练习证明或参考文献[29]或其它拓扑学教材.

定理 1-3-3 设 X 为拓扑空间族 $\{X_i \mid i \in I\}$ 的乘积拓扑空间, 则

(1) X 具有可数基当且仅当 I 中有一个可数子集 I_0 使得当 $i \in I_0$ 时, X_i 具可数基; 同时, 当 $i \in I \setminus I_0$ 时, X_i 为平庸空间 (即只有 $\varnothing$ 和 X_i 是开集) .

(2) X 为 Hausdorff 空间当且仅当每一个 X_i 为 Hausdorff 空间;

(3) X 为完全正则空间当且仅当每一个 X_i 为完全正则空间.

(4) (Tychonoff 定理) X 为紧的空间当且仅当每个坐标空间 X_i 是紧空间. □

例 当坐标集为可数集, 例如 $I=\{1,2,\cdots\}$, 且每个 $X_i=\boldsymbol{R}^1$ 时我们得到的乘积空间记作 $\boldsymbol{R}^\infty$; 当每个 $X_i=[0,1]$ ($\boldsymbol{R}^1$ 的闭区间)时, 记此乘积空间为 $[0,1]^\infty$. 它们都是具有可数基的、可度量化的拓扑空间, 是 Hausdorff 的, 也是完全正则的. $\boldsymbol{R}^\infty$ 非紧而 $[0,1]^\infty$ 是紧的.一般地, $[0,1]^I$ 表示乘积空间 $\Pi_{i\in I}[0,1]$, 并称之为立方体; 特别当 I 为有限集, 即当 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 时, 称为 n 维立方体.

定义 设 Y, Z 为拓扑空间, 一个从 Z 到 Y 的映射称为嵌入, 如果 $f(Z)$ 作为 Y 的子空间时, $f: Z\to f(Z)$ 为同胚; 如果存在一个嵌入 $f: Z\to Y$, 则说拓扑空间 Z 可嵌入到拓扑空间 Y 中.

定理 1-3-4 (嵌入定理) 拓扑空间 Z 为 Tychonoff 空间(即完全正则的 T_1 空间)当且仅当 Z 可以嵌入到某一个立方体去.□

2. 拓扑空间的度量化与度量空间的完备化

定义 一个拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 上若可以定义一个度量 d 使得

由 d 导出的拓扑（见 § 1 例 4） $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$, 则称 $(X, \mathcal{T})$ 可度量化.

定理 1-3-5 若 X 为 T_1 正则空间且有一个 σ 局部有限基 $\mathcal{B}$, 即 $\mathcal{B}$ 可表成可数个子族$\{\mathcal{B}_i\}$之并使得对每个 $\mathcal{B}_i$, X 的每一点都有一个邻域至多与 $\mathcal{B}_i$ 中的有限个成员相交, 则 X 可度量化. 特别, 当局部紧的 Hausdorff 空间有可数基时, 必可度量化.

定理 1-3-6 (Uryshon) 若 X 为 T_1 空间, 则下列命题等价:

(1) X 为正则空间且具有可数基;

(2) X 同胚于立方体$[0, 1]^\omega$ 的一个子空间;

(3) X 为可度量化且可分.

乘积空间与因子空间的度量化有如下关系:

定理 1-3-7 设 X 是拓扑空间族$\{X_i \mid i \in I\}$的乘积拓扑空间, 则 X 可度量化当且仅当其中有可数个因子空间是可度量化的, 而其余的因子空间都是单点集. □

例 可数个度量空间$\{(X_i, d_i) \mid i \in I\}$的乘积拓扑空间 X 是可度量化的. 事实上, 可定义 X 的度量 d 为: 对 X 中任意两点 $x := (x_i), y := (y_i)$,

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)},$$

则 X 的拓扑可由 d 导出.

特别, 可数个 $\boldsymbol{R}^1$ 的乘积拓扑空间 $\boldsymbol{R}^\omega$ 是可度量化的

定义

(1)度量空间(X, d)内的一个点列$\{x_i\}$称为 **Cauchy 列**, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $k \in \mathbf{N}$, 使得当 $i, j \in \mathbf{N}$, $i, j > k$ 时, 恒有 $d(x_i, x_j) < \varepsilon$.

(2)度量空间(X, d)称为**完备的**, 如果(X, d)中每个 Cauchy 列都收敛.

(3) 度量空间(X, d)与度量空间(X', d')称为**等距的**, 如果存在一个从 X 到 X' 的一对一满映射 f 使得

$$\forall x, y \in X, d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

定理 1-3-8 (完备化定理) 对每个度量空间(X, d), 都存在一个完备的度量空间$(\hat{X}, \hat{d})$ 使得有一个从 X 到 $\hat{X}$ 的映射φ满足: $\forall x, y \in X$, $\hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$, 并且$\varphi(X)$在$\hat{X}$中稠密. 如果把等距的空间看成同一个空间, 则满足上述条件的空间是唯一的, 称为(X, d)的**完备化空间**.

定义 一个度量空间称为**全有界的**, 如果对任意$\varepsilon > 0$, 都存在 X 中的有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得 $X \subset \cup_i B(x_i, \varepsilon)$.

度量空间的一个子集称为**全有界集**, 如果它作为子空间是全有界的.

显然, 全有界度量空间必有界, 但反之不然. 特殊的情形如, 对于 $\boldsymbol{R}^N$ 的子空间, 全有界等价于有界.

定理 1-3-9 (1) 全有界的度量空间必具有可数基.

(2) 设拓扑空间 X 可用度量 d 来度量化, 则 X 是紧空间的充要条件是(X, d)为完备的、全有界的度量空间. □

关于完备的度量空间(X, d), 下面两个重要定理颇为重要:

定理 1-3-10 (闭集套定理) 设$\{E_n\}$是一列单调减的, X 的非空有界闭集 ($E_n \subset E_{n-1}, n \in \mathbf{N}$). 若

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} E_n = 0,$$

则存在唯一的点 $x \in \cap_n E_n$. 这里 $\operatorname{diam} E$ 表示集 E 的直径, 即 $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in E\}$.

证明 方法完全类似于数学分析中的闭区间套定理. □

定理 1-3-11 (Baire 范畴定理) 设$\{A_n\}$是一列 X 的开子集, 其中每个 A_n ($n \in \mathbf{N}$) 都在 X 中稠密, 则 $A := \cap_n A_n$ 在 X 中稠密.

证明 可采用与下面定理 1-3-13 的证明类似的方法, 由上一定理推出 (留作练习). □

3. Baire 范畴集与 Baire 拓扑

R.Baire（1889 年）在证明上一定理的基础上将度量空间的子集分为两类(范畴)，现在这种分类法已推广到一般的拓扑空间.

定义 设 X 是一个拓扑空间. X 的一个子集 A 称为在 X 中**无处稠密的**，如果 A 的闭包的内部是空集，或等价地，A 的闭包的余集在 X 中稠密.

X 的子集 B 称为 X 中的**第一范畴集**（又称**贫集**），如果 B 可表成一列在 X 中无处稠密的子集的并； 若 B 不是第一范畴集，就称 B 为**第二范畴集**.

利用上述定义以及闭包与内部的运算关系，容易验证下面

定理 1-3-12 在拓扑空间 X 中，下面三条件等价：

(1) X 上任何一列在 X 中稠密的开集的交仍在 X 稠密；

(2) X 中的每一个第一范畴集的内部是空集；

(3) X 的每个非空开集是 X 中的第二范稠集.

定义 把满足上述三条件之一的拓扑空间称为 **Baire (拓扑)** 空间；相应的拓扑称为 **Baire 拓扑**.

定理 1-3-13 局部紧的 Hausdorff 空间 X 是一个 Baire 空间.

证明 设集列 $\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ 中每个 A_n 是开集且在 X 稠密，$A := \cap_n A_n$. 要证 A 也在 X 中稠密； 即对任意 X 的任意非空开子集 U，要证 $U \cap A$ 非空. 为此，选取开集 V_1 使得 $\overline{V_1}$ 为 $U \cap A_1$ 的紧子集. 然后用归纳法，对每个自然数 n，选取开集 V_n 使得 $\overline{V_n}$ 为 $V_{n-1} \cap A_n$ 的紧子集. 这种选取是可能的，因为每个 A_n 为开的稠密集. 因为集族 $\{\overline{V_n} \mid n \in \mathbf{N}\}$ 具有有限相交性质，并且 $\overline{V_1}$ 是紧的；注意到 Hausdorff 空间的紧子集是闭的，由定理 1-2-4 推出 $\cap_n \overline{V_n}$ 非空；并且由 $\overline{V_n} \subset U \cap A_n$ 可推出 $U \cap A$ 非空. □

在第六章将看到，调和空间中的细拓扑也是 Baire 拓扑.

§1.4 函数凸锥与连续函数空间

位势论研究的函数主要是半连续函数，因为超调和(包括上调和)函数都是下半连续函数；对超调和函数研究起重要作用的是连续位势构成的锥，这导致了函数锥这个概念的引入与有关性质的研究；而具紧支柱的连续函数是很有用的工具，它不仅可用以逼近半连续函数，而且测度与积分的研究也离不开它.

1. 凸锥与函数锥

定义 一个**凸锥**是如下一个集 $\mathbf{S}$，它赋予加法“+”:

$$\mathbf{S}\times\mathbf{S}\to\mathbf{S},\qquad (s,t)\to s+t$$

与正实数的数乘

$$[0,\infty)\times\mathbf{S},\qquad (\alpha,s)\to\alpha s$$

使得下面条件满足:

(1) $(\mathbf{S},+)$是一个可交换的半群并有一个零元, 记作 0；

(2) 加法与数乘满足分配律，即

$$\begin{aligned}
&\alpha(s+t)=\alpha s+\alpha t; && \alpha\in[0,\infty),\quad s,t\in\mathbf{S},\\
&(\alpha+\beta)s=\alpha s+\beta s; && \alpha,\beta\in[0,\infty),\quad s\in\mathbf{S},\\
&(\alpha\beta)s=\alpha(\beta s); && \alpha,\beta\in[0,\infty),\quad s\in\mathbf{S},\\
&1s=s, && s\in\mathbf{S}.
\end{aligned}$$

定义 若 Y 是一个线性空间, A 是 Y 的子集, 且 A 中任意两点 u,v 的联线

$$\{\alpha u+(1-\alpha)v\mid 0\le\alpha\le 1\}$$

都包含于 A, 则称 A 是一个**凸集**.

例 线性空间中的凸锥必为凸集.

设 X 是一个拓扑空间，$C(X)$是 X 上的连续的实函数全体，则 $C(X)$是实线性空间，$C(X)$与 $C^+(X)$都是一个凸锥；在下面第三段定义的、X 上的下半连续函数全体是一个凸锥.

定义 设 **S** 是由集 Y 上的一些数值函数构成的凸锥，若对 **S** 中任意两个元素 f 与 g，其下确界 $\inf\{f, g\}$也在 **S** 中，则称 **S** 是下稳定的；若对 **S** 中任意单调增加列$\{f_i\}$，其上确界函数 $\sup_i\{f_i\}$也是 **S** 的元素，就说 **S** 是 **σ稳定的或关于增加列稳定的.**

下面定义的函数锥是扫除空间位势论的一个很重要的基本概念和研究对象.

定义 设 X 是一个拓扑空间. **S** 是由 X 上的一些连续函数组成的凸锥，如满足下面三条件，则称为**函数锥.**

F1)存在严格正的元素 $s_0 \in \mathbf{S}^+$，即 $s_0 > 0$ 在 X 成立.

F2) $\mathbf{S}^+$是线性分离的，即对 X 上任何不同的两点 x, y，对任何实数$\alpha \geq 0$，总存在$f \in \mathbf{S}^+$ 使得$f(x) \neq \alpha f(y)$;

F3) **S** 是受 $\mathbf{S}^+$ 控制的，即对任意 $p \in \mathbf{S}$，存在 $g \in \mathbf{S}^+$使得

$$p \in o(g),$$

即 p (依下面的意义)受 g 所控制：对每个实数$\varepsilon > 0$，存在 X 的一个紧集 K 使得

$$|p(x)| \leq \varepsilon g(x), \qquad x \in X \setminus K.$$

令

$$C_0:=\{u \in C(X) \mid \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{紧集} K \text{使得} |u(x)| < \varepsilon \text{在} X \setminus K \text{成立}\}.$$

于是条件 F1 和 F3 表明，对每个 $p \in \mathbf{S}$，存在严格正的元素 $t \in \mathbf{S}^+$，使得 $p/t \in C_0(X)$.

容易证明，$C^+(X)$的一个子集 $\boldsymbol{P}$ 若是一个函数锥，则满足

F1*) 对每个 $x \in X$，存在 $p \in \boldsymbol{P}$ 使得 $p(x) > 0$.

F3*) 对每个 $p \in \boldsymbol{P}$，$\varepsilon > 0$ 及 $x \in X$，存在 $q \in \boldsymbol{P}$ 及紧集 K 使得 $q(x) < \varepsilon, p \leq q$ 在 $X \setminus K$ 上成立. 反之，若 $C^+(X)$的一个子集 $\boldsymbol{P}$ 是一个下稳定的凸锥且满足 F1*，F2 及 F3*，则

$$\boldsymbol{P}_\sigma := \{\sum_{i=1}^{\infty} p_i \in C(X) \mid \{p_i\} \subset \boldsymbol{P}\}$$

是 X 上的一个函数锥.

2. 线性赋范空间

定义 定义在线性空间 Y 上的实函数 p 若满足下面条件 (N1 ~ N4) 就称为 Y 上的一个范数:

(N1) $p(f) \geq 0$, $\forall f \in Y$;

(N2) $p(\alpha f) = |\alpha| p(f)$, $\forall f \in Y; \forall \alpha \in (-\infty, \infty)$;

(N3) $p(f+g) \leq p(f) + p(g)$, $\forall f, g \in Y$;

(N4) $p(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

这时 $p(f)$叫做f的范数, 通常记作$\|f\|$; $(X, \|\cdot\|)$ 称为一个**线性赋范空间**, 或简单地说, X 是一个**赋范空间**.

例 在 $\boldsymbol{R}^N$ 可定义范数为

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x^n},$$

关于这个范数成为一个赋范空间. 从第三章起, 我们用 $|x|$ 代替$\|x\|$.

在 X 上的有界连续函数全体 $C_b(X)$ 上,我们采用的所谓上确界范数, 即

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

易证, 这的确满足条件 N1-N4, 故 $C(X)$关于这范数成为一个赋范空间.

设$(X, \|\cdot\|)$是线性赋范空间,那么对任意 $x, y \in X$, 定义

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

易证 d 是 X 上的一个度量, 称为由**范数导出的度量**. 如果这个度空间(X, d)是完备的, 就说$(X, \|\cdot\|)$是一个 **Banach** 空间.

定理 1-4-1 设 X 为紧距离空间, 则 $C(X)$关于上确界范数

成为一个 Banach 空间.

证明 可见诸于一般的泛函分析教材.□

例, $C[a, b]$是一个 Banach 空间.

下面给出一个非常著名的定理, 其证明可见[34]等.

定理 1-4-2 (Stone-Weierstras 定理) 设 X 是紧距离空间, $\boldsymbol{E}$ 是 $C(X)$的一个闭的线性子空间, 满足:

(1) $f, g \in \boldsymbol{E} \Rightarrow fg \in \boldsymbol{E}$;

(2) 常值函数 $1 \in \boldsymbol{E}$,

那么 $\boldsymbol{E} = C(X)$的充要条件是 $\boldsymbol{E}$ 能区别 X 中的点; 即对 X 的不同两点 x, y 必有 $f \in \boldsymbol{E}$ 使得 $f(x) \neq f(y)$

推论 1-4-3 设 X 是紧距离空间, 则 $C(X)$是可分的.

例 对 $\boldsymbol{R}^1$ 的区间 $X:=[a, b]$, 则 $\boldsymbol{C}[a, b] := C([a, b])$ 是可分的, 实际上, $[a, b]$区间上的有理系数多项式全体是 $\boldsymbol{C}[a, b]$ 的可数稠密子集.

3. 半连续函数

定义 设$(X, \mathcal{T})$为拓扑空间, 称从 X 到 $(-\infty, \infty]$ 的函数 f 在 $x \in X$ 为**下半连续**, 如果对每个实数 $a < f(x)$, x 有一个开邻域 V 使得 $f(V) \subset (a, \infty]$. 若 f 在 X 的每一点都下半连续, 就说 f 在 X 为**下半连续**. 今后我们用到的下半连续函数都是假定不取 $-\infty$值的. 将 X 上的下半连续函数全体记作 $\Psi(X)$.

相应地, 若 $-f$ 在某一点 $x \in X$(或在 X)下半连续, 就说 f 在 x (或相应地, 在 X) 为**上半连续**.

例 对集 Y 的子集 E, 在 E 上每一点取值为 1、在 E 的余集的每一点取值为 0 的数称为 E 的**特征函数**, 记作 1_E. 拓扑空间 X 若存在非空的真开子集 V, 则 1_V 为 X 上的下半连续函数, $1_{X \setminus V}$

为上半连续函数. X 上的实函数为连续的充要条件是: f 既为上半连续又为下半连续.

易验证, 一个从 X 到 $(-\infty,\infty]$ 的函数为下半连续当且仅当对每个实数 t, $f^{-1}(t,\infty]$为 X 中开集. f在 $\xi\in X$下半连续等价于 $\liminf\limits_{x\to\xi} f(x) := \sup\limits_{V}(\inf\limits_{x\in V} f(x)) \geq f(\xi)$, 其中 V取遍 ξ的一个邻域基.

定义 对X上的数值函数f, 称集$\{x\in X \mid f(x)\neq 0\}$的闭包为 f 的**支柱**, 记作 $S(f)$. X 上那些支柱为紧集的连续函数全体记作 $\boldsymbol{K}(X)$.

定理 1-4-4 设 X 为拓扑空间, 下半连续函数全体记作 $\Psi(X)$. 则

1) 若$f\in\Psi(X)$, 实数 $a\geq 0$, 则 $af\in\Psi(X)$;

2) 若$f,g\in\Psi(X)$, 则$f+g\in\Psi(X)$;

3) 若$f,g\in\Psi(X)$, 则 $\inf\{f,g\}\in\Psi(X)$;

4) 若 $\varnothing\neq\Sigma\subset\Psi(X)$, 则 $\sup\{f \mid f\in\Sigma\}\in\Psi(X)$;

5) 若 $f\in\Psi(X)$, 则 f 在 X 的任何紧子集 C 上达到下确界; 从而, 在一个紧集外取正值的$f\in\Psi(X)$, 必有有限的下确界.

6) 若X为局部紧的Hausdorff空间,$f\in\Psi(X)$且在一个紧集外下有界, 则有

$$f=\sup\{\phi \mid \phi\in\boldsymbol{K}(X), \phi\leq f\}$$

证明 性质 1)~3)的证明较容易, 留作练习. 现证 4). 令 $g:=\sup\{f \mid f\in\Sigma\}$. 任取$x\in X$, 对每个实数$a<g(x)$, 由上确界的定义存在$f\in\Sigma$ 使得 $a<f(x)\leq g(x)$. 因f为下半连续, 故有 x 的邻域 V使得 $\forall y\in V, f(y)>a$. 由定义知 g 在 x 为下半连续; 由 x 的任意性知 $g\in\Psi(X)$.

再证 5). 令 $b:=\inf\{f(x) \mid x\in C\}$($C$ 为紧集). 那么, 必有 C 中的点列$\{x_j\}$使得$f(x_j)\to b$ $(j\to\infty)$. 因$\{x_j\}$是紧集 C 中的一个点列(网), 必有子列收敛于 $z\in C$, 为记号简单仍用$\{x_j\}$表示这个子

列. 下面证明 $\lim_j f(x_j)=f(z)$. 任取 $a<f(z)$, 因 f 在 z 下半连续, 故有邻域 V 使得当 $x\in V$ 时, $a<f(x)$; 另一方面由 $x_j\to z$ 知, 当 j 充分大时 $x_j\in V$, 从而 $f(x_j)>a$. 这说明

$$b=\lim f(x_j)\geq f(z)\geq b, \text{ 即 } b=f(z)>-\infty.$$

再证 6). 由 5)可假定存在实数 b 使得 $\inf f(x)>b$. 我们可证得更强的论, 即

$$f=\sup\{\ \phi\mid \phi\in \boldsymbol{K}(X), b<\phi\leq f\}.$$

事实上对任意 $z\in X$, 任取实数 a 使得 $b<a<f(z)$. 由 f 的下半连续性, 存在 z 的一个邻域 V 使得 $f(x)>a$, $\forall\, x\in V$. 据 Urysohn 引理(定理 1-2-8), 存在 $\phi\in \boldsymbol{K}(X)$ 使得

$$\phi(X)\subset[2^{-1}(a+b),a],\ \phi(z)=a,\ \text{且}\ \phi(X\setminus V)=\{0\}.$$

显然 $b<\phi\leq f$. 故由 a 的任意性知

$$f(z)=\sup\{\ \phi(z)\mid \phi\in \boldsymbol{K}(X), b<\phi\leq f\}.\quad \square$$

定义 对拓扑空间 X 上的一个函数 g, 我们用 $\hat{g}$ 表示 g 的**下半连续正则化**, 即

$$\hat{g}(x):=\liminf_{y\to x} g(y),\qquad x\in X.$$

$$=\sup_V(\inf\{\ f(y)|\,y\in V\}),$$

其中 V 取遍 x 的一个邻域基. 同时, 对拓扑空间 X 上的一个函数族 $\mathcal{F}$, 为了简化记号, 用 ^inf $\mathcal{F}$ 来表示 $\inf\mathcal{F}$ 的下半连续正则化.

下面考虑拓扑空间 X 具有可数基的情形.

引理 1-4-5 设 X 具有可数基, $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个下半连续函数族. 那么存在 $\mathcal{F}$ 的可数子族 $\mathcal{F}_1$ 使得 $\sup\mathcal{F}_1=\sup\mathcal{F}$.

证明 设 Q 为 $\boldsymbol{R}$ 中的有理数全体. 那么, 对每个 $r\in Q$, 存在可数子族 $\boldsymbol{G}_r\subset\mathcal{F}$ 使得

$$\cup\{f>r\,|\,f\in \boldsymbol{G}_r\}=\cup\{f>r\,|\,f\in\mathcal{F}\}$$

即 $\{x\in X\,|\,(\sup \boldsymbol{G}_r)(x)>r\}=\{x\in X\,|\,(\sup\mathcal{F})(x)>r\}$. 令

$$\mathcal{F}_1:=\cup\{\boldsymbol{G}_r\,|\,r\in Q\},$$

则 $\mathscr{F}_1$ 是可数族且对 $x \in X$, 当实数 $\alpha < (\sup\mathscr{F})(x)$ 时，必存在 $r \in Q$ 使得 $\alpha < r < (\sup\mathscr{F})(x)$, 从而

$$(\sup \mathscr{F}_1)(x) \geq (\sup G_r)(x) > r > \alpha.$$

因此 $\sup \mathscr{F}_1 = \sup \mathscr{F}$. □

利用这一引理，定理 1-4-4 中之（6）可改写为：

定理 1-4-6 设 X 为具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，$f \in \Psi(X)$ 且在一个紧集外下有界，则 $K(X)$中存在单调增加列$\{f_n\}$使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. □

定理 1-4-7 (Choquet) 设 X 是具有可数基的拓扑空间，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一族数值函数，那么存在 $\mathscr{F}$ 的一个可数子族 $\mathscr{F}_1$，使得

$$\hat{}\inf \mathscr{F}_1 = \hat{}\inf \mathscr{F}.$$

证明 用 $\mathscr{B}$ 表示 X 的一个可数基. 那么，对每个 $U \in \mathscr{B}$，存在一个可数族 $\mathscr{F}_U \subset \mathscr{F}$ 使得

$$\inf\{f(y) \mid y \in U, f \in \mathscr{F}\} = \inf\{f(y) \mid y \in U, f \in \mathscr{F}_U\}.$$

这样一来，$\mathscr{F}_1 := \cup\{\mathscr{F}_U \mid U \in \mathscr{B}\}$就满足要求. 为证明这一点，只须证

$$(\hat{}\inf \mathscr{F}_1)(x) \leq (\hat{}\inf \mathscr{F})(x), \qquad (*)$$

对每个满足$(\inf \mathscr{F}_1)(x) > -\infty$ 的 $x \in X$ 成立即可. 取定一个这样的 x，考虑任一个实数 a: $a < (\hat{}\inf \mathscr{F}_1)(x)$. 因为$\hat{}\inf \mathscr{F}_1$ 为下半连续，存在 $V \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in V$ 且对每个 $y \in V$ 有 $a < (\inf \mathscr{F}_1)(y)$，故

$$a \leq \inf\{f(y) \mid y \in V, f \in \mathscr{F}_V\} = \inf\{f(y) \mid y \in V, f \in \mathscr{F}\}$$

这说明 $a \leq \inf \mathscr{F}$ 在 V 上成立，故 $a \leq \hat{}\inf \mathscr{F}(x)$. 从而(*)成立. □

4. 紧支柱连续函数空间的可分性

设 X 是具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间. 那么

$$K(X) := \{f \mid f \text{ 在 } X \text{ 连续且具有紧支柱}\}$$

按 $C_b(X)$的范数$\|\cdot\|$（即上确界范数）成为一个线性赋范子空间. 而且容易证明，$\mathbf{K}(X)\times\mathbf{K}(X)$ 到 $[0,\infty)$的映射 d: $d(f,g):=\|f-g\|$, 是 $\mathbf{K}(X)$上的一个度量且$(\mathbf{K}(X), d)$是一个完备的度量空间，而且作为拓扑空间是可分的. 更准确地，我们有

定理 1-4-8 在$(\mathbf{K}(X), d)$中存在一个可数稠密子集 $\mathscr{F}$, 使得对任何 $g\in\mathbf{K}(X)$以及任何实数 $\varepsilon>0$, 存在$f\in\mathscr{F}$满足：f 的支柱包含于 g 的支柱之中且 $d(f,g)<\varepsilon$.

证明 用$\mathscr{B}$表示 X 的一个可数基. 对任意 $U, V\in\mathscr{B}, \overline{U}\subset V$, 用$f_{U,V}$ 表示 $\mathbf{K}^+(X)$的一个元素使得它的支柱包含于 V, 函数值不超过 1 且在 U 上的值点点为 1.

用$\mathscr{F}_1$表示具有形式$\sup\limits_{i\in I}\alpha_i f_{U_i,V_i}$的函数全体组成的集，使其中 I 是有限集，α_i是正有理数. 令$\mathscr{F}:=\mathscr{F}_1-\mathscr{F}_1$，那么$\mathscr{F}$是$\mathbf{K}$的可数子集且满足定理全部要求.

事实上，对 $g\in\mathbf{K}(X)$，只须就 $g\geq 0$ 的情形证之. 这时，令

$$g=\sup\mathscr{F}_g. \tag{4.2}$$

为此，只须就满足 $g(x)>0$ 的 $x\in X$ 证明之. 取一个正有理数 δ 使得 $\delta<g(x)$. 于是存在 $U, V\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in U$, U 的闭包是紧的且包含在 V, 并且在 V 上有 $g>\delta$, 那么函数 $\delta f_{U,V}\in\mathscr{F}_g$，故

$$(\sup\mathscr{F}_g)(x)\geq\delta.$$

因 δ是任意的，所以(4.2)成立. □

第二章　测度论选讲

测度论是位势论的重要研究工具，也是位势论的研究对象之一. 但位势论涉及的都是Radon测度或可以表为两个Radon测度之差的带号测度（又称广义测度），有时也考虑由广义测度构成的复测度，故本章将以Radon测度为中心介绍有关测度论知识.

§2.1　测度与带号（广义）测度

1. 环、代数、σ环、σ代数、Borel代数

设 $\boldsymbol{E}$ 为集 X 的一个非空子集族. 若 $\boldsymbol{E}$ 关于"有限并"运算封闭，即对任意 $A, B \in \boldsymbol{E}$ 有 $A \cup B \in \boldsymbol{E}$，且关于"差"运算封闭，即对任意 $A, B \in \boldsymbol{E}$ 有 $A \setminus B \in \boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{E}$ 是 X 上的一个环；若 X 也是环 $\boldsymbol{E}$ 的成员，则称 $\boldsymbol{E}$ 是 X 上的一个代数. 若环 (代数) $\boldsymbol{E}$ 关于"可列并" 运算也封闭，即对任意集列$\{A_i\} \subset \boldsymbol{E}$ 有 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{E}$ 是 X 上的一个 σ环 (代数).

显然，X 的子集全体 2^X 是 X 上的一个σ代数，它是包含 X 上的任何 σ环的 σ代数. X 上的一族 σ环 (代数) 的交仍然是一个 σ环 (代数). 对 X的子集族 $\boldsymbol{F}$，所有包含 $\boldsymbol{F}$ 的 σ环 (或 σ代数) 的交就是包含子集族 $\boldsymbol{F}$ 的最小 σ环 (或相应地，σ代数)，称为由 $\boldsymbol{F}$ 张 (生) 成的 σ环(代数).

把这里的 σ环 (σ代数) 换成环 (代数)，情形也一样，把

包含子集族 $\boldsymbol{F}$ 的最小环 (代数)，称为由 $\boldsymbol{F}$ 张(生)成的环(代数).

例 把一维欧氏空间 $\boldsymbol{R}$ 上所有左开右闭区间 $(a, b]$ 组成的集记作 $\boldsymbol{F}$，那么，$\boldsymbol{F}$ 张成的 σ 代数就是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Borel 代数，记作 $\mathbf{B}(\boldsymbol{R})$；它也可以是由 $\boldsymbol{R}$ 上的开集全体 $\boldsymbol{T}$ 张成.

一般地，设$(X, \boldsymbol{T})$是一个局部紧的拓扑空间，把拓扑 $\boldsymbol{T}$ 张成的 σ 代数称为 **Borel 代数**，记作 $\mathbf{B}(X)$.

注 在 Halmos 的《测度论》[23]中，Borel 代数被定义为由紧集全体张成的 σ 环；在其它文献，也可找到别的定义，从内涵到形式都可能有所不同. 本书根据实际需要，采用 Hewitt E & Stromberg K [27] 的定义，与 Constantinescu C & Cornea A [10]一致，保证了下半连续函数的可测性.

2. 测度及其性质

设 $\boldsymbol{E}$ 为集 X上的环， 定义在 $\boldsymbol{E}$ 上的正数值函数(集函数) μ 若满足下面条件，就叫做 $\boldsymbol{E}$ 或 X 上的一个**测度**：

(1) $\mu(\varnothing)=0$;

(2)可数可加性：对任意其成员两两不交的集列$\{A_i\}\subset \boldsymbol{E}$，若 $\cup\{A_i\}\in \boldsymbol{E}$，则$\mu(\cup\{A_i\})=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.

若μ 是测度，对 $\boldsymbol{E}$ 的成员 A，$\mu(A)$称为 A 的测度(值). 若$\mu(A)=0$，就称 A 为**零测集**.

例 在 2^X 上定义集函数ε_x如下：对 X 中取定的点 x 及 X 的子集 A，当 $x\in A$ 时，$\varepsilon_x(A)=1$；当 $x\notin A$ 时，$\varepsilon_x(A)=0$. 那么ε_x是 2^X 上的测度，称为 **Dirac 测度或单位质点**.

为了介绍测度的性质，先说明几个记号.

对数列$\{a_i\}\subset[-\infty, \infty]$，令

$$\text{l-lim}\, a_i := \liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty}(\inf\{a_k \mid k\ge i\});$$

$$\text{u-lim}\, a_i := \limsup_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} (\sup\{ a_k \mid k \geq i \});$$

$$\lim a_i = \lim_i a_i := \lim_{i\to\infty} a_i .$$

对 X 的子集列 $\{ A_i \}$,

$\text{l-lim}\, A_i := \{ x \mid$ 只有有限个 A_i 使得 $x \notin A_i \}$;

$\text{u-lim}\, A_i := \{ x \mid$ 有无限个 A_i 使得 $x \in A_i \}$.

显然 $\text{l-lim}\, A_i \subset \text{u-lim}\, A_i$, 当等号成立时, 记作 $\lim A_i$ 或 $\lim_i A_i$.

称集列 $\{ A_i \}$ 是单调增的, 如果 $A_i \subset A_{i+1}$, 对任意 $i \in \mathbf{N}$ 成立.

称集列 $\{ A_i \}$ 是单调减的, 如果 $A_i \supset A_{i+1}$, 对任意 $i \in \mathbf{N}$ 成立.

定理 2-1-1 设 μ 为环 $\boldsymbol{E}$ 上的测度, 下列 $A_i \in \boldsymbol{E}, i \in \mathbf{N}$. 则下面性质成立:

(1)有限可加性: 若 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, 则

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2);$$

(2)单调性: 若 $A_1 \subset A_2$, 则 $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$;

(3)可减性: 若 $A_1 \subset A_2$ 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1);$$

(4)下半可数可加性: 若 $A = \cup_i A_i \in \boldsymbol{E}$, 则 $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$;

(5)下连续性: 设集列 $\{ A_i \}$ 是单调增的, 且 $A = \cup_i A_i \in \boldsymbol{E}$, 则

$$\lim \mu(A_i) = \mu(A);$$

(6)上连续性: 设集列 $\{A_i\}$ 是单调减的, 且 $A := \cap_i A_i \in \boldsymbol{E}$, 并且有 $\mu(A_1) < \infty$, 则 $\lim \mu(A_i) = \mu(A)$;

若 $\boldsymbol{E}$ 同时是 σ 环, 则还有下面性质:

(7) $\mu(\text{l-lim}\, A_i) \leq \text{l-lim}\, \mu(A_i)$;

(8)若 $\mu(\cup_i A_i) < \infty$, 则 $\mu(\text{u-lim}\, A_i) \geq \text{u-lim}\, \mu(A_i)$;

(9)连续性: 若 $\lim A_i$ 存在且 $\mu(\cup_i A_i) < \infty$, 则

$$\mu(\lim A_i) = \lim \mu(A_i);$$

(10)若 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$, 则 $\mu(\text{u-lim}\, A_i) = 0$.

证明 性质(1) ~ (6)的证明较简单, 留给读者. 现证性质(7).

注意到 $\text{l-lim}\, A_i = \cup_k B_k$，其中每个 $B_k = \cap_{i\geq k} A_i$，故 $\text{l-lim}\, A_i \in \boldsymbol{E}$. 由于 $B_k \subset A_k$ 且 $\{B_k\}$是单调增的，可由性质(5)与(2)得出：

$$\mu(\lim A_i) = \mu(\cup_{k\geq 1} B_k) = \lim \mu(B_i) \leq \text{l-lim}\, \mu(A_i).$$

再证性质(8). 因 $\text{u-lim}\, A_i = \cap_k C_k$，其中 $C_k := \cup_{i\geq k} A_i$，$\{C_k\}$是单调减集列且 $C_k \supset A_k$，故 $\text{u-lim}\, A_i \in \boldsymbol{E}$ 且由假定 $\mu(\cup_i A_i) < \infty$ 知 $\mu(C_1) < \infty$，应用性质 (6) 得：

$$\mu(\text{u-lim}\, A_i) = \mu(\cap_k C_k) = \lim \mu(C_i) \geq \text{u-lim}\, \mu(A_i).$$

性质(9)由性质(7)与(8)推出.

下证性质(10). 由(8)的证明知 $\text{u-lim}\, A_i \subset \cup_{i\geq k} A_i$，由单调性及下半可数可加性得，

$$\mu(\text{u-lim}\, A_i) \leq \mu(\cup_{i\geq k} A_i) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu(A_i)$$

对任意自然数 k 成立；由条件，右边是收敛级数的余项，故当 $k \to \infty$ 时收敛于 0. □

3. 带（符）号测度及其分解

定义 设 Σ 是集 X 上的一个 σ 代数，就说(X, Σ)是一个可测空间. Σ的元素叫可测集.（注意：这时并不涉及某个测度.）

对一个可测空间 (X, Σ)，称 ν为 X（或Σ）上的带号测度或广义测度，如果ν是从 Σ到 $(-\infty, \infty]$ 或从 Σ到 $[-\infty, \infty)$ 的（集）函数且满足可数可加性及 $\nu(\varnothing) = 0$.

下面取定可测空间 (X, Σ) 及Σ上的一个带号测度 ν.

定义 设$A, B \subset X$，称A为关于ν **正定的**，如果对任何$E \in \Sigma$有 $A \cap E \in \Sigma$且 $\nu(A \cap E) \geq 0$；称 B 为关于ν **负定的**，若对任何 $E \in \Sigma$ 有 $B \cap E \in \Sigma$ 且$\nu(B \cap E) \leq 0$.

据定义，$\varnothing$ 既是正定集，又是负定集.

定理 2-1-2 (Hahn 分解定理) 存在关于ν的正定集A与负定

集 B 满足: $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=X$.

证明 不妨设 ν 取值于 $(-\infty,\infty]$. 注意到两个负定集的差及可数个负定集的并仍为负定集，令

$$b:=\inf\{\nu(B)\mid B\text{ 为可测的负定集}\}.$$

取可测的负定集列 $\{B_i\}$ 使得 $\nu(B_i)\to b\quad(i\to\infty)$. 记 $B:=\cup_i B_i$，则 B 是可测负定集且 $\nu(B)=b>-\infty$.

下证 $A:=X\setminus B$ 为正定集. 否则，A 有可测子集 E_0 使得 $\nu(E_0)<0$. 显然，E_0 不是负定集（否则, $B\cup E_0$ 为负定集且 $\nu(B\cup E)=\nu(B)+\nu(E)<b$, 与 b 的定义矛盾）. 于是 E_0 有可测子集 F, 使得 $\nu(F)>0$. 记

$$k_1:=\min\{k\mid k\in\mathbf{N}\text{ 且 }E_0\text{ 有可测子集 }G\text{ 使得}\nu(G)\geq 1/k\}.$$

故对 k_1 有 E_0 的可测子集 E_1 使得 $\nu(E_1)\geq 1/k_1$. 由于

$$\nu(E_0\setminus E_1)=\nu(E_0)-\nu(E_1)\leq\nu(E_0)-1/k_1,$$

可用 $E_0\setminus E_1$ 代替 E_0 来重复上述讨论并得到可测集 E_2 使得

$$\nu(E_2)\geq 1/k_2\quad,k_2\geq k_1\quad\text{且}$$

$$\nu((E_0\setminus E_1)\setminus E_2)\leq\nu(E_0\setminus E_1)-1/k_1<0.$$

用归纳法可得到一列可测集 $\{E_i\}$ 满足: 对任意 $i,j\in\mathbf{N}$ 成立:

$$E_i\subset E_0,\quad E_i\cap E_j=\varnothing\quad(i\neq j),\quad\nu(E_i)\geq 1/k_i,\quad k_i\leq k_{i+1}.$$

令 $E:=\cup_i E_i$. 可以肯定, $\lim_i(1/k_i)=0$. 否则, 推出

$$\nu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i)\geq\sum_{i=1}^{\infty}(1/k_i)=\infty.$$

但 $E\subset E_0$, $\nu(E_0)<0$，由 $\nu(E_0)=\nu(E)+\nu(E_0\setminus E)$ 将导出

$$\nu(E_0\setminus E)=-\infty,$$

这与 ν 不取 $-\infty$ 值的假定矛盾.

由 $\lim k_i=\infty$ 知, $E_0\setminus E$ 的每个可测子集 F 满足 $\nu(F)\leq 0$ (否则，存在自然数 k' 使得 $\nu(F)>1/k'$, $k'\geq$ 每个 k_i，这是不可能的). 从而 $E_0\setminus E$ 为负定集. 但 $\nu(E_0\setminus E)<\nu(E_0)<0$ 且 $(E_0\setminus E)\cap B=\varnothing$, 推出 $B\cup(E_0\setminus E)$ 是负定集且 $\nu(B\cup(E_0\setminus E))<b$, 矛盾. □

定义 对 Hahn 分解中的正定集 A 与负定集 B, 令

$$\nu^+(F) := \nu(F \cap A), \qquad \nu^-(F) := -\nu(F \cap B),$$
$$|\nu|(F) := \nu^+(F) + \nu^-(F), \qquad F \in \Sigma,$$

分别称 ν^+, ν^-, $|\nu|$ 为 ν 的**正变差, 负变差和全变差**.

定理 2-2-3 (Jordan 分解定理) 带号测度 ν 的正变差、负变差和全变差都是 Σ 上的测度, 且对每个 $F \in \Sigma$ 有

$$\nu(F) = \nu^+(F) - \nu^-(F) \ .$$

进一步, ν^- 与 ν^+ 中至少有一个不取 ∞ 值.

证明 显然. □

定义 对可测空间(X, Σ), Σ 上的带号测度 ν 若满足: $\forall F \in \Sigma$ 有 $|\nu(F)| < \infty$, 则说 ν 是 **(全) 有限的**. 如果 $\forall F \in \Sigma$, 存在集列$\{F_i\} \subset \Sigma$ 满足: 每个$|\nu(F_i)| < \infty$且 $F \subset \cup_i F_i$, 则称 ν 为**(全) σ 有限的**.

易验证, ν 为有限 (σ有限) 当且仅当 ν^+, ν^-与$|\nu|$都是有限 (相应地, σ 有限) 的.

对环 $\boldsymbol{E}$ 上的测度的有限及 σ 有限性也同此定义.

§2.2 外测度

1. 外测度的概念

定义 非空集 X 的一个 σ 环 $\boldsymbol{H} \subset 2^X$ 称为**可传的**, 如果 $\boldsymbol{H}$ 中任何元素的任何子集也是 $\boldsymbol{H}$ 的元素.

例如, 2^X 本身就是一个可传 σ 环.

定义 在 X 的一个可传 σ 环 $\boldsymbol{H}$ 上的正数值(集)函数 μ 若满足下面三条件则称为 Caratheodory **外测度**:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(2)单调性: 若 $A, B \in \boldsymbol{H}$ 且 $A \subset B$, 则 $\mu(A) \le \mu(B)$;

(3)下半可数可加性: 对任何集列 $\{A_i\} \subset \boldsymbol{H}$ 有

$$\mu(\cup_i A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

外测度尽管本身作用不大, 但它是研究测度的重要工具之一.

2. 由环上的测度引出的外测度

引理 2-2-1 设 $\boldsymbol{E}$ 是 X 上的环, 则

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}) := \{ F \subset X \mid \text{存在}\{F_i\} \subset \boldsymbol{E} \text{使得} F \subset \cup_i F_i \}$$

是包含 $\boldsymbol{E}$ 的最小可传 σ 环.

证明 显然 $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$ 且当 $F \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$时, F 的任何子集也属于 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$, 即 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$是可传的. 再证它是 σ 环. 首先, 若 $F_1, F_2 \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$, $F_1 \setminus F_2$ 是 F_1 的子集, 从而属于 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$. 设$\{F_i\} \subset \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$, 据定义, 每个 F_i 对应一列$\{F_{ij}\}_{j\in\mathbf{N}} \subset \boldsymbol{E}$ 使得 $F_i \subset \cup_j F_{ij}$, 从而有

$$\{ F_{ij} \mid i \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{N}\} \subset \boldsymbol{E}$$

使得

$$\cup_i F_i \subset \cup_i \cup_j F_{ij},$$

故 $\cup_i F_i \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$. 以上说明 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$是包含 $\boldsymbol{E}$ 的可传 σ 环. 若 $\boldsymbol{H}_1$ 也是 X 上的包含 $\boldsymbol{E}$ 的可传 σ 环, 设 $G \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$, 那么有$\{G_i\} \subset \boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{H}_1$, 使得$G \subset \cup_i G_i$, 因$\boldsymbol{H}_1$是 σ 环, 故 $\cup_i G_i \in \boldsymbol{H}_1$; 因为$\boldsymbol{H}_1$是可传的, 故 $G \in \boldsymbol{H}_1$. 从而 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}) \subset \boldsymbol{H}_1$. 故 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$ 即为所求. □

定理 2-2-2 设 μ 是环 $\boldsymbol{E}$ 上的测度. 对每个 $F \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$, 令

$$\mu^*(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \mid \{F_i\} \subset \boldsymbol{E} \text{ 且 } F \subset \cup_i F_i\} \tag{2.1}$$

则 μ^* 是 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$上的外测度, 称为**由** μ 引出的外测度. μ^* 在 $\boldsymbol{E}$ 上的限制就是 μ 本身; 若 μ 是σ有限的, 则 μ^* 也是σ有限的.

证明 μ^* 的正性由μ 的正性推出. 单调性也是显然的. 下

面证：若 $F\in \boldsymbol{E}$，则 $\mu^*(F)=\mu(F)$. 事实上，若集列$\{F_i\}\subset \boldsymbol{E}$且 $F\subset\cup_i F_i$，由测度的下半可数可加性知

$$\mu(F)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(F_i),$$

由(2.1)式知 $\mu(F)\le\mu^*(F)$. 另一方面，若令 $G_1:=F$, $G_i=\varnothing$, $i\ge 2$, 则集列$\{G_i\}\subset\boldsymbol{E}$且 $F\subset\cup_i G_i$，并有 $\mu(F)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(G_i)$，这说明 $\mu(F)\ge\mu^*(F)$. 从而 $\mu^*(F)=\mu(F)$. 特别，因 $\varnothing\in\boldsymbol{E}$，故

$$\mu^*(\varnothing)=\mu(\varnothing)=0.$$

再证下半可数可加性. 设$\{F_i\}\subset \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$，若有某个 F_i 使得 $\mu^*(F_i)=\infty$，那么显然有

$$\mu^*(\cup_i F_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(F_i) \tag{2.2}$$

即下半可数可加性成立. 下设每个$\mu^*(F_i)<\infty$. 任取实数 $\varepsilon>0$，那么对每个 i，由(2.1)式知有集列$\{F_{ij}\mid j=1,2,\cdots\}$使得

$$F_i\subset\cup_j F_{ij} \quad 且 \quad \sum_{j=1}^{\infty}\mu(F_{ij})\le\mu^*(F_i)+\frac{\varepsilon}{2^i},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(F_{ij})\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(F_i)+\varepsilon.$$

另一方面，因 $\cup_i\cup_j F_{ij}\supset\cup_i F_i$，故有

$$\mu^*(\cup_i F_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(F_{ij})\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(F_i)+\varepsilon.$$

由ε的任意性推出(2.2)式.

最后，设 μ 是 σ 有限的，$F\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$. 由 (2.1) 式 $\boldsymbol{E}$ 知有集列$\{F_i\}$其并包含了 F. 因 μ 是 σ 有限的，对每个 F_i 有 $\boldsymbol{E}$ 中的集列 $\{F_{ij}\mid j\in\mathbf{N}\}$ 使得

$$F_i\subset\cup_j F_{ij} \qquad 且 \qquad \mu(F_{ij})<\infty.$$

从而 $F\subset\cup_i\cup_j F_{ij}$ 且$\mu^*(F_{ij})=\mu(F_{ij})<\infty$. 故$\mu^*$是 σ 有限的.□

3. 关于外测度 ξ 的可测集

定义 设 ξ 为 X 的可传 σ 环 $\boldsymbol{H}$ 上的外测度, $A\in\boldsymbol{H}$ 称为是

ξ 可测的，如果对每个 $T\in \boldsymbol{H}$ 都有

$$\xi(T)=\xi(T\cap A)+\xi(T\setminus A). \tag{2.3}$$

用 $\boldsymbol{\Sigma}_\xi$ 表示 ξ 可测集全体所成之集.

定理 2-2-3 若 $A\in \boldsymbol{H}$ 且 $\xi(A)=0$，则 A 为 ξ 可测集且对每个 $T\in \boldsymbol{H}$ 有，$\xi(T)=\xi(T\setminus A)$.

证明 设 $T\in \boldsymbol{H}$，那么 $\xi(T\cap A)=0$. 这是因为 $T\cap A\subset A$ 且 ξ 具有单调性. 于是由下式得出结论:

$$\xi(T)\le\xi(T\cap A)+\xi(T\setminus A)=\xi(T\setminus A)\le\xi(T). \ \square$$

定理 2-2-4 设 $A\in \boldsymbol{H}$ 是 ξ 可测的，若 $Y=\cup \boldsymbol{H}\in \boldsymbol{H}$，则 $Y\setminus A$ 也是 ξ 可测的.

证明 $\forall\, T\in \boldsymbol{H}$,

$$\xi(T)=\xi(T\cap A)+\xi(T\setminus A))=\xi(T\setminus(Y\setminus A))+\xi(T\cap(Y\setminus A)).$$

这说明 $Y\setminus A$ 满足(2.3)式. $\square$

定理 2-2-5 设 ξ 可测集列 $\{A_i\}$ 中的元素两两不交，则 $\forall T\in \boldsymbol{H}$ 有

$$\xi(T)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi(T\cap A_i)+\xi(T\setminus\cup_{i=1}^{\infty}A_i) \tag{2.4}$$

证明 由外测度的下半可数可加性，上式左边 $\le$ 右边. 当 $\xi(T)=\infty$，则(2.4)成立. 下设 $\xi(T)<\infty$. 先证对任何自然数 $k\ge 1$ 有

$$\xi(T)=\sum_{i=1}^{k}\xi(T\cap A_i)+\xi(T\setminus\cup_{i=1}^{k}A_i). \tag{2.5}$$

显然，当 $k=1$ 时 (2.5) 式成立，这是由于 A_1 为 ξ 可测，(2.3)式当用 A_1 代替 A 时成立. 归纳假设对某个 $k\ge 1$ 有(2.5)式. 用 $T\setminus A_{k+1}$ 代替 (2.5) 式中的 T 得

$$\xi(T\setminus A_{k+1})=\sum_{i=1}^{k}\xi[(T\setminus A_{k+1})\cap A_i]+\xi[(T\setminus A_{k+1})\setminus\cup_{i=1}^{k}A_i)]. \tag{2.6}$$

因为 $\{A_i\}$ 两两不交，故对每个 $i\ne k+1$ 显然有 $A_i\subset(X\setminus A_{k+1})$，从而

$$(T\setminus A_{k+1})\cap A_i=T\cap A_i.$$

因 A_{k+1} 为 ξ 可测，由 (2.3) 及 (2.6) 式得

$$\xi(T)=\xi(T\cap A_{k+1})+\xi(T\setminus A_{k+1})$$
$$=\sum_{i=1}^{k+1}\xi(T\cap A_i)+\xi(T\setminus\cup_{i=1}^{k+1}A_i).$$

即 (2.5) 对 $k+1$ 成立.

此外, 数列 $\{\xi(T\setminus\cup_{i=1}^{k}A_i)\mid k\in\mathbf{N}\}$是单调减少的且以

$$\xi(T\setminus\cup_{i=1}^{\infty}A_i)$$

为下界. 由(2.5)式,

$$\xi(T)\geq\lim_k\sum_{i=1}^{k}\xi(T\cap A_i)+\xi(T\setminus\cup_{i=1}^{\infty}A_i).$$

从而
$$\xi(T)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\xi(T\cap A_i)+\xi(T\setminus\cup_{i=1}^{\infty}A_i).$$

故(2.4)式成立. □

定理 2-2-6 若 A, B 为ξ可测, 则 $A\setminus B$ 也是ξ可测的.

证明 任取 $T\in\boldsymbol{H}$, 令 $C:=T\cap(A\setminus B), D:=T\setminus(A\setminus B)$, 我们要证

$$\xi(T)=\xi(C)+\xi(D).$$

因为 $D=(D\cap B)\cup(D\setminus B)$, 而 B 是 ξ 可测的, 故

$$\xi(C)+\xi(D)=\xi(C)+\xi(D\cap B)+\xi(D\setminus B). \tag{2.7}$$

又因 $C\subset A, D\setminus B\subset X\setminus A$, 而 A 是 ξ 可测的, 故

$$\xi(C)+\xi(D\cap B)+\xi(D\setminus B)=\xi(C\cup(D\setminus B))+\xi(D\cap B); \tag{2.8}$$

又因 $C\cup(D\setminus B)\subset X\setminus B, D\cap B\subset B$, 由 B 的 ξ 可测性知

$$\xi(C\cup(D\setminus B))+\xi(D\cap B)=\xi(C\cup(D\setminus B)\cup(D\cap B))$$
$$=\xi(D\cup C). \tag{2.9}$$

联合(2.7),(2.8)及(2.9)得

$$\xi(C)+\xi(D)=\xi(D\cup C)=\xi(T).\ \square$$

定理 2-2-7 ξ 可测集全体 $\boldsymbol{\Sigma}_\xi$ 是 X 上的一个 σ 环. 且 ξ 限制在 $\boldsymbol{\Sigma}_\xi$ 是一个测度.

证明 先证 $\boldsymbol{\Sigma}_\xi$ 是 σ 环. 由定理 2-2-6, 只须再证它对可数并封闭. 设$\{A_i\}$是一列 ξ 可测集, 令

$$B_1:=A_1,\quad B_k:=A_k\setminus\cup_{i=1}^{k-1}A_i,\qquad\forall k\geq 2,$$

由定理 2-2-6，每个 B_k 是 ξ 可测的. 又 $\{B_k\}$ 中元素两两不交且

$$\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \cup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

由定理 2-2-5，对任何 $T \in \boldsymbol{H}$ 有

$$\xi(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(T \cap B_k) + \xi(T \setminus \cup_{k=1}^{\infty} B_k),$$

$$\geq \xi(T \cap (\cup_{k=1}^{\infty} B_k) + \xi(T \setminus \cup_{k=1}^{\infty} B_k)$$

这说明 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为 ξ 可测. 进而 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$ 是 σ 环.

设 $\{B_i\}$ 是一列两两不交的 ξ 可测集，用 T 表示其并集，代入 (2.4) 式得

$$\xi(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(T \cap B_i) + \xi(T \setminus T) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(B_i),$$

这表明 ξ 有可数可加性. 而 ξ 的单调性是已知的. 故 ξ 为 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$ 上的测度. □

定义 称 X 的环 $\boldsymbol{E}$ 上的一个测度 μ 是完备的，如果 $\boldsymbol{E}$ 中任何 μ 零 (测) 集 A (即 $\mu(A)=0$) 的任何子集也是 $\boldsymbol{E}$ 的元素.

定理 2-2-8 ξ 是 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$ 上的完备的测度.

证明 由定理 2-2-3 及 ξ 的单调性立即得到. □

4. 环上的测度的完备扩张

定理 2-2-9 设 μ 是 X 的环 $\boldsymbol{E}$ 上的测度，$\Sigma(\boldsymbol{E})$ 是 $\boldsymbol{E}$ 张成的 σ 环，则 μ 必可延拓 (扩张) 成一个包含 $\Sigma(\boldsymbol{E})$ 的 σ 环上的完备测度.

证明 由定理 2-2-2, μ 可在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$ 上引出一个外测度 μ^* 使得 μ^* 限制在 $\boldsymbol{E}$ 上为 μ. 由定理 2-2-7, μ^* 可测集全体 $\boldsymbol{E}^* := \boldsymbol{\Sigma}_{\mu^*}$ 是一个 σ 环. 那么 $\boldsymbol{E}^* \supset \boldsymbol{E}$. 事实上，若 $F \in \boldsymbol{E}, T \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E})$ 且 $\mu^*(T) < \infty$，则由 μ^* 的定义, $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\{F_i\} \subset \boldsymbol{E}$ 使得 $T \subset \cup_{i=1}^{\infty} F_i$ 且

$$\mu^*(T) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} [\mu(F_i \cap F) + \mu(F_i \setminus F)]$$

$$\geq \mu^*(T \setminus F) + \mu^*(T \cap F)$$

这就说明了 F 是 μ^* 可测的. 于是 $\boldsymbol{E}^*$ 包含了 $\boldsymbol{E}$ 张成的 σ 环. 由定理 2-2-8, μ^* 在 $\boldsymbol{E}^*$上是完备的测度. □

注 通常把 μ^* 可测集称为 μ **可测集**, μ^* 在 $\boldsymbol{E}^*$ 上的限制仍记作 μ.

对 X 的子集族 $\boldsymbol{P}$, 用 $\boldsymbol{P}_\sigma$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 中元素的可数并全体, $\boldsymbol{P}_\delta$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 中元素的可数交全体. $\boldsymbol{P}_{\sigma\delta} := (\boldsymbol{P}_\sigma)_\delta$. 在拓扑空间中, 若一个子集 E 可以表示成一列开集的交, 则称 E 为 $\mathbf{G}_\delta$ **型集**, $X \setminus E$ 为 $\mathbf{F}_\sigma$ **型集**, 后者是一列闭集的并.

推论 2-2-10 设 $A \in \boldsymbol{E}^*$, $\mu(A) < \infty$. 则

(1) $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $B \in \boldsymbol{E}_\sigma$ 使得 $A \subset B$ 且 $\mu(B \setminus A) < \varepsilon$;

(2) 存在 $C \in \boldsymbol{E}_{\sigma\delta}$ 满足 $A \subset C$ 且 $\mu(C \setminus A) = 0$.

证明 因 $A \in \boldsymbol{E}^*$, $\mu^*(A) = \mu(A)$, 由(2.1)式, 对任意 $k \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{E}$ 中有集列 $\{A_{kj}\}_{j\in\mathbf{N}}$ 复盖了 A 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{kj}) < \mu(A) + 1/k.$$

任取一个充分大的 k 使得 $1/k < \varepsilon$. 令

$$B := \cup_{j=1}^{\infty} A_{kj};$$

又令

$$C := \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} A_{kj},$$

则 B, C 满足所要的条件. □

§ 2.3 Radon 测度与上积分

以下设 X 为局部紧的 Hausdorff 空间; 如前所述, $\boldsymbol{K}(X)$是 X 上具有紧支柱的连续函数全体.

1. $K(X)$上的正线性泛函 ι

定义 $K(X)$上的实函数 ι 若满足下面三个条件，则称为正线性泛函:

1)可加性: $\iota(f+g)=\iota(f)+\iota(g)$, $\forall f, g \in K(X)$;

2)齐次性: $\iota(\alpha f)=\alpha\,\iota(f)$, $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}, \forall f \in K(X)$;

3)正性: $\iota(f) \geq 0$, $\forall f \in K^{+}(X)$.

例 将 ι 看成实区间$[a, b]$上求 Riemann 积分的运算，它是$K([a, b])$上的正线性泛函.

由 1)～3)可推出 ι 满足：当$f, g \in K(X)$, $f \leq g$ 时必有$\iota(f) \leq \iota(g)$; 特别，$|\iota(f)| \leq \iota(|f|)$.

在 $K(X)$上考虑上确界范数，即$\|\cdot\|$: $\|f\| = \sup_{x \in X}|f(x)|$.

引理 2-3-1 设 C 为 X 的紧子集，则存在仅与 C 有关的实常数 k 满足：对每个$f \in K(X)$，若f在 $X \setminus C$ 取值恒为 0，则有

$$|\iota(f)| \leq k\,\|f\|.$$

证明 据定理 1-2-6，存在相对紧开集 $V \supset C$. 据 Urysohn 引理,存在$\varphi \in K^{+}(X)$ 使得$\varphi(X) \subset [0, 1]$, $\varphi(C)=\{1\}$, $\varphi(X \setminus V)=\{0\}$. 设$f \in K(X)$且在 $X \setminus C$ 取值为 0，则

$$f(x)=f(x) \cdot \varphi(x), \qquad x \in X.$$

于是

$$|f| \leq \|f\|\,\varphi, \quad |\iota(f)| \leq \iota(|f|) \leq \iota(\|f\|\,\varphi)=\|f\|\,\iota(\varphi).$$

令 $k := \iota(\varphi)$，那么 k 即为所求. □

引理 2-3-2 设$\varnothing \neq \Gamma \subset K^{+}(X)$且对任何$f, g \in \Gamma$，存在 $h \in \Gamma$ 使得$h \leq f$ 且$h \leq g$ (即Γ是下定向族). 且$\forall\, x \in X$, $\inf\{f(x) \mid f \in \Gamma\}=0$，则

$$\inf\{\iota(f) \mid f \in \Gamma\}=0 \quad , \tag{3.1}$$

且对每个$\varepsilon > 0$，存在$f_{\varepsilon} \in \Gamma$ 使得 $\|f_{\varepsilon}\| < \varepsilon$.

证明　取定 $\varepsilon>0$ 及 $f\in\Gamma$，用 A 表示集 $\{x\in X\mid f(x)>0\}$ 的闭包. 因为 $f\in \boldsymbol{K}^{+}(X)$，故 $A=S(f)$. 从而 A 为紧集. 对每个 $g\in\Gamma$，令 $A_g:=\{x\in A\mid g(x)\geq\varepsilon\}$，则 $\{A_g\mid g\in\Gamma\}$ 是紧空间 A 的一个闭子集族. 由定理条件,

$$\cap\{A_g\mid g\in\Gamma\}=\varnothing.$$

由定理 1-2-4, 这个闭集族不具有有限相交性质, 从而有 Γ 的子族 $\{g_1,\cdots,g_m\}$ 使得

$$A_{g_1}\cap\cdots\cap A_{g_m}=\varnothing.$$

又因 Γ 是下定向的, 故存在 $f_\varepsilon\in\Gamma$ 使得 $f_\varepsilon\leq\min\{f,g_1,\cdots,g_m\}$. 显然 $\|f_\varepsilon\|<\varepsilon$.

据上一引理, 存在仅与紧集 A 有关的常数 k, 使得

$$|\iota(g)|\leq k\|g\|$$

对所有在 A 的余集取 0 值的 $g\in\boldsymbol{K}(X)$ 成立. 因为 f_ε 就是这样的函数, 故 $0\leq\iota(f_\varepsilon)\leq k\|f_\varepsilon\|<k\varepsilon$. 因 ε 是任意的, 故(3.1)式成立. □

2. ι 在 Ψ 上的延拓 I

用 Ψ 表示 X 上的、在一个紧集外取正值的下半连续函数全体, 对 $g\in\Psi$, 定义

$$\mathrm{I}(g):=\sup\{\iota(\varphi)\mid\varphi\in\boldsymbol{K}(X),\varphi\leq g\}.$$

注意到 $\mathrm{I}(g)$ 可能为 ∞, 但对每个 $g\in\Psi$, 由定理 1-4-4 的性质 6) 知, $\mathrm{I}(g)$ 总有意义.

定理 2-3-3　Ψ 上的泛函 I 满足下面性质:

1)延拓性: $\forall f\in\boldsymbol{K}(X),\mathrm{I}(f)=\iota(f)$;

2)单调性: 若 $g_1,g_2\in\Psi$ 且 $g_1\leq g_2$, 则 $\mathrm{I}(g_1)\leq\mathrm{I}(g_2)$;

3)正齐性: $\forall g\in\Psi$, $\forall$实数 $\alpha\geq0$, 有 $\mathrm{I}(\alpha g)=\alpha\,\mathrm{I}(g)$.

证明　可由 ι 的性质及 I 的定义直接推出.□

由下面定理，我们还将看到，I 在Ψ具有有限与任意可加性.

定理 2-3-4 设 Γ 是 Ψ 的非空子族且对于 $g_1, g_2 \in \Gamma$，存在 $g_3 \in \Gamma$使得 $g_3 \geq g_1$ 且 $g_3 \geq g_2$（即该函数族为上定向族），则

$$\mathrm{I}(\sup \Gamma) = \sup\{ \mathrm{I}(g) \mid g \in \Gamma \}.$$

证明 设 $g_0 := \sup \Gamma = \sup\{g(x) \mid g \in \Gamma\}, x \in X$. 由定理 1-4-4 之 4)， $g_0 \in \Psi$. 下分两步证之.

1) 当$\{ g_0 \} \cup \Gamma \subset \boldsymbol{K}(X)$，则

$$\{ g_0 - g \mid g \in \Gamma\}$$

是下定向族且$\forall\, x \in X$,

$$\begin{aligned}\inf \{ g_0(x) - g(x) \mid g \in \Gamma\} &= g_0(x) - \sup\{ g(x) \mid g \in \Gamma\} \\ &= g_0(x) - g_0(x) = 0 .\end{aligned}$$

据引理 2-3-2 知，

$$\begin{aligned}0 = \inf \{\iota (g_0 - g) \mid g \in \Gamma \} &= \inf\{ \iota (g_0) - \iota (g) \mid g \in \Gamma \} \\ &= \iota (g_0) - \sup\{\iota (g) \mid g \in \Gamma \}.\end{aligned}$$

即 $\mathrm{I}(g_0) = \iota (g_0) = \sup\{ \iota (g) \mid g \in \Gamma\} = \sup\{\mathrm{I}(g) \mid g \in \Gamma\}$.

2) 对一般情形，$\{g_0\} \cup \Gamma \subset \Psi$. 因 $g \leq g_0, g \in \Gamma$，故

$$\sup\{\mathrm{I}(g) \mid g \in \Gamma\} \leq \mathrm{I}(g_0).$$

下证反向不等式. 令 $\boldsymbol{D} := \{ f \in \boldsymbol{K}(X) \mid$ 存在$g \in \Gamma$使得$f \leq g\}$. 由定理 1-4-4 之 6)，

$$g_0 = \sup\{ g \mid g \in \Gamma \} = \sup\{\sup\{ f \in \boldsymbol{K}(X) \mid f \leq g\} \mid g \in \Gamma\} = \sup \boldsymbol{D} .$$

任取一个实数 $\alpha < \mathrm{I}(g_0)$，由 I 的定义知，存在 $\varphi \in \boldsymbol{K}(X)$使得

$$\varphi \leq g_0 \text{ 且 } \mathrm{I}(\varphi) > \alpha .$$

于是

$$\varphi = \min\{ \varphi, g_0\} = \min\{ \varphi , \sup \boldsymbol{D}\} = \sup\{\min\{ \varphi, f \} \mid f \in \boldsymbol{D} \};$$

把族 $\{\min\{ \varphi, f\} \mid f \in \boldsymbol{D} \}$看成第 1 步中的 Γ 并用 φ 代替第一步的 g_0，就得到

$$\begin{aligned}\alpha < \iota (\varphi) &= \sup\{ \iota (\min\{\varphi, f\} \mid f \in \boldsymbol{D} \} \\ &\leq \sup\{ \iota (f) \mid f \in \boldsymbol{D} \}\end{aligned}$$

$$\leq \sup\{ \mathrm{I}(g) \mid g \in \Gamma\}.$$

因 α 是任意的, 故 $\mathrm{I}(g_0) \leq \sup\{ \mathrm{I}(g) \mid g \in \Gamma\}$.□

推论 2-3-5 若$\{g_i\} \subset \Psi$ 且 $g_i \leq g_{i+1}$, $i = 1,2,\cdots$, 则

$$\lim \mathrm{I}(g_i) = \mathrm{I}(\lim g_i). \quad \square$$

推论 2-3-6（有限可加性） 对 $g_1, g_2,\cdots, g_m \in \Psi$ 有

$$\mathrm{I}(g_1+\cdots+g_m) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{I}(g_i).$$

证明 易验证

$$g_1 + g_2 = \sup\{\varphi_1 + \varphi_2 \mid \varphi_i \in \boldsymbol{K}(X) \text{ 且 } \varphi_i \leq g_i, i=1,2\}.$$

因而

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(g_1 + g_2) &= \sup\{\iota(\varphi_1) + \iota(\varphi_2) \mid \varphi_i \in \boldsymbol{K}(X) \text{且} \varphi_i \leq g_i, i=1,2\} \\ &= \sup\{\iota(\varphi_1) \mid \varphi_1 \in \boldsymbol{K}(X) \text{且} \varphi_1 \leq g_1\} \\ &\quad + \sup\{\iota(\varphi_2) \mid \varphi_2 \in \boldsymbol{K}(X) \text{且} \varphi_2 \leq g_2\} \\ &= \mathrm{I}(g_1) + \mathrm{I}(g_2).\end{aligned}$$

对 m 个函数的情形可用归纳法证之.□

推论 2-3-7（任意可加性） 对任何非空族 $\Gamma \subset \Psi^+$有

$$\mathrm{I}\left(\sum_{g\in\Gamma} g\right) = \sum_{g\in\Gamma} \mathrm{I}(g).$$

这里 $\sum_{g\in\Gamma} g$ 定义为:

$$\left(\sum_{g\in\Gamma} g\right)(x) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} g_i(x) \mid g_i \in \Gamma, i=1,2,\cdots,m; m \in \mathbf{N}\right\};$$

同样

$$\sum_{g\in\Gamma} \mathrm{I}(g) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{I}(g_i) \mid g_i \in \Gamma, i = 1,2,\cdots,m; m \in \mathbf{N}\right\}.$$

证明 若 Γ为有限族, 可由推论 2-3-6 得出; 若 Γ为无限族, 可由定理 2-3-4 及推论 2-3-6 推出.□

3. 对任意函数的上积分

对 X 上的任意数值函数 u, 令

$$\mathrm{I}^*(u) := \inf\{\mathrm{I}(g) \mid g \in \Psi, g \geq u\}$$

并称之为 u 的上积分或由 I 引出的上积分. u 的下积分定义为

$$\mathrm{I}_*(u) := -\mathrm{I}^*(-u).$$

定理 2-3-8 上积分 I^* 有下列性质:

1)延拓性: 对 Ψ 中的函数 g, 有 $\mathrm{I}^*(g) = \mathrm{I}(g)$;

2)单调性: 对两个函数 u, v, 若 $u \le v$ 则 $\mathrm{I}^*(u) \le \mathrm{I}^*(v)$;

3)下半正齐性: 对任意函数 u 和正实数α有

$$\mathrm{I}^*(\alpha u) \le \alpha\, \mathrm{I}^*(u);$$

4)下半可加性: 对任意函数 u, v, 有 $\mathrm{I}^*(u+v) \le \mathrm{I}^*(u) + \mathrm{I}^*(v)$.

证明 由 I^*的定义及 I 的性质直接推出.□

定理 2-3-9 (广义 Levi 定理) 设$\{u_i\}$为 X 上的一列单调增加函数列使得 $\mathrm{I}^*(u_1) > -\infty$, 则 $\mathrm{I}^*(\lim u_i) = \lim \mathrm{I}^*(u_i)$.

证明 设 $u := \lim u_i$, 由单调性知

$$\mathrm{I}^*(u_i) \le \lim \mathrm{I}^*(u_i) \le \mathrm{I}^*(u).$$

故只须再证

$$\lim_i \mathrm{I}^*(u_i) \ge \mathrm{I}^*(u).$$

若左边为 ∞, 则结论已得证.因此，下设

$$\lim \mathrm{I}^*(u_i) < \infty.$$

任取$\varepsilon > 0$. 对每个自然数 i, 取 $g_i \in \Psi$使它满足: $g_i \ge u_i$且

$$\mathrm{I}(g_i) < \mathrm{I}^*(u_i) + \varepsilon/2^{i+1} \tag{3.2}$$

令 $w_i := \max\{g_1, \cdots, g_i\}$, $i \in \mathbf{N}$, 则$\{w_i\}$为 Ψ 中的一个单调增函数列.由推论 2-3-5 得

$$\lim_i \mathrm{I}(w_i) = \mathrm{I}(\lim_i w_i). \tag{3.3}$$

因 $w_i \ge g_i \ge u_i$, $i = 1, 2, \ldots$, 故 $\lim_i w_i \ge \lim_i u_i = u$, 从而

$$\mathrm{I}(\lim_i w_i) \ge \mathrm{I}^*(u) \tag{3.4}$$

另一方面, 由 $\min\{w_i, g_{i+1}\} \in \Psi$ 及

$$w_{i+1} + \min\{w_i, g_{i+1}\} = w_i + g_{i+1},$$

据推论 2-3-6 得,

$$\mathrm{I}(w_{i+1}) + \mathrm{I}(\min\{w_i, g_{i+1}\}) = \mathrm{I}(w_i) + \mathrm{I}(g_{i+1}).$$

因 $g_{i+1} \geq u_{i+1} \geq u_i$, $w_i \geq g_i \geq u_i$ 知 $\min\{w_i, g_{i+1}\} \geq u_i$, 从而

$$\mathrm{I}(\min\{w_i, g_{i+1}\}) \geq \mathrm{I}^*(u_i) \geq \mathrm{I}^*(u_1) > -\infty .$$

$$\mathrm{I}(w_{i+1}) = \mathrm{I}(w_i) + \mathrm{I}(g_{i+1}) - \mathrm{I}(\min\{w_i, g_{i+1}\})$$
$$\leq \mathrm{I}(w_i) + \mathrm{I}(g_{i+1}) - \mathrm{I}^*(u_i),$$
$$\mathrm{I}(w_{i+1}) < \mathrm{I}(w_i) + \mathrm{I}^*(u_{i+1}) - \mathrm{I}^*(u_i) + \varepsilon / 2^{i+1} .$$

上面最后一式用到了(3.2). 两边关于 i 从 1 到 k 求和得

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{I}(w_{i+1}) < \sum_{i=1}^{k} \mathrm{I}(w_i) + \mathrm{I}^*(u_{k+1}) - \mathrm{I}^*(u_1) + \varepsilon / 2;$$
$$\mathrm{I}(w_{k+1}) < [\mathrm{I}(w_1) - \mathrm{I}^*(u_1)] + \mathrm{I}^*(u_{k+1}) + \varepsilon / 2;$$
$$\mathrm{I}(w_{k+1}) < \mathrm{I}^*(u_{k+1}) + \varepsilon, \qquad k = 0,1,2,3,\cdots$$

最后一式是因为 $w_1 = g_1$ 及(3.2)式. 由上式及(3.3), (3.4)式得

$$\lim_i \mathrm{I}^*(u_i) + \varepsilon \geq \lim_i \mathrm{I}(w_i) \geq \mathrm{I}^*(u).$$

由 ε 的任意性知所要的不等式成立. □

本定理是推论 2-3-5 在 I^* 中的推广, 但定理 2-3-4 及推论 2-3-7 中的 I 改成 I^* 时, 结论一般不成立.

推论 2-3-10 设$\{u_i\}$为一列正函数,则

$$\mathrm{I}^*(\sum_{i=1}^{\infty} u_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{I}^*(u_i).$$

证明 $\forall\ i \in \mathbf{N}$, 令 $v_i := u_1 + \cdots + u_i$, 则$\{v_i\}$为单调增函数列, 由上一定理,

$$\mathrm{I}^*(\sum_{i=1}^{\infty} u_i) = \mathrm{I}^*(\lim_i v_i) = \lim_i \mathrm{I}^*(v_i)$$
$$= \lim_i \mathrm{I}^*(\sum_{j=1}^{i} u_j)$$
$$\leq \lim_i \sum_{j=1}^{i} \mathrm{I}^*(u_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{I}^*(u_i) . \ \square$$

4. 由 I（或 ι）导出的外测度

定理 2-3-11 对 X 的子集 A 的特征函数 1_A, 令

$$\lambda(A) := \mathrm{I}^*(1_A),$$

则 $\lambda := \lambda_{\mathrm{I}}$ 是 2^X 上的外测度, 称为**由 I 或 ι 导出的外测度**.

证明 显然,由 I^* 的性质及特征函数的定义立即推出 λ 满足正性，单调性且 $\lambda(\varnothing)=0$. 再证 λ 满足下半可数可加性. 设集列$\{A_i\}\subset 2^X$，注意到 $1_A\leq\sum_{i=1}^{\infty}1_{Ai}$，这里 $A:=\cup_{i=1}^{\infty}A_i$，其中 A_i 作为下标时表示为 Ai(以下同此）. 由推论 2-3-10 得

$$\lambda(A)=\mathrm{I}^*(1_A)\leq\mathrm{I}^*(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}1_{Ai})$$
$$\leq\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{I}^*(1_{Ai})=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(A_i).$$

故 λ 为外测度. □

例 在 $\boldsymbol{R}^1$ 上，把 s 看成是对 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{R}^1)$中的函数求 Riemann 积分的泛函，则由 s 导出的外测度 λ 就是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的 Lebesgue 外测度. 这时对 $\boldsymbol{R}^1$ 上任一列两两不交的开区间$\{(a_i,b_i)\}$，有

$$\lambda(\cup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i))=\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(a_i,b_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i).$$

一般地，我们有

定理 2-3-12 设 $\mathcal{O}$ 是 X 是一族两两不交的开集，则 $\lambda(\cup\mathcal{O})=\sum_{U\in\mathcal{O}}\lambda(U)$. 当 $\mathcal{O}$ 为无限集时，求和的定义见推论 2-3-7.

证明 令 $G=\cup\mathcal{O}$，因为 $1_U\in\Psi^+$ 对任何开集 U 成立且由 $\mathcal{O}$ 中元素两两不交知，$1_G=\sum_{U\in\mathcal{O}}1_U$，应用推论 2-3-7 得

$$\lambda(G)=\mathrm{I}(1_G)=\textstyle\sum_{U\in\mathcal{O}}\mathrm{I}(1_U)=\sum_{U\in\mathcal{O}}\lambda(U).\ \square$$

定理 2-3-13 (外正则性) 对任意 $A\subset X$ 有，

$$\lambda(A)=\inf\{\lambda(G)\mid G\text{ 为包含 }A\text{ 的开集}\}.$$

证明 若 $\lambda(A)=\infty$，因为 G 是包含 A 的开集，由单调性知结论为真. 下设 $\lambda(A)<\infty$. 对任意实数$\varepsilon>0$，取实数 δ 满足

$$0<\delta<\varepsilon/(1+\varepsilon+\lambda(A)).$$

由 $\mathrm{I}^*(1_A)$的定义知，存在 $g\in\Psi^+$ 满足:

$$g\geq 1_A\text{ 且 }\mathrm{I}(g)-\delta<\mathrm{I}^*(1_A)=\lambda(A).$$

令 $G:=\{x\in X\mid g(x)>1-\delta\}$，由 g 的下半连续性知 G 为开集，显然 $G\supset A$. 对 $x\in G$，有

$$(1-\delta)^{-1}g(x)>1,$$

故$(1-\delta)^{-1}g > 1_G$，从而

$$\lambda(G) = \mathrm{I}(1_G) \le \mathrm{I}((1-\delta)^{-1}g) = (1-\delta)^{-1}\mathrm{I}(g)$$
$$< (1-\delta)^{-1}(\lambda(A)+\delta)$$
$$< \varepsilon + \lambda(A).$$ □

定理 2-3-14 (内正则性)　设 U 为 X 的开集，则

$$\lambda(U) = \sup\{\lambda(C) \mid C \text{ 为 } U \text{ 的紧子集}\}$$
$$= \sup\{\lambda(V) \mid \overline{V} \text{ 紧}, V \text{ 开且 } \overline{V} \subset U\}.$$

证明　任取实数 $b < \lambda(U)$，因 $1_U \in \Psi^+$，由 I 的定义知，

$$\mathrm{I}(1_U) = \sup\{\mathrm{I}(\varphi) \mid \varphi \in \boldsymbol{K}^+(X), \varphi \le 1_U\},$$

故存在 $\varphi \in \boldsymbol{K}(X)$ 满足

$$b < \mathrm{I}(\varphi) \le \lambda(U).$$

对每个自然数 i，定义

$$C_i := \{x \mid \varphi(x) \ge 1/i\}, \qquad V_i := \{x \mid \varphi(x) > 1/i\},$$

那末 C_i, $\overline{V_i}$ 是紧集 $S(\varphi)$的闭子集，从而是紧集；V 是开集. 令 $G := \{x \mid \varphi(x) > 0\}$，则

$$G = \cup_{i=1}^{\infty} C_i = \cup_{i=1}^{\infty} V_i = \cup_{i=1}^{\infty} \overline{V_i},$$

且$\{C_i\}$,$\{V_i\}$都是单调增加的集列，故有

$$\lim_i 1_{C_i} = \lim_i 1_{V_i} = \lim_i 1_{\overline{V_i}} = 1_G.$$

应用定理 2-3-9　得

$$b < \mathrm{I}(\varphi) \le \mathrm{I}(1_G) = \lim_i \mathrm{I}^*(1_{C_i}) = \lim_i \mathrm{I}(1_{V_i})$$
$$= \lim_i \lambda(C_i) = \lim_i \lambda(V_i),$$

由 b 的任意性知命题成立.□

定理 2-3-15　若 $A \subset X$ 且 $\overline{A}$ 为紧集，则 $0 \le \lambda(A) < \infty$.

证明　据定理 1-2-6，存在相对紧开集 U 使得 $\overline{A} \subset U$. 由 Urysohn 引理，存在$\varphi \in \boldsymbol{K}^+(X)$, $\varphi(\overline{A}) = \{1\}$, $\varphi(X \setminus U) = \{0\}$，于是

$$1_A \le 1_{\overline{A}} \le \varphi,$$

$$\lambda(A) = \mathrm{I}^*(1_A) \leq \mathrm{I}(\varphi) < \infty. \quad \square$$

在 § 2.1 第 1 段已说过, 由 X 的拓扑 $\boldsymbol{T}$ 张成的 σ 代数 $\mathbf{B}(X)$ 称为 Borel 代数, 在 § 2.2 第 3 段讨论过关于外测度的可测集. 现在有

定理 2-3-16 X 的任何开集 U 都是 λ 可测集, 即对任何 $T \subset X$ 有

$$\lambda(T) = \lambda(T \cap U) + \lambda(T \setminus U), \tag{3.5}$$

从而 λ 可测集全体 $\Sigma_\lambda \supset \mathbf{B}(X)$. 同时, λ 是 Σ_λ 上的完备测度, 称为 X 上的 **Radon** 测度.

证明 由外测度的下半可加性知(3.5)左边 $\leq$ 右边. 为证反向不等式, 只须假定 $\lambda(T) < \infty$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由定理 2-3-13, 存在开集 $V \supset T$ 使得

$$\lambda(V) < \lambda(T) + \varepsilon/2,$$

同时有开集 $D \supset V \setminus U$ 使得$\lambda(D) < \lambda(V \setminus U) + \varepsilon/4$. 应用定理 2-3-14, 可选一相对紧开集 G 使得

$$\overline{G} \subset V \cap U \text{ 且 } \lambda(G) + \varepsilon/4 > \lambda(V \cap U).$$

令 $H := (V \cap D) \setminus \overline{G}$, 则 G 与 H 是不相交的开集. 因 $V \setminus U$ 同时是 V、D 及 $X \setminus \overline{G}$ 的子集, 故 $V \setminus U \subset H$, 从而

$$0 \leq \lambda(H) - \lambda(V \setminus U) \leq \lambda(D) - \lambda(V \setminus U) < \varepsilon/4.$$

进一步,

$$\begin{aligned}
&|\lambda(G) + \lambda(H) - (\lambda(V \cap U) + \lambda(V \setminus U)| \\
&\leq |\lambda(G) - \lambda(V \cap U| + |\lambda(H) - \lambda(V \setminus U)| \\
&< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

由此并注意到 G, H 是 V 的不相交的子集, 由定理 2-3-12 得

$$\begin{aligned}
\lambda(T) + \varepsilon &> \lambda(V) + \varepsilon/2 \geq \lambda(G \cup H) + \varepsilon/2 = \lambda(G) + \lambda(H) + \varepsilon/2 \\
&> \lambda(U \cap V) + \lambda(V \setminus U) \geq \lambda(U \cap T) + \lambda(T \setminus U).
\end{aligned}$$

由ε的任意性知

$$\lambda(T) \ge \lambda(U \setminus T) + \lambda(T \cap U).$$

其余结论由定理 2-2-8 推出. □

综合本节讨论，我们看到了 $\boldsymbol{K}(X)$上的正线性泛函 I 导出了 X 上的一个 Radon 测度 $\lambda = \lambda_I$. 它的定义域是一个包含 Borel 代数的 σ 代数; 它是一个完备的内正则且外正则的、在紧集上取有限值的测度. 在 § 2.5 建立积分概念后, 还将在 § 2.6 进一步讨论 Radon 测度的性质.

§ 2.4 可测函数

在 § 2.1 已定义过可测空间$(X, \boldsymbol{S})$, 其中 $\boldsymbol{S}$ 是 X 上的一个σ代数, $\boldsymbol{S}$ 的元素叫可测集.

定义 对 X 上的数值函数f, 若对任意 $a \in \boldsymbol{R}$, 有

$$f^{-1}(a, \infty] := \{ x \in X \mid a < f(x) \le \infty \} \in \boldsymbol{S},$$

则说f是 $\boldsymbol{S}$ 可测函数. 特别, 当 X 是拓扑空间, $\boldsymbol{S}$ 是 Borel 代数 $\mathbf{B}(X)$时, 则相应的可测函数叫做 **Borel 函数**. 若在 $\boldsymbol{R}^N$, $\boldsymbol{S}$ 取作 Lebesgue 可测集全体时, 则相应的可测函数就是 Lebesgue 可测函数.

一个拓扑空间上的下 (或上) 半连续函数 (见 § 1.4)必为 Borel 函数.

定理 2-4-1 用 Q 表示 $\boldsymbol{R}$ 的一个稠密子集, f为可测空间 $X = (X, \boldsymbol{S})$上的数值函数, 则下列命题等价:

(1) f是 $\boldsymbol{S}$ 可测函数;

(2) $\forall\, a \in Q$, $f^{-1}(a, \infty] \in \boldsymbol{S}$;

(3) $\forall\, a \in Q$, $f^{-1}[a, \infty] \in \boldsymbol{S}$;

(4) $\forall\, a \in Q$, $f^{-1}[-\infty, a) \in \boldsymbol{S}$;

(5) $\forall\, a \in Q$, $f^{-1}[-\infty, a] \in \boldsymbol{S}$;

(6) $f^{-1}\{-\infty\}\in S$, $f^{-1}\{\infty\}\in S$ 且 $\forall B\in \mathbf{B}(R)$, $f^{-1}(B)\in S$.

证明是简单的，留作练习. □

推论 2-4-2 设 X 是拓扑空间, σ 代数 $S\supset \mathbf{B}(X)$, 则 X 上的上、下半连续函数都是 S 可测函数. 特别，当 X 是局部紧 Hausdorff 空间, λ 为 Radon 测度，$S=\Sigma_\lambda$ (λ 可测集全体，见 § 2.3 第 4 段) 时，则 X 上的上、下半连续函数都是 S 可测的.

附注 2-4-3 从本节开头知，谈及可测集及可测函数时，仅与可测空间所考虑的 σ 代数 S 有关, 不涉及测度. 但当 S 与一个测度有关时，比如当 $S=\Sigma_{\mu^*}$ 或 Σ_ξ, 这里 μ^* 是由 μ 导出的外测度, ξ 是外测度(见 § 2.2), 则 Σ_{μ^*} ,Σ_ξ 中的元素分别叫做 μ 可测集与 ξ 可测集, 相应的可测函数分别称为 μ 可测函数及 ξ 可测函数.

定理 2-4-4 设 g 是 $R^*:=[-\infty,\infty]$ 上的数值函数且为 $\mathbf{B}(R^*)$ 可测, 即对每个实数 a, $(g^{-1}[a,\infty])\cap R^1$ 是一个 Borel 集, 又设 f 是 X 上的 S 可测函数, 则 $g\circ f$ 是 S 可测的.

证明
$$\begin{aligned}(g\circ f)^{-1}[a,\infty]&=f^{-1}(g^{-1}[a,\infty])\\&=f^{-1}[((g^{-1}[a,\infty])\cap R)\cup A\cup B]\\&=f^{-1}[(g^{-1}[a,\infty])\cap R]\cup f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B),\end{aligned}$$

其中 $A:=\{\infty\}\cap f^{-1}[a,\infty]$, $B:=\{-\infty\}\cap f^{-1}[a,\infty]$. 由定理 2-4-1 之 6) 知 $g\circ f$ 为 S 可测. □

下面取定一个可测空间(X, S)并把 S 可测简称为可测. 利用定理 2-4-4 易推出两定理.

定理 2-4-5 设 f 为可测函数, 则

1)对任意实数 a, $f+a$ 与 af 都是可测的;

2)下面定义的函数 g, h, l 都是可测的:

$$g(x)=\begin{cases}|f(x)|^k, & f(x)\neq\infty\\ p\ , & f(x)=\pm\infty\\ q\ , & f(x)=\infty\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}[f(x)]^m, & f(x)\neq\pm\infty\\ p, & f(x)=-\infty\\ q, & f(x)=\infty\end{cases}$$

$$l(x)=\begin{cases}\frac{1}{f(x)}, & f(x)\neq\pm\infty,0\\ p, & f(x)=-\infty\\ q, & f(x)=\infty\\ r, & f(x)=0\end{cases}$$

其中 k 为正实数, m 为正整数, p, q, r 为任意数值. □

定理 2-4-6 设 f, g 为可测函数, 则下面定义的函数 u, v 也是可测的:

$u(x):=p(x)+q(x)$, 当此式有意义时; 在其它处令 $u(x)=a$;

$w(x):=f(x)\,g(x)$, 当此式有意义时; 在它处令 $v(x)=b$,

其中 a, b 为任意数值. □

定理 2-4-7 设$\{f_i\}$为一列可测函数, 则

上确界函数 $w:=\sup\{f_i \mid i=1,2,\cdots\}$、

下确界函数 $v:=\inf\{f_i \mid i=1,2,\cdots\}$、

下极限函数 $\text{l-lim}\, f_i:=\text{l-lim}\, f_i(x), x\in X$ 及

上极限函数 $\text{u-lim}\, f_i:=\text{u-lim}\, f_i(x), x\in X$

都是可测函数.

证明 因对任意实数 a,

$$\{x\in X \mid w(x)>a\}=\cup_{i=1}^{\infty}\{x\in X \mid f_i(x)>a\},$$

$$\{x\in X \mid v(x)<a\}=\cup_{i=1}^{\infty}\{x\in X \mid f_i(x)<a\},$$

由 f_i 的可测性及定理 2-4-1 知 w, v 为可测. 而

$$\text{u-lim}\, f_i=\inf\{\sup\{f_i(x) \mid i\geq k\} \mid k=1,2,\cdots\},\quad x\in X,$$

$$\text{l-lim}\, f_i=\sup\{\inf\{f_i(x) \mid i\geq k\} \mid k=1,2,\cdots\},\quad x\in X.$$

由上、下确界函数的可测性推出上, 下极限函数的可测性.□

对可测空间$(X, \boldsymbol{S})$, 若 $Y\in\boldsymbol{S}$, 记 $\boldsymbol{S}|_Y:=\{E\cap Y \mid E\in\boldsymbol{S}\}$, 易验

证$S|_Y$是Y上的一个σ代数，从而$(Y, S|_Y)$也是可测空间，称为(X, S)的可测子空间．若S上有一个测度(或带号测度)μ，就叫作三元序组(X, S, μ)是一个测度(或带号测度)空间．同样记μ在Y上的限制为$\mu|_Y$，即对任意$E\subset X$, $\mu|_Y(E)=\mu(Y\cap E)$．显然$\mu|_Y$是$S|_Y$上的测度(或带号测度)，称$(X, S|_Y, \mu|_Y)$为(X, S, μ)的子测度空间．在一个测度空间(X, S, μ)中，称一个命题P为μ-几乎处处在X成立，并记作"P μ-a.e"，如果存在可测集E，使得P在E上点点成立而且$\mu(X\setminus E)=0$．又称f是μ-a.e在X有定义的S可测函数，如果存在S可测集Y使得$\mu(X\setminus Y)=0$，且f是Y上有定义的$S|_Y$可测函数．对这样的f，可延拓成X上的一个函数f_1，使得f_1在Y上等于f，在$X\setminus Y$取值为0．显然f_1是X上的S可测函数．

定理 2-4-8 设f为X上μ-a.e有定义的S可测函数，g在X上μ-a.e有定义且$f=g$ μ-a.e在X成立，则g也是μ-a.e在X有定义的S可测函数．

证明 由于有限个可测μ零集之并仍为μ零集．故存在可测集B使得：

(1)f是在B上有定义的$S|_B$可测函数；

(2) 在B上g有定义且$g=f$；

(3) $\mu(X\setminus B)=0$；

因在B上g也是$S|_B$可测函数，故g为μ-a-e在X有定义的S可测函数．□

定理 2-4-9 设函数列$\{f_i\}$中每个f_i都是μ-a.e在X有定义的S可测函数且

$$\lim_i f_i(x)=f(x), \qquad \mu\text{-a.e 在 } X,$$

则f是μ-a.e在X有定义的S可测函数．

证明 因为可数个可测μ零集之并仍为μ零集，故存在可测集Y使得$\mu(X\setminus Y)=0$，在Y上每个f_i为$S|_Y$可测且$\lim_i f_i=f$点

点成立. 据定理 2-4-7, f 是在 Y 有定义的、$\mathcal{S}|_Y$ 可测函数.□

定义 X 上的一个函数 g 称为简单函数, 如果 g 仅取有限个不同的值 $\{y_1,\cdots,y_m\}$. 即, 若令

$$A_i := \{ x \mid g(x) = y_i \}, \quad i = 1,2,\cdots,m,$$

则 $g = \sum_{i=1}^{m} y_i 1_{A_i}$.

定理 2-4-10 设 f 为可测空间 X 上的可测函数, 则存在 X 上的一个可测的简单实函数列 $\{g_m\}$, 它在 X 上点点收敛于 f ; 特别若 f 还是有界的, 则 $\{g_m\}$ 在 X 上一致收敛于 f; 若 $f \geq 0$, 则还可使得这样的 $\{g_m\}$ 是单调增的.

证明 先设 $f \geq 0$. 对每个自然数 m 及 k: $1 \leq k \leq m 2^m$, 令

$$A_{mk} := \{ x \in X \mid (k-1)/2^m \leq f(x) < k/2^m \},$$

$$B_m := \{ x \in X \mid f(x) \geq m \}$$

$$g_m := \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m} 1_{A_{mk}}(x) + m 1_{B_m}(x).$$

显然每个 A_{mk} 都是可测的且 g 为可测实函数. 易知,

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq f, \quad g_m \leq m \text{ 且}$$

$$| g_m(x) - f(x) | < \frac{1}{2^m}, \ x \in X \setminus B_m$$

于是 $\lim_m g_m = f$ 在 X 点点成立. 若 $0 \leq f < b < \infty$, 当 $m > b$ 时,

$$| g_m(x) - f(x) | < \frac{1}{2^m}$$

在 X 一致成立, 此时 $\{g_m\}$ 在 X 一致收敛于 f.

对一般的 f, 令 $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$, 则 f^+ 与 f^- 都是正的可测函数且 $f = f^+ - f^-$. 假定用上段方法, 相对于 f^+ 与 f^- 选出的简单函数列为分别为 $\{g_m\}$ 与 $\{h_m\}$, 则 $\{g_m - h_m\}$ 便是在 X 上收敛于 f 的简单实函数列. 当 f 有界时, 收敛也是一致的. □

§2.5 抽象 Lebesgue 积分

1. 测度空间上的积分

取定一个测度空间 $(X, \boldsymbol{S}, \mu)$, 设 $Y\subset X$.

定义 设 Y 为可测集, 如果由有限个两两不交的可测集构成的集组$\{Y_1,\cdots,Y_m\}$满足 $Y=\bigcup_{i=1}^{m} Y_i$ ，则称之为 Y 的一个**可测分割**.

显然, X 的一个可测分割$\{X_1,\cdots, X_k\}$限制在 Y 就是 Y 的一个分割；反之，对 Y 的一个可测分割$\{Y_1,\cdots,Y_m\}$，令 $Y_{m+1}:=X\setminus Y$, 则$\{Y_1,\cdots,Y_m,Y_{m+1}\}$就是 X 的一个可测分割.

定义 设f是在可测集 Y 上有定义的正数值函数，f 在 Y 上的**积分**定义为

$$\int_Y f\,\mathrm{d}\mu := \sup\{\textstyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\,\mu(Y_i)\mid \{Y_1,\cdots,Y_m\}\text{是 } Y \text{ 的可测分割}\},$$

其中 $\alpha_i:=\inf\{f(x)\mid x\in Y_i\}$. 或等价地,

$$\int_Y f\,\mathrm{d}\mu$$
$$:=\sup\{\textstyle\sum_{i=1}^{m} b_i\,\mu(Y\cap X_i)\mid \{X_1,\cdots,X_m\}\text{是 } X \text{ 的一个可测分割}\},$$

其中，$b_i:=\inf\{f(x)\mid x\in Y\cap X_i\}$.

(注　按惯例 $\inf\varnothing=0$, $\sup\varnothing=\infty$, $0\cdot\infty=0$, $0\cdot(-\infty)=0$.)

对Y上的、一般的函数, 令$f^+:=\max\{f, 0\}$, $f^-:=-\min\{f, 0\}$, 则f^+, f^-皆为正数值函数且$f=f^+-f^-$. 若f^+与f^-在 Y 上的积分至少有一个取有限值，则说f在 Y 上的**积分存在**且称

$$\int_Y f\,\mathrm{d}\mu = \int_Y f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_Y f^-\,\mathrm{d}\mu$$

为f关于测度μ 的**抽象 Lebesgue 积分**，或简称**积分**.

容易看到，当 $X=\boldsymbol{R}^N\ (N\geq 1)$, μ 是 Lebesgue 测度，f 是

Lebesgue 可测函数时，上述积分就是 $\boldsymbol{R}^N$ 上的通常的 Lebesgue 积分.

注 2-5-1 (1)由上述积分定义知，当可测集 Y 上的函数 f 在 Y 上的积分有意义时，可看成是在子测度空间$(Y, \boldsymbol{S}|_Y, \mu|_Y)$上的积分；同时，也可看成是 X 上某个函数的积分，事实上，任取 X 上的一个函数 g 使得 $g|_Y=f$, 则 $g\cdot 1_Y$满足要求(如前所述, 1_Y 是 Y 上的特征函数），即

$$\int_X g\cdot 1_Y \mathrm{d}\mu = \int_Y f\mathrm{d}\mu.$$

(2) 虽然积分的定义也适用于非可测函数，但我们只兴趣那些 $\boldsymbol{S}$ 或 μ 可测函数的积分. 例如，在局部紧 Hausdorff 空间，常考虑 Borel 函数或关于一个 Radon 测度μ 的可测函数的积分.

由于上述两个原因，下面都考虑在一个测度空间上关于可测函数的积分. 如未加声明，下面的测度空间都是$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$，所涉及的集都是可测集，函数都是可测函数，积分区域都是 X，且为记号简单，这样一个函数 f 的积分都简记作$\int f\mathrm{d}\mu$.

定理 2-5-2 设 f, g 为正函数，则

(1) 当 $f\leq g$ 时，$\int f\mathrm{d}\mu\leq\int g\,\mathrm{d}\mu$;

(2) 对任意实数 t, $\int(tf)\mathrm{d}\mu=t\int f\mathrm{d}\mu$.

证明 由积分定义直接推出. □

定理 2-5-3 设 $g:=\sum_{i=1}^m t_i 1_{A_i}\geq 0$, 其中$\{A_1,\cdots,A_m\}$为 X 的一组两两不交子集，则

$$\int g\,\mathrm{d}\,\mu=\sum_{i=1}^m t_i\mu(A_i)\,. \tag{5.1}$$

证明 不妨设$\{A_1,\cdots,A_m\}$为 X 的一个分割，否则令

$$A_{m+1}:=X\setminus\cup_{i=1}^m A_i,\qquad t_{m+1}:=0,$$

则 $g=\sum_{i=1}^{m+1}t_i 1_{A_i}$，因为 $t_{m+1}\mu(A_{m+1})=0$，不改变(5.1)式的值.

由于 $\inf\{g(x)\,|\,x\in A_i\}=t_i$，由积分的定义，

$$\int g\,\mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^{m} t_i \mu(A_i).$$

再设$\{X_j | j=1,2,\cdots,k\}$是X的任一组分割，则

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \inf\{ g(x) \mid x \in X_j\}\, \mu(X_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \inf \{ g(x) \mid x \in X_j\}\, \mu(A_i \cap X_j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \inf \{ g(x) \mid x \in A_i \cap X_j\}\, \mu(A_i \cap X_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} t_i\, \mu(A_i \cap X_j) = \sum_{i=1}^{m} t_i\, \mu(A_i),
\end{aligned}$$

从而 $\int g\,\mathrm{d}\mu \leq \sum_{i=1}^{m} t_i \mu(A_i)$. 故(5.1)成立. □

定理 2-5-4 若$f \geq 0$ 且 $\mu\{ x \mid f(x) > 0\} > 0$，则 $\int f\,\mathrm{d}\mu > 0$.

证明 与通常实函数的相应定理一样，留作练习. □

定理 2-5-5 若简单函数$f \geq 0, g \geq 0$，则

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu .$$

证明 记$f := \sum_{j=1}^{l} a_j 1_{A_j}$, $g := \sum_{k=1}^{m} b_k 1_{B_k}$,这里$\{A_j | j=1,2,\cdots,l\}$, $\{ B_k | k=1,2,\cdots,m\}$都是$X$的可测分割. 于是

$$f+g = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\, 1_{A_j \cap B_k} ,$$

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\, \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} a_j\, \mu(A_j \cap B_k) + \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \sum_{j=1}^{l} a_j\, \mu(A_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mu(B_k)) \\
&= \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu . \quad \square
\end{aligned}$$

定理 2-5-6 设$h \geq 0$为简单函数，$\{ g_i\}$为单调增加的、正的简单函数列且$\lim_i g_i \geq h$，则

$$\lim_i \int g_i\,\mathrm{d}\mu \geq \int h\,\mathrm{d}\mu . \tag{5.2}$$

证明 不妨设$0 < \mu(X) \leq \infty$，否则 $\mu(X) = 0$，定理自然成立. 设$\{ A_1,\cdots, A_k\}$是X的一个可测分割使得

$$h = a_1 1_{A_1} + \cdots + a_k 1_{A_k}, \qquad 0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq \infty,$$

不妨设 $h > 0$，从而 $a_1 > 0$. 否则，在子空间 $Y := \cup_{j=2}^{k} A_j$ 上考虑，仍有同样结论. 下面分几种情形讨论.

1)先设 $\mu(X) < \infty$，$a_k < \infty$. 对任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$ 使得

$$\delta \le \min\{\varepsilon / (2\mu(X)), a_1\}.$$

对每个自然数 i，令

$$B_i := \{ x \mid g_i(x) > h(x) - \delta \},$$

则 B_i 可测. 因 $\lim_i g_i \ge h$，故 $X = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$；因$\{g_i\}$为单调增的，故$\{B_i\}$为单调增的，据定理 2-2-1 ，有

$$\lim_i \mu(B_i) = \mu(X), \quad \lim_i \mu(X \setminus B_i) = 0.$$

故当 i 充分大时，$a_k \mu(X \setminus B_i) < \varepsilon / 2$. 同时，

$$\int g_i \, d\mu \ge \int g_i 1_{B_i} \, d\mu \ge \int (h - \delta) 1_{B_i} \, d\mu$$
$$= \int h 1_{B_i} \, d\mu - \delta \int 1_{B_i} \, d\mu .$$

因 $h = h 1_{B_i} + h 1_{(X \setminus B_i)} \le h 1_{B_i} + a_k 1_{(X \setminus B_i)}$，故

$$\int h \, d\mu \le \int h 1_{B_i} \, d\mu + a_k \mu(X \setminus B_i)$$

从而，当 i 充分大时，

$$\int g_i \, d\mu \ge \int h \, d\mu - a_k \mu(X \setminus B_i) - \delta \mu(B_i)$$
$$\ge \int h \, d\mu - \varepsilon / 2 - \delta \mu(X)$$
$$\ge \int h \, d\mu - \varepsilon .$$

由$\varepsilon > 0$ 的任意性知 (5.2) 成立.

2) 当a_k有限而 $\mu(X)$无限时. 显然积分$\int h \, d\mu \ge a_1 \mu(X) = \infty$. 对 $0 < \delta < a_1$，像第 1)段那样做$\{ B_i \}$. 则对 $x \in B_i$ 有

$$g_i(x) \ge h(x) - \delta \ge a_1 - \delta.$$

从而

$$\int g_i \, d\mu \ge \int g_i 1_{B_i} \, d\mu \ge (a_1 - \delta) \mu(B_i),$$

因$\{ B_i \}$为单调增可测集列，故

$$\lim_i \int g_i \,\mathrm{d}\mu \geq (a_1-\delta)\lim_i \mu(B_i)=\infty=\int h\,\mathrm{d}\mu .$$

3)若$\mu(A_k)>0,\ a_k=\infty$，则 $\int h\,\mathrm{d}\mu \geq a_k\,\mu(A_k)=\infty$. 对任意实数 $a>a_{k-1}$，令

$$h_a:=a_1 1_{A_1}+\cdots+a_{k-1}1_{A_{k-1}}+a1_{A_k},$$

由情形 1)、2)得

$$\lim_i \int g_i\,\mathrm{d}\mu \geq \int h_a\,\mathrm{d}\mu \geq a\,\mu(A_k).$$

因 a 可以任意大，故证得(5.2).

4）当 $a_k=\infty$ 且 $\mu(A_k)=0$ 时，令

$$a_{k-1}<b<\infty,\quad h_b:=a_1 1_{A_1}+\cdots+a_{k-1}1_{A_{k-1}}+b1_{A_k},$$

则 $h_b\leq h$,

$$\int h_b\,\mathrm{d}\mu=\int h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k} a_j\,\mu(A_k).$$

据 1)、2)段的结果有

$$\lim_i \int g_i\,\mathrm{d}\mu \geq \int h_b\,\mathrm{d}\mu=\int h\,\mathrm{d}\mu . \ \square$$

定理 2-5-7 设$\{g_i\}$是 X 上的一个单调增加的、正的简单函数列，则

$$\lim_i \int g_i\,\mathrm{d}\mu=\int(\lim_i g_i)\,\mathrm{d}\mu .$$

证明 令$f:=\lim_i g_i$，则 f 可测（见定理 2-4-9）. 因 $g_i\leq f$，故 $\int g_i\,\mathrm{d}\mu\leq\int f\,\mathrm{d}\mu$ 对每个自然数 i 成立，从而

$$\lim_i \int g_i\,\mathrm{d}\mu \leq \int f\,\mathrm{d}\mu . \tag{5.3}$$

下证反向不等式. 对任意实数 c，若 $c<\int f\,\mathrm{d}\mu$，则由积分的定义，存在 X 的一个分割$\{X_1,\cdots,X_k\}$使得

$$c<\sum_{j=1}^{k}\inf\{f(x)\mid x\in X_j\}\,\mu(X_j)=\int h\,\mathrm{d}\mu ,$$

其中 $h:=\sum_{j=1}^{k} a_j 1_{X_j}$, $a_j:=\inf\{f(x)\mid x\in X_j\}$. 因为 $h\leq f$, 据上一定理知

$$c<\int h\,\mathrm{d}\mu\leq\lim_i\int g_i\,\mathrm{d}\mu .$$

由 c 的任意性推出，(5.3)的反向不等式成立. □

定理 2-5-8 设 $f\geq 0, g\geq 0$，则 $\int f\,\mathrm{d}\mu+\int g\,\mathrm{d}\mu=\int(f+g)\,\mathrm{d}\mu$.

证明 据定理 2-4-10，存在单调增加的、可测的、正的简单函数列 $\{f_i\}$、$\{g_i\}$ 分别收敛于 f, g，于是 $\{f_i+g_i\}$ 也是具有同样性质的函数列且收敛于 $f+g$. 由定理 2-5-5 知，

$$\int(f_i+g_i)\,\mathrm{d}\mu=\int f_i\,\mathrm{d}\mu+\int g_i\,\mathrm{d}\mu,$$

再由定理 2-5-7 得

$$\begin{aligned}\int f\,\mathrm{d}\mu+\int g\,\mathrm{d}\mu&=\lim_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu+\lim_i\int g_i\,\mathrm{d}\mu\\&=\lim_i\int(f_i+g_i)\,\mathrm{d}\mu=\int(f+g)\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$ □

以下考虑的被积函数都假定是所在测度空间的可测函数.

定理 2-5-9

(1) 设 $f\geq 0$，则 $\int f\,\mathrm{d}\mu=0$ 当且仅当 $f=0$ μ-a.e 在 X;

(2) 若 $\int f\,\mathrm{d}\mu$ 存在且有限，则 $\mu\{x\mid f(x)=\pm\infty\}=0$，即 f 在 X μ-a.e 取有限值;

(3) 若 $\int f\mathrm{d}\mu$ 有意义，$f=g$ μ-a.e 在 X，则 $\int g\mathrm{d}\mu$ 有意义且

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\int g\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 (1)的必要性由定理 2-5-4 得到. 令 $E:=\{x\mid f(x)>0\}$，则由 $0\leq f\leq\infty\cdot 1_E$，$\infty\cdot\mu(E)=0$ 及单调性推出充分性.

(2) 令 $f^+:=\max\{f,0\}$，$f^-:=-\min\{f,0\}$. 由条件及积分的定义,

$$0\leq\int f^+\mathrm{d}\,\mu<\infty,\quad 0\leq\int f^-\mathrm{d}\,\mu<\infty.$$

又令

$$A:=\{x\mid f(x)=\infty\},\quad B:=\{x\mid f(x)=-\infty\},$$

由积分的定义得到,

$$\infty>\int f^+\mathrm{d}\mu\geq\infty\cdot\mu(A)+\inf\{f^+(x)\mid x\in X\setminus A\}\cdot\mu(X\setminus A),$$

$$\infty>\int f^-\,\mathrm{d}\mu\geq\infty\cdot\mu(B)+\inf\{f^-(x)\mid x\in X\setminus B\}\cdot\mu(X\setminus B).$$

故 $\mu(A)=\mu(B)=0$.

(3)令 $E:=\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$，则 E 为可测集且 $\mu(E)=0$. 当 $f \geq 0, g \geq 0$ 时，据定理 2-4-8 及(1)得

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\int f 1_E\,\mathrm{d}\mu+\int f 1_{X\setminus E}\mathrm{d}\mu=\int f 1_{X\setminus E}\,\mathrm{d}\mu$$
$$=\int g\, 1_{X\setminus E}\,\mathrm{d}\mu=\int g\, 1_{X\setminus E}\,\mathrm{d}\mu+\int g\, 1_E\,\mathrm{d}\mu=\int g\,\mathrm{d}\mu.$$

对一般的 f, g，仍分 f^+, f^-, g^+, g^- 处理之，因为 $f^+=g^+$ μ-a.e 在 X，$f^-=g^-$ μ-a.e 在 X，应用上段结果得到，

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\int f^+\mathrm{d}\mu-\int f^-\mathrm{d}\mu=\int g^+\mathrm{d}\mu-\int g^-\mathrm{d}\mu=\int g\,\mathrm{d}\mu. \quad \square$$

定义 若函数 f 使得 $\int f\,\mathrm{d}\mu$ 存在且有限，则称 f 为 (μ)可积函数.

由积分的定义知，f 可积的充要条件是 $|f|$ 可积，或等价地，f^+ 与 f^- 同时可积．

注 2-5-10 A) 定理2-5-9之(3)说明，改变一个可测函数在一个零测集的值不影响它的积分的存在性，当积分存在时，也不影响积分值．又由该定理之(2)，我们可认为一个可积函数在 X 上处处取有限值.

B) 又，在§2.4 已说过，对 μ-a.e 在 X 有定义的 $\boldsymbol{S}$ 可测函数 f，可通过补充定义它在一个零测集 E 上的值，使之成为 X 上的可测函数 f_1，于是由(3)得

$$\int f_1\,\mathrm{d}\mu=\int f_1 1_{X\setminus E}\,\mathrm{d}\mu=\int_{X\setminus E} f\,\mathrm{d}\mu.$$

因此，今后把 f_1 与 f 等同起来.

C) 更一般地，在 $(X, \boldsymbol{S}, \mu)$ 上的可积函数全体中，规定等价关系"~"为：$f \sim g \Leftrightarrow f=g$ μ-a.e 在 X；把等价类全体 (即商空间) 记作 $\mathrm{L}_1:=\mathrm{L}_1(X, \boldsymbol{S}, \mu)$. 下一定理告诉我们，$\mathrm{L}_1$ 是一个实线性空间，μ 是 L_1 上的正线性泛函.

定理 2-5-11 若 f，g 是可积函数，则对任意实数 α, β，线性组合 $\alpha f+\beta g$ 也是可积的且

$$\int(\alpha f+\beta g)\,\mathrm{d}\mu=\alpha\int f\,\mathrm{d}\mu+\beta\int g\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 可由定理 2-5-2, 2-5-8 及积分的定义推出 . □

2. Lebesgue 收敛定理与 Fatou 引理

下面介绍几个重要的积分与极限交换的定理. 记号与约定如附注 2-5-1 及 2-5-10.

定理 2-5-12 (Lebesgue 定理) 设$\{f_i\}$是一列正的可测函数, 则

$$\int(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}f_i)\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int f_i\,\mathrm{d}\mu\,.$$

证明 令$f:=\sum_{i=1}^{\infty}f_i$. 显然, 对任意自然数 k, 由积分的单调性及定理 2-5-8, 有

$$\int f\,\mathrm{d}\mu\geq\int\textstyle\sum_{i=1}^{k}f_i\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}\int f_i\,\mathrm{d}\mu,$$

从而

$$\int f\,\mathrm{d}\mu\geq\sum_{i=1}^{\infty}\int f_i\,\mathrm{d}\mu\,.$$

下证反向不等式. 对每个自然数 i, 令$\{g_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ 为单调增加收敛于f_i的、正的简单函数列. 对自然数 m, 令 $u_m:=\sum_{i=1}^{m}g_i^m$, 于是$\{u_m\}$是单调增加的简单函数列. 若自然数 $n\leq m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}g_i^m\leq u_m\leq\sum_{i=1}^{m}f_i\leq f,\tag{5.4}$$

固定 n, 令 $m\to\infty$, 得

$$\sum_{i=1}^{n}f_i\leq\lim_m u_m\leq f,$$

再令 $n\to\infty$, 得 $\lim_m u_m=f$. 再据定理 2-5-7 及(5.4)得

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\lim_m\int u_m\,\mathrm{d}\mu\leq\lim_m\int(\textstyle\sum_{i=1}^{m}f_i)\mathrm{d}\mu$$

$$=\lim_m(\textstyle\sum_{i=1}^{m}\int f_i\,\mathrm{d}\mu)=\sum_{i=1}^{\infty}\int f_i\,\mathrm{d}\mu.\ \square$$

定理 2-5-13 (Levi 定理) 设$\{f_i\}$是单调增的函数列且有某个

自然数 i 使得$\int f_i^- \mathrm{d}\mu<\infty$, 则

$$\lim_i \int f_i \mathrm{d}\mu=\int(\lim_i f_i)\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.5}$$

证明 不妨设 $\int f_1^- \mathrm{d}\mu<\infty$. 若有某个 f_i 使得$\int f_i \mathrm{d}\mu=\infty$, 则(5.5)自然成立. 下设每个 $\int f_i\,\mathrm{d}\mu<\infty$. 由单调性知每个 f_i 可积. 由附注 2-5-10, 可设每个 f_i 仅取有限值. 令 $g_i=f_{i+1}-f_i$, $i=1,2,\cdots$, 则$\{g_i\}$是正的函数列且

$$\lim_i f_i=\lim_i(f_1+\textstyle\sum_{k=1}^{i-1}g_k)=f_1+\sum_{k=1}^{\infty}g_k.$$

由定理 2-5-11 及 2-5-12 得

$$\begin{aligned}\int(\lim_i f_i)\mathrm{d}\mu&=\int f_1\,\mathrm{d}\mu+\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int f_{k+1}\,\mathrm{d}\mu-\int f_k\,\mathrm{d}\mu\right)\\&=\lim_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}\quad\square$$

定理 2-5-14 (Fatou 引理) 设$\{f_i\}$为正的函数列, 则

$$\int\liminf_i f_i\,\mathrm{d}\mu\le\liminf_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu.$$

$$\text{(或记为:}\int\underline{\lim}_i f_i\,\mathrm{d}\mu\le\underline{\lim}_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu\text{)}.$$

证明 由下极限的定义及上一定理直接推出.□

下面是最重要的收敛定理

定理 2-5-15 (Lebesgue 控制收敛定理) 设$\{f_i\}$是一列 μ-a.e 在 X 有定义的可测函数, 又存在一个可积函数 $g\ge 0$ 使得对每个自然数 i, 有

$$|f_i(x)|\le g(x)\qquad \mu\text{-a.e 在 }X,$$

则有

(1) $\int(\liminf_i f_i)\mathrm{d}\mu\le\liminf_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu$,

(2) $\int(\limsup_i f_i)\mathrm{d}\mu\ge\limsup_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu$;

(3) 若 $\lim_i f_i(x)=f(x)$ μ-a.e 在 X, 则 f 可积且

$$\lim_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu=\int f\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 由控制函数 g 可积知每个 f_i 可积. 由附注 2-5-10 , 可设 g 与每个 f_i 只取有限值. 于是$\{g+f_i\}$是正的函数列, 由 Fatou

引理,

$$\int g\,\mathrm{d}\mu+\int(\liminf_i f_i)\,\mathrm{d}\mu=\int(\liminf_i(g+f_i))\,\mathrm{d}\mu$$
$$\leq \liminf_i\int(g+f_i)\mathrm{d}\mu=\int g\,\mathrm{d}\mu+\liminf_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu.$$

这就证明了结论(1). 用 $\{s-f_i\}$ 代替 $\{s+f_i\}$, 并注意到上, 下极限之间的关系就证得(2).

当 $\lim_i f_i(x)=f(x)$, μ-a.e 在 X 时, 同样由控制函数 g 可积推出 f 可积 (f 的可测性见定理 2-4-9). 由(1)、(2)得

$$\liminf_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu\geq\int\lim_i f_i\,\mathrm{d}\mu=\int f\,\mathrm{d}\mu\geq\limsup_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu,$$

故 $\lim_i\int f_i\,\mathrm{d}\mu$ 存在且有(3)成立 .□

3. 不定积分与绝对连续性

仍采用前两段的记号与约定, (X, S, μ)是测度空间.

定义 设 f 是可积函数, 对每个可测集 E, 令

$$\nu(E)=\int f 1_E\,\mathrm{d}\mu=\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

则定义了 S 上的一个(集)函数, 称为 f 的**不定积分**. 通常记 $\nu:=f\mu$, 称 f 为 ν 关于μ 的**密度**.

定理 2-5-16 上述不定积分ν是 S 上的带号（即广义）测度.

证明 因 f 可积, $\int|f|\,\mathrm{d}\mu<\infty$, 显然只须证 ν具有可数可加性. 设$\{A_i\}$是一列两两不交的可测集, 其并集记作 A. 令

$$g_k:=\sum_{i=1}^{k}f 1_{A_i},$$

则 $|g_k|\leq|f|$ 且

$$\lim_k g_k(x)=f(x)\,1_A(x),\qquad x\in X.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\nu(A)=\int_A f\,\mathrm{d}\mu=\int f 1_A\,\mathrm{d}\mu=\int(\lim_k g_k)\mathrm{d}\mu$$
$$=\lim_k\int g_k\,\mathrm{d}\mu=\lim_k\sum_{i=1}^{k}\int f 1_{A_i}\,\mathrm{d}\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i). \square$$

定义 设η, ζ是可测空间$(X, \boldsymbol{S})$上的两个带号测度. 若对任意$\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$，使得对任何可测集 E，当 $|\zeta|(E) < \delta$ 时，恒有$|\eta|(E) < \varepsilon$，则称测度 η 关于 ζ 为绝对连续的.

定理 2-5-17 不定积分 $\nu = f\mu$ 关于测度 μ 是绝对连续的.

证明 对任意自然数 k, 令

$$g_k := \begin{cases} |f(x)|, & |f(x)| < k \quad; \\ k, & \text{其它情况}, \end{cases}$$

则$\{g_k\}$为正的可测函数列且单调增加收敛于 $|f|$. 由控制收敛定理,

$$\lim_k \int g_k \mathrm{d}\mu = \int \lim_k g_k \mathrm{d}\mu = \int |f| \mathrm{d}\mu.$$

选充分大的 k 使得 $\int (|f| - g_k) \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. 取$\delta := \varepsilon / (2k)$, 则对任何 $E \in \boldsymbol{S}$, 当$\mu(E) < \delta$时, 有

$$\int_E g_k \mathrm{d}\mu \le \int_E k \mathrm{d}\mu = k\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2};$$

从而

$$|\nu|(E) = \int_E |f| \mathrm{d}\mu = \int_E (|f| - g_k) \mathrm{d}\mu + \int_E g_k \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

其中我们用到这样的事实: $A := \{x \mid f(x) \ge 0\}$, $B := \{x \mid f(x) < 0\}$分别是关于$\nu = f\mu$的正定集和负定集, 且$\{A, B\}$为一个Hahn 分解; 对于 Jordan 分解 $\nu = \nu^+ - \nu^-$有:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \int_{E\cap A} f \mathrm{d}\mu = \int_E f^+ \mathrm{d}\mu,$$

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap B) = -\int_{E\cap B} f \mathrm{d}\mu = \int_E f^- \mathrm{d}\mu.$$

故

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = \int_E (f^+ + f^-) \mathrm{d}\mu = \int_E |f| \mathrm{d}\mu.$$

（有关 Hahn 与 Jordan 分解, 请参见 § 2.1 之第 3 段. ）$\square$

4. 带号测度的积分及 Radon-Nikodym 导数

定义 设(X, S, ν)为带号测度空间, f 是可测集 E 上的可测函数, 若f 在 E 上关于$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$可积, 则称f 在 E 上关于ν可积, 且其积分为

$$\int_E f\mathrm{d}\nu := \int_E f\mathrm{d}\nu^+ - \int_E f\mathrm{d}\nu^-.$$

由定义知, 关于带号测度的积分可化成关于测度的积分来处理, 因此就具有与关于测度的积分完全类似的性质. 下面仅列举几个定理为例说明之 .

定理 2-5-18 在带号测度空间(X, S, ν)中,

(a) 对 E 上的可积函数f有

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\nu\right| \le \int_E |f|\,\mathrm{d}|\nu|$$

(b) 设$\{E_i\}$是一列两两不交的可测集, 则 f 在 $E:=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 上可积的充要条件是:(1)f 在每个E_i上可积且(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f|\,\mathrm{d}|\nu| < \infty$.

当f在 E 可积时有, $\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f\mathrm{d}\nu = \int_E f\mathrm{d}\nu$.

(c) (控制收敛定理) 设$\{f_i\}$是 E 上一列可积函数, 关于$|\nu|$几乎处处收敛于f, 而且存在正的可积函数 g 使得

$$|f_i(x)| \le g(x) \quad |\nu|\text{-a.e 在 } E, \quad i=1,2,\cdots$$

则f 在 E 可积且

$$\lim_i\int_E f_i\mathrm{d}\nu = \int_E(\lim_i f_i)\mathrm{d}\nu.$$

上一定理的性质(2)说明, 当f在 X 为ν可积时, 关系式

$$\eta(E) := \int_E f\mathrm{d}\nu$$

定义了 S 上的一个带号测度η, 也叫做不定积分, 同样可证, η关于ν是绝对连续的. 若ν是(X, S)上 σ有限的, 则 η也是σ有限的.

反之, 我们有这样的定理

定理 2-5-19 (Radon-Nikodym) 设ζ, η是可测空间$(X, \boldsymbol{S})$上的两个(全)σ有限的带号测度，η关于ζ是绝对连续的，则必存在 $(X, \boldsymbol{S})$上的、实的可测函数f，使得对任何可测集E，有

$$\eta(E) = \int_E f\,\mathrm{d}\zeta,$$

这里的f是唯一确定的(至多可能在一个ζ零测集上的值有差别). f称为η关于 ζ 的 **Radon-Nikodym 导数**. 也常写作$\eta = f\xi$, 其中 $f := \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\xi$. □

定理 2-5-20 设ξ，η是可测空间$(X, \boldsymbol{S})$上的两个 σ有限带号测度，η关于 ξ为绝对连续，g为可测集E上的可测函数. 那么，g在E关于η可积的充要条件是fg在E上关于ξ可积，其中$f = \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\xi$. 当可积时，有

$$\int_E g\,\mathrm{d}\eta = \int_E fg\,\mathrm{d}\xi. \ \square$$

这两个定理的证明略去. 有兴趣的读者可参见 Halmos[23].

§2.6 广义 Riesz 表示定理

本节进一步研究 Radon 测度的性质，导出被认为本世纪分析史上最大贡献之一的 Riesz 定理的推广形式.

以下均设X是局部紧的 Hausdorff 空间，ι是$\boldsymbol{K}(X)$上的正线性泛函，按§2.3 的记号，I^*表示由 ι引出的上积分，$\lambda := \lambda_{\mathrm{I}}$是由 ι 导出的 2^X上的外测度，它限制在 Σ_λ（λ可测集全体）上是一个完备的测度（参见§2.3）.

1. I^*的积分表示

定理 2-6-1 设 E 是一个σ有限的λ可测集（“σ有限”的定

义见§2.1），则

$$\lambda(E)=\sup\{\lambda(C)\mid C \text{ 为 } E \text{ 的紧子集}\}. \tag{6.1}$$

证明 (1) 先设 $\lambda(E)<\infty$. 据定理 2-3-13，对任意$\varepsilon>0$，存在开集 U 使得 $E\subset U$ 且 $\lambda(U)<\lambda(E)+\varepsilon/4$. 因为

$$\lambda(U)=\lambda(E)+\lambda(U\setminus E),$$

故$\lambda(U\setminus E)<\varepsilon/4$，又，据定理 2-3-14，$U$ 有紧子集 K 使得$\lambda(U\setminus K)<\varepsilon/2$. 同时由定理2-3-13，有开集 W使得 $U\setminus E\subset W\subset U$且$\lambda(W)<\varepsilon/2$. 集 $C:=K\setminus W$ 是紧的且

$$C=K\setminus W\subset C\cap(X\setminus U)\cup E\subset U\cap[(X\setminus U)\cup E]=E,$$

$$\begin{aligned}\lambda(E\setminus C)&\le\lambda[E\cap(W\cup(X\setminus K))]\\&\le\lambda(E\cap W)+\lambda(E\setminus K)\\&\le\lambda(W)+\lambda(U\setminus K)=\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

$$\lambda(C)=\lambda(E)-\lambda(E\setminus C)\ge\lambda(E)-\varepsilon,$$

由ε的任意性知(6.1)成立.

(2) 再设 $\lambda(E)=\infty$，设$\{F_i\}$是一列具有有限测度的 λ可测集，其并集包含了 E. 令 $E_k:=E\cap(\cup_{i=1}^{k}F_i)$，$k\in\mathbf{N}$. 因 E_k为λ可测且

$$\lambda(E_k)<\infty,\quad E_k\subset E_{k+1}\text{ 且 }E=\cup_{k=1}^{\infty}E_k,$$

据测度的性质（定理 2-1-1），

$$\infty=\lambda(E)=\lim_k\lambda(E_k).$$

据(1)的结果，对每个自然数 k，选一紧集 C_k使得 $C_k\subset E_k$且 $\lambda(C_k)\ge\lambda(E_k)/2$，显然

$$\lim_k\lambda(C_k)=\lim_k\lambda(E_k)=\infty=\lambda(E).\square$$

定理 2-6-2 设 A,B 是两个不相交的λ可测集，s,t 为正实数，则

$$\mathrm{I}^{*}(s\,1_A+t\,1_B)=s\,\mathrm{I}^{*}(1_A)+t\,\mathrm{I}^{*}(1_B) \tag{6.2}$$

证明 因 I^{*}具有下半可加性（定理 2-3-8），只须证明

$$\mathrm{I}^{\bullet}(s\,1_A+t\,1_B)\ge s\,\mathrm{I}^{\bullet}(1_A)+t\,\mathrm{I}^{\bullet}(1_B) \tag{6.3}$$

若s, t中有一个为0或$\lambda(A)$和$\lambda(B)$中有一个取值为0 或 ∞,则(6.2)已成立. 因此下设 $s, t>0$, $0<\lambda(A)<\infty$, $0<\lambda(B)<\infty$.

先证A、B为紧集的情况，据 Urysohn 引理，存在$f\in \boldsymbol{K}^{+}(X)$使得$f(A)=\{0\}, f(B)=\{1\}, f(X)=[0,1]$. 于是

$$U_1:=\{x\,|\,f(x)<1/3\} \quad 和 \quad U_2:=\{x\,|\,f(x)>2/3\}$$

是不相交的开集且 $U_1\supset A, U_2\supset B$，据定理 1-2-8，存在两个相对紧开集 U、V使得$A\subset U\subset \overline{U}\subset U_1$，$B\subset V\subset \overline{V}\subset V_1$. 显然

$$U\cap V=\varnothing \text{ 且 } 0<\lambda(U)<\lambda(\overline{U})<\infty, 0<\lambda(V)<\lambda(\overline{V})<\infty,$$

因而

$$\mathrm{I}^{\bullet}(s\,1_A+t\,1_B)\le s\,\mathrm{I}^{\bullet}(1_A)+t\,\mathrm{I}^{\bullet}(1_B)=s\,\lambda(A)+t\,\lambda(B)<\infty.$$

对任意$\varepsilon>0$, 据 $\mathrm{I}^{\bullet}$的定义，存在 $g\in\Psi^{+}$使得 $g\ge s\,1_A+t\,1_B$ 且

$$\mathrm{I}(g)-\varepsilon/3<\mathrm{I}^{\bullet}(s\,1_A+t\,1_B) \tag{6.4}$$

取 $\delta>0$ 使得

$$\delta<\min\{(3\,\lambda(U))^{-1}\,\varepsilon\,, (3\,\lambda(V))^{-1}\,\varepsilon\,, s, t\}$$

因在A上$g\ge s$, 由g的下半连续性知， 存在开集G使得 $A\subset G\subset U$且$g>s-\delta$在G上成立； 类似地， 存在开集D使得$B\subset D\subset V$且$g\ge t-\delta$在D成立. 从而有

$$g\ge(s-\delta)1_G+(t-\delta)1_D$$

进一步，

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(g)&\ge \mathrm{I}((s-\delta)1_G+(t-\delta)1_D)\\
&=(s-\delta)\mathrm{I}(1_G)+(t-\delta)\,\mathrm{I}(1_D)\\
&=(s-\delta)\lambda(G)+(t-\delta)\,\lambda(D)\\
&\ge s\,\lambda(A)+t\,\lambda(B)-\delta(\lambda(G)+\lambda(D))\\
&\ge s\,\lambda(A)+t\,\lambda(B)-\delta(\lambda(V)+\lambda(V))\\
&>s\,\lambda(A)+t\,\lambda(B)-2\varepsilon/3
\end{aligned} \tag{6.5}$$

联合(6.4), (6.5)得

$$s\,\mathrm{I}^*(1_A)+t\,\mathrm{I}^*(1_B)-\varepsilon<\mathrm{I}(g)-\varepsilon/3<\mathrm{I}^*(s1_A+t1_B)$$

由 ε 的任意性知 (6.3), 从而 (6.2) 成立.

再证一般情形，即 A、B 皆具有严格正的测度且不相交. 对任意 $\varepsilon>0$，据定理 2-6-1，可选得紧集 E、F 使得 $E\subset A$, $F\subset B$ 且 $s\,\lambda(E)>s\,\lambda(A)-\varepsilon/2$, $t\,\lambda(F)>t\,\lambda(B)-\varepsilon/2$.

于是，利用第一段的结果得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^*(s1_A+t1_B)&\ge \mathrm{I}^*(s1_E+t1_F)=s\,\lambda(E)+t\,\lambda(F)\\&>s\,\lambda(A)+t\,\lambda(B)-\varepsilon\\&=s\,\mathrm{I}^*(1_A)+t\,\mathrm{I}^*(1_B)-\varepsilon.\end{aligned}$$

再次由□的任意性推出(6.2)式. □

定理 2-6-3（广义 Riesz 表示定理） 对 X 上每个正的 λ 可测函数 f 有

$$\mathrm{I}^*(f)=\int f\,\mathrm{d}\lambda. \tag{6.6}$$

证明 据定理 2-4-10，可找一列单调增加收敛于 f 的 λ 可测的简单函数列 $\{g_k\}$，每个 g_k 取有限值，即可表为

$$g_k=\sum_{i=1}^{m_k}t_i1_{E_i},$$

其中 $\{E_1,\cdots,E_m\}$ 是 X 的一个可测分割. 于是，据定理 2-6-2 及定理 2-5-3 得，

$$\mathrm{I}^*(g_k)=\sum_{i=1}^{m_k}t_i\lambda(1_{E_i})=\int g_k\,\mathrm{d}\lambda,\qquad k=1,2,\cdots.$$

又由定理 2-3-9，$\lim_k\mathrm{I}^*(g_k)=\mathrm{I}^*(f)$; 另一方面，由定理 2-5-7，

$$\lim_k\int g_k\,\mathrm{d}\lambda=\int f\,\mathrm{d}\lambda,$$

就得到(6.6)式. □

注 今后把上积分 $\mathrm{I}^*(f)$ 记作 $\int^* f\,\mathrm{d}\lambda$. 那么，上一个定理说明，对每个正的 λ 可测函数 f 有，

$$\int^* f\,\mathrm{d}\lambda=\int f\,\mathrm{d}\lambda.$$

上面这个定理就是下一著名的定理的推广.

定理 2-6-4（Riesz 表示定理） 对 $\boldsymbol{K}(X)$上任一正线性泛函 ι，存在一个测度空间$(X, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda, \lambda)$，其中$\boldsymbol{\Sigma}_\lambda \supset \mathbf{B}(X)$，使得

$$\iota(f) = \int f \mathrm{d}\lambda, \qquad \forall f \in \boldsymbol{K}(X).$$

证明 由上一定理，对$f \in \boldsymbol{K}^+(X)$，有$\iota(f) = \int f \mathrm{d}\lambda = \lambda(f) < \infty$. 而 ι 与 λ 都是 $\boldsymbol{K}(X)$ 上的线性泛函，故对所有的 $f \in \boldsymbol{K}(X)$ 都有

$$\iota(f) = \int f \mathrm{d}\lambda$$

成立. □

为了说明广义 Riesz 表示定理中 ι 所对应的测度 λ 的唯一性，现引入下面概念：

定义 设 μ 是 X 的一个代数 $\boldsymbol{S}$ 上的测度，$\boldsymbol{S} \supset \mathbf{B}(X)$，当满足下面三条件时称 μ 为正则的：

(1) 外正则性：对每个 $E \in \boldsymbol{S}$，

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid U \text{ 为包含 } E \text{ 的开集}\};$$

(2) 内正则性：对每个开集 U

$$\mu(U) = \sup\{\mu(E) \mid E \text{ 为 } U \text{ 的紧子集}\};$$

(3) 对每个紧集 C，$\mu(C) < \infty$.

从定理 2-3-13，2-3-14，2-3-15 得知，由 $\boldsymbol{K}(X)$上的正线性泛函 ι 引出的测度 $\lambda := \lambda_I$ 是正则的、完备的.

注 2-6-5 有的文献，例如[8]，把满足条件 3 的测度称为 **Borel 测度**，而在定义正则性时，只要求同时具有内与外正则性而已.

类似于定理 2-6-1，可以证明

定理 2-6-6 设 μ 为可测空间 $(X, \boldsymbol{S})$ 上的正则测度，则对任意关于 μ 为 σ 有限的可测集 A 有下式成立：

$$\mu(A) = \sup\{\mu(E) \mid E \text{ 为 } A \text{ 的紧子集}\}. \qquad \square$$

定理 2-6-7 设μ、ν 分别为可测空间 $(X, \boldsymbol{S}_1)$ 与 $(X, \boldsymbol{S}_2)$ 上的正则测度且对任意$f \in \boldsymbol{K}^+(X)$，有

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\int f\,\mathrm{d}\nu,$$

则对所有 $E\in \boldsymbol{S}_1\cap \boldsymbol{S}_2$, $\mu(E)=\nu(E)$ 成立.

证明 对任意非空紧集 C, 由于μ, ν正则, 故可找两列单调减的开集$\{U_i\}$, $\{V_i\}$使得每个 U_i, V_i 都包含了 C 且$\mu(U_1)<\infty$, $\nu(V_1)<\infty$, $\mu(U_i)\to\mu(C)$, $\nu(V_i)\to\nu(C)$. 令 $W_i:=U_i\cap V_i$, 则 $\{W_i\}$ 也是单调减的开集列, 每个 W_i 都包含了 C 且 $\mu(W_i)\to\mu(C)$, $\nu(W_i)\to\nu(C)$. 记 $W:=\cap_i W_i$. 显然 $\mu(W\setminus C)=0$, $\nu(W\setminus C)=0$.

又据 Uryshon 定理, 对任意自然数 i, 存在$f_i\in \boldsymbol{K}^+(X)$ 使得

$$f_i(C)=\{1\},\quad f_i(X\setminus W_i)=\{0\}.$$

令 $g_i:=\min\{f_1,f_2,\cdots,f_i\}$, 则每个 g_i具有f_i的上述性质且$\{g_i\}$为单调减的, 于是 $\lim_i g_i=1_C$ 在 $X\setminus(W\setminus C)$ 成立, 即$\{g_i\}$是 μ几乎处处收敛于 1_C. 由于

$$\int g_1\,\mathrm{d}\mu\le\mu(W_1)\le\mu(U_1)<\infty,\quad \int g_1\mathrm{d}\nu\le\nu(W_1)\le\nu(V_1)<\infty,$$

据 Lebesgue 收敛定理得

$$\mu(C)=\int 1_C\,\mathrm{d}\mu=\lim_i\int g_i\,\mathrm{d}\mu=\lim_i\int g_i\,\mathrm{d}\nu=\int 1_C\,\mathrm{d}\nu=\nu(C).$$

这就说明了, 对任何紧集 C 都有 $\mu(C)=\mu(C)$. 再由内正则性推出, 对任何开集 U,

$$\begin{aligned}\mu(U)&=\sup\{\mu(C)\mid C \text{ 为 } U \text{ 的紧子集}\}\\&=\sup\{\nu(C)\mid C \text{ 为 } U \text{ 的紧子集}\}=\nu(U).\end{aligned}$$

进一步, 对任意 $E\in \boldsymbol{S}_1\cap \boldsymbol{S}_2$, 由外正则性,

$$\begin{aligned}\mu(E)&=\inf\{\mu(U)\mid U \text{ 为包含 } E \text{ 的开集}\}\\&=\inf\{\nu(U)\mid U \text{ 为包含 } E \text{ 的开集}\}=\nu(E).\end{aligned}$$ □

推论 2-6-8 设 μ为可测空间 $(X, \boldsymbol{S})$ 上的正则测度, λ 是 $\boldsymbol{K}(X)$ 上的正线性泛函导出的 $\boldsymbol{\Sigma}_\lambda$上的 Radon 测度. 若对每个$f\in \boldsymbol{K}^+(X)$, 有

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\int f\,\mathrm{d}\lambda,$$

则 μ与 λ 在 $\mathbf{B}(X)$的限制相等. □

这说明 $\boldsymbol{K}(X)$ 上的一个正线性泛函所导出的 Radon 测度当限制在 Borel 代数 $\mathbf{B}(X)$上时是唯一的. 还可以得到更进一步的唯一性定理，下面叙而不证.

定理 2-6-9 设 μ 为可测空间$(X, \boldsymbol{S})$上的完备的正则测度，其中 $\boldsymbol{S}$ 满足：$E \in \boldsymbol{S}$ 当且仅当对于每个紧集 C，$E \cap C \in \boldsymbol{S}$. 定义 $\boldsymbol{K}(X)$ 一个正线性泛函 ι 如下：$\iota(f) := \int f \mathrm{d}\mu$，那么 ι 引出的测度 λ 满足：λ 可测集全体$\Sigma_{\lambda} = \boldsymbol{S}$ 且对任意 $E \in \boldsymbol{S}$ 有$\mu(E) = \lambda(E)$. □

2. 函数凸锥上的泛函之测度表示

Riesz 定理还有多种推广形式，现代位势论常考虑从定义在某个函数凸锥上的、具有可加性与正齐性的泛函出发来确定测度. 下面命题在第八、九章常用.

定理 2-6-10 设 Y 是一个局部紧的 Hausdorff 空间, $\mathfrak{I}$ 是由 Y 上的某些连续的、正实值函数组成的凸锥且满足下面条件:

对 $\boldsymbol{K}(Y)$ (即 Y 上具紧支柱的连续函数全体) 中的每个函数 f，对任意正实数 ε 及 f 的支柱的任一邻域 V，都存在 $g, h \in \mathfrak{I}$ 使得 $g - h$ 的支柱包含在 V 中且 $|f - (g - h)| < \varepsilon$.

又设 ϕ 是定义在 $\mathfrak{I}$ 上的、取正实值的函数(泛函)且满足下面四个条件:

a) $g, h \in \mathfrak{I} \Rightarrow \phi(g+h) = \phi(g) + \phi(h)$;

b) $g \in \mathfrak{I}, \alpha \in [0, \infty) \Rightarrow \phi(\alpha g) = \alpha \phi(g)$;

c) $g, h \in \mathfrak{I}, g \le h \Rightarrow \phi(g) \le \phi(h)$;

d)对任意 $g \in \mathfrak{I}$，设

$$\mathfrak{I}_g := \{f \in \mathfrak{I} \mid \text{集}\{y \in Y \mid f(y) < g(y)\}\text{是相对紧集}\},$$

则 $\inf\{\phi(f) \mid f \in \mathfrak{I}_g\} = 0$.

那么在 Y 上存在唯一的测度 ζ 使得

$$\phi(g) = \int g\, d\zeta \quad , \tag{6.7}$$

对每个 $g \in \mathfrak{I}$成立.

证明 唯一性由$\mathfrak{I}$本身的定义可推出. 下面证明存在性.

首先, 在线性子空间

$$\boldsymbol{K}^1(Y) := \boldsymbol{K}(Y) \cap (\mathfrak{I} - \mathfrak{I}) := \{g - h \in \boldsymbol{K}(Y) \mid g, h \in \mathfrak{I}\}$$

上定义一个泛函φ:

$$g - h \mapsto \phi(g) - \phi(h).$$

由条件 a)、b)知φ是线性的; 由条件 c) 知φ是正泛函. 据关于$\mathfrak{I}$的假定, $\boldsymbol{K}^1(Y)$ 在 $\boldsymbol{K}(Y)$中依上确界范数处处稠密, 故φ可连续延拓成 $\boldsymbol{K}(Y)$上的正线性泛函, 据 Riesz 表示定理 (定理 2-6-4), Y 上对应着唯一的测度 ζ 使得

$$\varphi(u) = \int u\, d\zeta$$

对任何 $u \in \boldsymbol{K}(Y)$成立.

下面再证(6.7)成立. 任意取定一个 $g \in \mathfrak{I}$, 考虑满足 $s \le g$ 的一个 $s \in \boldsymbol{K}(Y)$, 选取一个 $g_0 \in \mathfrak{I}$ 使得 g_0 在 s 的支柱上取值大于 1. 那么, 由$\mathfrak{I}$ 的定义可推出, 对任意实数 $\varepsilon > 0$, 在 $\boldsymbol{K}^1(Y)$中存在一列$\{f_n\}$使得

$$\zeta(s) = \lim_n \varphi(f_n) \quad 且\ f_n \le g + \varepsilon g_0$$

对每个自然数 n 成立. 于是

$$\zeta(s) \le \varphi(g) + \varepsilon\, \varphi(g_0).$$

由ε与 s 的任意性推出$\int g\, d\zeta \le \varphi(g)$.

反之, 对 $g \in \mathfrak{I}$, 设$f \in \mathfrak{I}_g$. 因为 $u := \sup\{g - f, 0\} \in \boldsymbol{K}(Y)$ 且 $g - f \le u \le g$, 可推出

$$\phi(g) - \phi(f) \le \varphi(u) = \int u\, d\zeta \le \int g\, d\zeta.$$

从而 $\phi(g) \le \phi(f) + \int g\, d\zeta$, 由条件 d) 推出$\varphi(g) \le \int g\, d\zeta$. □.

下面设 $\mathscr{W}$ 是 X 上的一个函数锥(见 § 1.3)且满足**下稳定性**, 即对任意$f, g \in \mathscr{W}$, 其下确界函数 $\inf\{f, g\} \in \mathscr{W}$. 我们要考虑 $\mathscr{W}$ 上

的正线性泛函的测度表示，为此，先引入两个逼近性质.

引理 2-6-11 设 $q \in \mathscr{W}$ 且 $q>0$. 那么，对任意 $f \in \boldsymbol{K}^{+}(X)$ 及任意实数 $\varepsilon>0$, 存在 $s, t \in \mathscr{W}$ 使得

$$0 \leq s-t \leq f \leq s-t+\varepsilon q.$$

证明 设 $p \in \mathscr{W}$ 且 $p>0$ 使得 $q \in o(p)$ 且 $p \leq q$ 在 $S(f)$ 上成立. 令

$\mathscr{V}:=\{s / p \mid s \in \mathscr{W}^{+}$, 存在一个实数 $\alpha>0$ 使得 $s \leq \alpha q\}$,

那么 $\mathscr{V}$ 是一个下稳定的、线性分离的凸锥，它包含于 $C_0^{+}(X)$. 据推广的 Stone-Weierstrass 逼近定理知，在 $C_0(X)$ 中相对于一致收敛拓扑，$\mathscr{V}-\mathscr{V}$ 是稠密的.

设 $f \in \boldsymbol{K}^{+}(X)$ 且 $\varepsilon>0$，因为 $f / p \in \boldsymbol{K}^{+}(X)$，故存在 $s, s' \in \mathscr{W}^{+}$ 使得

$$\left|\frac{f}{p}-\frac{s-s}{p}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

即 $s-s'-(\varepsilon / 2) p \leq f \leq s-s'+(\varepsilon / 2) p$. 令 $t:=\inf \{s, s'+(\varepsilon / 2) p\}$. 那么，$t \in \mathscr{W}^{+}$ 且

$$0 \leq s-t \leq f \leq s-t+\varepsilon p.$$

因为在 $S(f)$ 上有 $p \leq q$ 成立，所以得到 $f \leq s-t+\varepsilon q$. □

推论 2-6-12 设 $f \in C(X)$ 且存在 $w \in \mathscr{W}^{+}$ 使得 $|f| \leq w$; $p \in \mathscr{W}^{+}$ 满足 $p>0$ 且 $f \in o(p)$. 那么对每个 $\varepsilon>0$，存在 $s, t \in \mathscr{W}^{+}$ 使得

$$0 \leq s-t \leq f \leq s-t+\varepsilon p.$$

证明 对任意 $\varepsilon>0$，有 $u:=(f-(\varepsilon / 2) p)^{+} \in \boldsymbol{K}^{+}(X)$, 因此存在 $s, t \in \mathscr{W}^{+}$ 使得

$$0 \leq s-t \leq u \leq s-t+\varepsilon p / 2 .$$

从而 $s, t \in \mathscr{W}^{+}$ 使得

$$0 \leq s-t \leq f \leq s-t+\varepsilon p. \quad □$$

定理 2-6-13 (Choquet G) 设 ϕ 是 $\mathscr{W}$ 上的一个可加的、正齐

次的、增加的正线性泛函. 那么，X上存在唯一的测度μ，使得

$$\phi(f) = \int f \mathrm{d}\mu$$

对每个$f \in \mathscr{W}$ 成立.

证明 ϕ可延拓为$\mathscr{W} - \mathscr{W}$上的正线性泛函. 不妨仍记之为$\phi$，据定理 2-6-11，对每个$f \in \boldsymbol{K}^+(X)$，令

$$\xi(f) := \sup\{\phi(t) \mid t \in \mathscr{W}^+ - \mathscr{W}^+, t \le f\}$$
$$= \inf\{\phi(t) \mid t \in \mathscr{W}^+ - \mathscr{W}^+, t \ge f\}.$$

因此X定义了$\boldsymbol{K}^+(X)$上的一个正线性泛函，即X上的一个测度 μ.

设$s \in \mathscr{W}^+$，那么

$$\int s \,\mathrm{d}\mu = \sup\{\int f \mathrm{d}\mu \mid f \in \boldsymbol{K}^+(X), f \le s\}$$
$$= \sup\{\xi(f) \mid f \in \boldsymbol{K}^+(X), f \le s\} \le \phi(s).$$

要证反向不等式，可选取$t \in \mathscr{W}^+$使得$s/t \in C_0^+(X)$. 设 $\varepsilon > 0$，那么$f := (s - \varepsilon t)^+ \in \boldsymbol{K}^+(X)$ 使得$s - \varepsilon t \le f \le s$ ，那么

$$\phi(s) - \varepsilon\phi(t) = \phi(s - \varepsilon t) \le \xi(f) = \int f \mathrm{d}\mu \le \int s \,\mathrm{d}\mu.$$

从而 $\phi(s) = \int s \,\mathrm{d}\mu$.

若$s \in \mathscr{W}$ ，可选择$t \in \mathscr{W}^+$使得$s + t \ge 0$，于是

$$\phi(s) + \phi(t) = \phi(s + t) = \int (s + t) \,\mathrm{d}\mu = \int s \,\mathrm{d}\mu + \int t \,\mathrm{d}\mu,$$

故得到 $\phi(s) = \int s \,\mathrm{d}\mu$.

由定理 2-6-11 知，测度是唯一确定的. □

引理 2-6-14 设 X 是一个紧空间，$\mathscr{F}$ 是由 X 上的一些下有界、下半连续的函数组成的凸集，使得对每个$\mu \in \mathscr{M}^+$，存在$f \in \mathscr{F}$满足 $\mu(f) > 0$. 那么$\mathscr{F}$中存在一个在X上取严格正的函数.

证明 令

$$\mathscr{G} := \{g \in C(X) \mid \exists \alpha \in [0, \infty) \text{ 且 } \exists f \in \mathscr{F} \text{ 使得 } g \le \alpha f\};$$
$$\mathscr{G}_0 := \{g \in C(X) \mid g > 0\}.$$

那么，$\mathscr{G}$与$\mathscr{G}_0$都是凸锥，且关于 $C(X)$ 上的一致收敛拓扑，$\mathscr{G}_0$

是一个开集. 那么，在引理的条件下，利用凸集隔离定理（见通常泛函教材）容易推出，这两个凸集之交非空. □

§2.7 Fubini 定理

本节推出关于抽象积分的 Fubini 定理,它比通常实变函数论教材中的同名定理远为一般，这种推广属于厉则治（见[34]）.

以下设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 与 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 是两个测度空间.

引理 2-7-1 记 $\boldsymbol{P}:=\{A\times B\mid A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}$，那么

(1) $\boldsymbol{P}$ 是 $X\times Y$ 上的一个半环，即 $\boldsymbol{P}$ 关于有限交封闭且 $\boldsymbol{P}$ 中任意两个元素之差可表示为 $\boldsymbol{P}$ 中有限个两两不交的元素之并；

(2) 设 $\boldsymbol{E}$ 为 $X\times Y$ 上的包含 $\boldsymbol{P}$ 的最小环（称为半环 $\boldsymbol{P}$ 张成的环），则 $\boldsymbol{E}$ 中任意元素 C 有初等分解，即存在有限个两两不交的集 $C_1,C_2,\cdots,C_k\in\boldsymbol{P}$ 使得 $C=\cup_{i=1}^{k}C_i$.

(3) 将 $\boldsymbol{P}$ 张成的 σ 环记作 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，它也是 $\boldsymbol{E}$ 张成的 σ 环.

证明 (1) 设 $A_1\times B_1, A_2\times B_2\in\boldsymbol{P}$，则

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\in\boldsymbol{P},$$

这因为 $A_1\cap A_2\in\mathscr{A}$，$B_1\cap B_2\in\mathscr{B}$. 下面把一个集 E 关于它所在的空间的余集记作 E^c，注意到 $A_1\setminus A_2\in\mathscr{A}$，$B_1\setminus B_2\in\mathscr{B}$，得到

$$(A_1\times B_1)\setminus(A_2\times B_2)=(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)^c$$

$$=(A_1\times B_1)\cap[(A_2^c\times B_2)\cup(A_2\times B_2^c)\cup(A_2^c\times B_2^c)]$$

$$=[(A_1\setminus A_2)\times(B_1\cap B_2)]\cup[A_1\cap A_2)\times(B_1\setminus B_2)]\cup[(A_1\setminus A_2)\times(B_1\setminus B_2)].$$

上面最后一式中三个方括号中的集都在 $\boldsymbol{P}$ 中且两两不交,故结论(1)成立.

(2) 设 $\boldsymbol{P}_1$ 为由 $\boldsymbol{P}$ 中有限个两两不交的元素的并全体组成的集族. 显然 $\boldsymbol{P}_1\subset\boldsymbol{E}$. 因为 $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{P}_1$,只要证 $\boldsymbol{P}_1$ 是一个环,便有 $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}$.

为此，设 $S, T \in \boldsymbol{P}_1$，那么 $\boldsymbol{P}$ 中有两两不交的元素组 $\{T_1,T_2,\cdots,T_k\}$ 及 $\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$ 使得 $T=\cup_{i=1}^{k} T_i$，$S=\cup_{j=1}^{m} S_j$．于是，

a)当 $S\cap T=\varnothing$，显然 $S\cup T=(\cup_{i=1}^{k} T_i)\cup(\cup_{j=1}^{m} S_j)\in \boldsymbol{P}_1$.

b)一般地，$T\cap S=(\cup_{i=1}^{k} T_i)\cap(\cup_{j=1}^{m} S_j)$

$$=\cup_{i=1}^{k}\cup_{j=1}^{m}(T_i\cap S_j)\in \boldsymbol{P}_1,$$

这因为 $\{T_i\cap S_j \mid i=1,2,\cdots,k,\ j=1,2,\cdots,m\}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 中两两不交的元素组.

c) $T\setminus S=(\cup_{i=1}^{k} T_i)\setminus(\cup_{j=1}^{m} S_j)$

$$=\cup_{i=1}^{k}\cap_{j=1}^{m}(T_i\setminus S_j),$$

由于(1)的证明知，$T_i\setminus S_j$ 可以表示成 $\boldsymbol{P}$ 中两有限个两不交的元素的并，利用 b)及归纳法知 $\cap_{j=1}^{m}(T_i\setminus S_j)\in \boldsymbol{P}_1$，于是 $T\setminus S\in \boldsymbol{P}_1$.

由(a)及(c)推出 $\boldsymbol{P}_1$ 是环.

(3)显然. □

以下设 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{P}_1$ 为上一定理中所表示的集族.

定义 对 $F\subset X\times Y$，$x\in X$，称 Y 的子集 $F_x:=\{y \mid (x,y)\in F\}$ 为 F 在 x 的截口；对 $y\in Y$，称 X 的子集 $F^y=\{x \mid (x,y)\in F\}$ 为 F 在 y 的截口.

例 当 $F=A\times B$，其中 $A\subset X, B\subset Y$，对取定的 $x\in X$，

$$(A\times B)_x=F_x=B,\ 当\ x\in A;\quad (A\times B)_x=F_x=\varnothing,\ 当\ x\in X\setminus A.$$

特当 $A\in \mathscr{A}$，$B\in \mathscr{B}$ 时，$\nu(F_x)=\nu(B)1_A(x)$.

容易验证，对取定的 $x\in X$, $X\times Y$ 的子集 F_1, F_2 和 $X\times Y$ 的子集族 $\{F_j \mid j\in Q\}$，满足：

(1) $(F_1\setminus F_2)_x=(F_1)_x\setminus(F_2)_x$;

(2) $(\cup_{j\in Q}F_j)_x=\cup_{j\in Q}(F_j)_x$;

(3) $(\cap_{j\in Q}F_j)_x=\cap_{j\in Q}(F_j)_x$；特别，若一族集的交是空集时，它们的截口的交也是空集.

定理 2-7-2 设 $F\in \boldsymbol{E}$，它有初等分解 $F=\cup_{i=1}^{k} A_i\times B_i$. 令

$$\begin{aligned}\eta(F) &:= \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\nu(B_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \int [\nu(A_i\times B_i)_x]\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \int [\mu(A_i\times B_i)^y]\,\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

则 η 定义了 $\boldsymbol{E}$ 上的一个测度.

据定理 2-2-9，η 可以延拓成一个包含 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 的 σ 代数 $\boldsymbol{E}^*$上的完备测度，通常记之为 $\mu\times\nu$，或仍然记作 η.

证明 不难看出，$\eta(F)$由 F 唯一确定，与 F 的初等分解的不同形式无关. 显然 $\eta(F)\geq 0$ 且 $\eta(\varnothing)=0$. 下证 η 满足可数可加性. 设 $\{F_i\}$ 是$\boldsymbol{E}$中一个两两不交的集列且$F=\cup_i F_i\in \boldsymbol{E}$，它们的初等分解分别为：$F=\cup_{i=1}^{k} A_i\times B_i$，$F_j=\cup_{i=1}^{k_j} A_{ji}\times B_{ji}$. 则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\eta(F_j) &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_j} \mu(A_{ji})\,\nu(B_{ji}) \qquad (7.1)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_j} \int \nu[(A_{ji}\times B_{ji})_x]\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int \nu([\cup_j \cup_{i=1}^{k_j} A_{ji}\times B_{ji}]_x)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int \nu([\cup_{i=1}^{k} A_i\times B_i]_x)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \int \nu([A_i\times B_i]_x)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \eta(F). \quad \square\end{aligned}$$

如在 § 2.2 末尾所述，$\boldsymbol{P}_\sigma$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 中元素的可数并全体，$\boldsymbol{P}_{\sigma\delta}$ 表示 $\boldsymbol{P}_\sigma$ 中元素的可数交全体.

定理 2-7-3 若 $F\in \boldsymbol{P}_{\sigma\delta}$且$\eta(F)<\infty$，则对每个 $x\in X$，F 的截口 $F_x\in\mathscr{B}$，x 的函数 $\nu(F_x)$ 是$\mathscr{A}$可测的且

$$\eta(F)=\int \nu(F_x)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad (7.2)$$

证明 a) 当 $F\in\boldsymbol{P}$时，可表示成 $F=A\times B$，其中 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{B}$，故由例 1 知，对每个 $x\in X$，$F_x\in\mathscr{B}$；这时 $\nu(F_x)=\nu(B)1_A(x)$，它当然是$\mathscr{A}$可测函数，且由(7.1)知(7.2)成立.

b) 当 $F \in \boldsymbol{P}_\sigma$ 时，可表成 $F = \cup_i F_i$，其中每个 $F_i \in \boldsymbol{P}$. 因 $\boldsymbol{P}$ 是半环，可设$\{F_i\}$为两两不交. 由 a)，对任意 $x \in X$, 每个$(F_i)_x \in \mathscr{B}$, 每个 $\nu((F_i)_x)$是 $\mathscr{A}$ 可测函数，故

$$F_x = \cup_i (F_i)_x \in \mathscr{B}, \qquad \nu(F_x) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu((F_i)_x) .$$

从而$\nu(F_x)$是 $\mathscr{A}$ 可测的. 同时

$$\begin{aligned}\eta(F) &= \sum_{i=1}^{\infty} \eta(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int \nu((F_i)_x)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int \nu(\cup_i (F_i)_x)\mathrm{d}\mu(x) = \int \nu(F_x)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

c) 当 $F \in \boldsymbol{P}_{\sigma\delta}$ 时，存在一列$\{F^j\} \subset \boldsymbol{P}_\sigma$ 使得 $F = \cap_j F^j$. 由于 $\boldsymbol{P}$ 关于有限交封闭，不妨设$\{F^j\}$是单调减少列. 由 b) 的结论，对任意$x \in X$, 每个$(F^j)_x \in \mathscr{B}$, 故$F_x = \cap_j (F^j)_x \in \mathscr{B}$. 由于$\eta(F) < \infty$, 据推论 2-2-10 及引理 2-7-1 知，存在 $F' \in \boldsymbol{P}_\sigma$使得

$$F \subset F' \qquad 且 \qquad \eta(F') < \infty;$$

不妨设 $F^1 = F'$, 从而

$$\int \nu((F^1)_x)\mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

于是$\nu(F^1{}_x) < \infty$ μ-a.e 在 X. 由测度的下半连续性（定理 2-2-1）知

$$\nu(F_x) = \lim_j \nu((F^j)_x) \qquad \mu\text{-a.e 在 } X.$$

由 b)段结论，每个 $\nu((F^j)_x)$ 作为x的函数为$\mathscr{A}$ 可测，据定理2-4-9及有关的附注知，$\nu(F_x)$ 为 $\mathscr{A}$ 可测函数. 再由测度的下半连续性及 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\eta(F) &= \lim_j \eta(F^j) = \lim_j \int \nu(F^j{}_x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int \nu(F_x)\,\mathrm{d}\mu(x). \qquad \square\end{aligned}$$

定理 2-7-4 设 $X \times Y$的子集 E 为 η 可测且$\eta(E) < \infty$, 则对 μ 几乎所有 $x \in X$, E_x为ν可测, x 的函数$\nu(E_x)$为 μ 可测且

$$\eta(E) = \int \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{7.3}$$

证明 因 $\eta(E) < \infty$, 由推论 2-2-10 及引理 2-7-1 知，存在 F

$\in \boldsymbol{P}_{\sigma\delta}$ 使得 $E\subset F$ 且 $\eta(E)=\eta(F)$.

a) 若 $\eta(E)=0$, 由定理 2-7-3 得

$$\int \nu(F_x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\eta(F)=\eta(E)=0,$$

从而 $\nu(F_x)=0$, μ-a.e 在 X. 因为每个 $E_x\subset F_x$, 故对 μ 几乎所有的 $x\in X$, $\nu(E_x)=0$ 且 E_x 为 ν 可测. 从而 $\nu(E_x)$ 作为 x 的函数 μ 可测且 (7.3) 成立.

b) 若 $\eta(E)>0$, 那么 $E=F\setminus(F\setminus E)$ ，用 $F\setminus E$ 代替上段的 F, 再对 F 应用定理 2-7-3，就证得结论. □

定理 2-7-5 (Fubini 定理) 设 $X\times Y$ 上的函数 f 为 $\eta:=\mu\times\nu$ 可测且关于 η 可积，那么 $f_x(y)=f(x,y)$ 对 μ 几乎所有 $x\in X$ 为 ν 可积，$g(x):=\int f_x(y)\mathrm{d}\nu(y)$ 为 μ 可积；$f^y=f(x,y)$ 对 ν 几乎所有 $y\in Y$ 为 μ 可积, $h(y):=\int f^y(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ 为 ν 可积且

$$\int f\,\mathrm{d}\eta=\int\Big[\int f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big]\mathrm{d}\mu(x)\,, \tag{7.4}$$

$$\int f\,\mathrm{d}\eta=\int\Big[\int f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\Big]\mathrm{d}\nu(x)\,. \tag{7.5}$$

证明 a) 先假定 f 为一个 η 可测集 $E\subset X\times Y$ 的特征函数 1_E，它是 η 可测的. 由题设 f 可积，即

$$\int f\,\mathrm{d}\eta=\eta(E)<\infty.$$

于是，由定理 2-7-4，对 μ 几乎所有 $x\in X$, E_x 为 ν 可测, x 的函数 $\nu(E_x)$ 为 μ 可测; 故 $f_x=f_x(y)=f(x,y)=1_E(x,y)=1_{E_x}(y)$ 对 μ 几乎所有 $x\in X$ 为 ν 可测, $g(x)=\int f_x(y)\mathrm{d}\nu(y)=\nu(E_x)$ 为 μ 可测且由(7.3)知(7.4)成立，即 $g(x)$ 为 μ 可积的. 从而对 μ 几乎所有 $x\in X$, f_x 为 ν 可积 .

b) 再设 F 为正的 η 可测简单函数，即可表成 $f=\sum_{i=1}^{k}t_i1_{F_i}$，其中每个 $t_i>0$，F_i 为 η 可测集. 据题设，f 关于 η 可积，故每个 $\eta(F_i)<\infty$. 由上段证明知, 对 μ 几乎所有 $x\in X$, $f_x=\sum_{i=1}^{k}t_i1_{(F_i)_x}$ 为 ν 可测函数且 $g(x)=\int f_x(y)\mathrm{d}\nu(y)=\sum_{i=1}^{k}t_i\,\nu[(F_i)_x]$ 为 μ 可测函

数. 由 a)段或(7.3)得

$$\int f \mathrm{d}\eta = \int \left(\sum_{i=1}^{k} t_i 1_{F_i} \right) \mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{k} t_i \int 1_{F_i} \mathrm{d}\eta$$

$$= \sum_{i=1}^{k} t_i \int \nu((F_i)_x) \mathrm{d}\mu(x) = \int \sum_{i=1}^{k} t_i \nu((F_i)_x) \mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int \int f_x(y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x).$$

c) 若 f 为正的η可积函数，则有正的 η 可测的可积简单函数列$\{f_j\}$单调增加收敛于f; 由 b)段的证明及定理 2-4-9 知，对μ几乎所有 $x \in X$，$f_x = \lim_j (f_j)_x$ 为ν 可测函数且

$$g(x) := \int f_x(y) \mathrm{d}\nu(y) = \lim_j \int (f_j)_x \mathrm{d}\nu = \lim_j \int f_j(x, y) \mathrm{d}\nu(y)$$

为 μ 可测函数,

$$\int f \mathrm{d}\eta = \lim_j \int f_j \mathrm{d}\eta = \lim_j \int \int f_j(x, y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int [\lim_j \int f_j(x, y) \mathrm{d}\nu(y)] \mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int [\int f(x, y) \mathrm{d}\nu(y)] \mathrm{d}\mu(x).$$

d) 若f一般的 η 可积函数时，分正部与负部分别处理之，可得出所要的结论(7.4).

e) 由于在定理 2-7-2 中 η 的定义是关于 x 与 y，μ 与ν对称的，故由(7.4)推出(7.5)也成立. □

按数学分析的习惯，常把称为**重积分**，而把(7.4),(7.5)的右边称为**累次积分**. 当f为正的时，定理要求“f关于η可积”这个条件可以省略，即可改成下面的形式：

定理 2-7-6 设$X \times Y$上的正函数f 为 $\eta = \mu \times \nu$可测且f的支柱 $S(f)$是 σ 有限的，即存在一列η可测集 $\{G_i\}$ 使得 $S(f) \subset \cup_i G_i$ 且每个$\eta(G_i) < \infty$，则$f_x(y) = f(x, y)$ 对 μ几乎所有 $x \in X$为ν可测，$g = \int f_x(y) \mathrm{d}\nu(y)$ 为 μ可测；$f^y = f(x, y)$ 对ν几乎所有 $y \in Y$为μ 可测, $h = \int f^y(x) \mathrm{d}\mu(x)$ 为ν可测，并且(7.4), (7.5)成立.

证明 不妨设$\{G_i\}$是两两不交的. 令

$$f_{i,k}(x, y) = \inf\{f(x, y), k1_{G_i}(x, y)\}, \quad i, k = 1, 2, \cdots.$$

则每个$f_{i,k}$是η可测且可积的. 由定理 2-7-5, 对 μ几乎所有 $x \in X$,

$$f_x(y) = f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_k f_{i,k}(x, y)$$

为ν可测, 且

$$g(x) = \int f_x(y) \mathrm{d}\nu(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_k \int f_{i,k}(x, y) \mathrm{d}\nu(y)$$

为μ可测.

$$\begin{aligned}\int [\int f(x, y) \mathrm{d}\nu(y)] \mathrm{d}\mu(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_k \int \int f_{i,k}(x, y) \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_k \iint f_{i,k}(x, y) \mathrm{d}\eta(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int f 1_{G_i}\, \mathrm{d}\eta \\ &= \int f \mathrm{d}\eta .\end{aligned}$$

这就是(7.4)式, 可类似推得(7.5)式. □

推论 2-7-7　设 $X \times Y$ 上的函数f为$\eta := \mu \times \nu$可测且f 的支柱 $\mathrm{S}(f)$是σ有限的, $|f|$的累次积分中有一个是有限的, 则f 关于η可积且(7.4),(7.5)式成立. □

§ 2.8　测度网和浑收敛

在位势论中常用到测度网(包括列)、测度滤子的浑收敛的概念. 由于网与滤子的等价性(§ 1.1)我们仅介绍网的情形.

设 X 是一个局部紧的 Hausdorff 空间, $\mathscr{M}(X)$表示 X 上的带号(Radon)测度全体, 其中(正)测度全体记作 $\mathscr{M}^+(X)$. 我们通过规定邻域基的办法来定义$\mathscr{M}(X)$中的拓扑 — 称为浑拓扑: 对每个$\mu \in \mathscr{M}(X)$, 取μ的邻域基使得其中每个成员是具有下面形式的集:

$$V_\mu(f_1, f_2, \cdots f_k; \varepsilon) := \{\nu \in \mathscr{M}(X) \mid |\nu(f_i) - \mu(f_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, k\};$$

其中$\varepsilon > 0$ 是实数, $f_i \in \mathbf{K}(X), i = 1, 2, \cdots, k$; $k \in \mathbf{N}$.

显然，$\mathscr{M}(X)$中的一个网(μ_α) 依浑拓扑收敛（简称浑收敛）于一个带号测度μ（称为浑极限），当且仅当对每个$f\in \mathbf{K}(X)$有

$$\lim_\alpha \mu_\alpha(f)=\mu(f).$$

(μ_α) 浑收敛于μ 常记作$\mu_\alpha \xrightarrow{\cdot} \mu$.

引理 2-8-1 设$\mathscr{M}^+(X)$中的网 (μ_α) 浑收敛于$\mu\in\mathscr{M}(X)$, $f\geq 0$是X上的下半连续函数，则

$$\liminf_\alpha \int f\,\mathrm{d}\mu_\alpha \geq \int f\,\mathrm{d}\mu. \tag{8.1}$$

证明 因X是局部紧的Hausdorff空间，集$\{g\in\mathbf{K}(X)\mid g\leq f\}$是一个上定向族且其上确界函数为$f$. 对其中任意$g$，有

$$\int f\,\mathrm{d}\mu_\alpha \geq \int g\mathrm{d}\mu_\alpha.$$

从而

$$\liminf_\alpha \int f\,\mathrm{d}\mu_\alpha \geq \lim_\alpha \int g\,\mathrm{d}\mu_\alpha=\int f\,\mathrm{d}\mu.$$

故(8.1)成立. □

注 1) 把上面“$f\geq 0$”改为“f在X的某个紧集K之外取正值”，(8.1)式也成立.（参看§1.4之 第3段）.

2) $\mathscr{M}^+(X)$中网的浑极限 μ 也必定在 $\mathscr{M}^+(X)$中. 证明不难，留作练习.

推论 2-8-2 设 (μ_α) 是$\mathscr{M}(X)$ 中的网且浑收敛于μ，则

(1) 对X的任意开集G有 $\liminf_\alpha \mu_\alpha(G)\geq\mu(G)$;

(2) 对X的任意紧集K有 $\limsup_\alpha \mu_\alpha(K)\leq\mu(K)$;

(3) 若X的相对紧子集E的边界是 μ 零测集，则

$$\lim_\alpha \mu_\alpha(E)=\mu(E).$$

证明 开集G的特征函数$f:=1_G$为正的下半连续函数，故由上一引理直接推出(1)．由于Hausdorff 空间的紧集K是闭集，特征函数是上半连续函数，但$f'=-1_K$是在K之外取正值的下半连续函数，由上一引理的注(1) 可推出结论(2).

对(3)中的集E, $\mu(E)=\mu(\overline{E})=\mu(E^0)$, 因$\overline{E}$是紧的, E的内

部 E^0 是开的，利用(1)与(2)可推出(3). □

为了得出更深入的结果，下面对局部紧空间 X 补充要求是可度量化的，即把它看成一个度量空间. 并令

$$\mathscr{M}_1(X) := \{ \nu \in \mathscr{M}^+(X) \mid \nu(X) = 1 \},$$

即 X 上的概率测度全体. 这样，上一推论可加强为:

定理 2-8-3 设 (μ_α) 是 $\mathscr{M}_1(X)$ 中的测度网，则下面 6 个命题等价:

a) μ_α 浑收敛于 μ ；

b) 对任何 $g \in \boldsymbol{C}_b(X)$ (X 上有界连续的实函数全体)都有

$$\lim_\alpha \mu_\alpha(g) = \mu(g); \tag{8.2}$$

c) 对任何 $g \in \mathbf{U}(X)$ (X 上有界且一致连续的实函数全体) 有 (8.2) 式成立.

d) 对 X 上的任意开集 G 有 $\liminf_\alpha \mu_\alpha(G) \geq \mu(G)$;

e) 对 X 上的任何闭集 C 有 $\limsup_\alpha \mu_\alpha(C) \leq \mu(C)$;

f) 对 X 的任何一个子集 A，当其边界为 μ 零测集时有

$$\lim_\alpha \mu_\alpha(A) = \mu(A).$$

证明 b) ⇒ c) ⇒ a)都是显然的; a) ⇒ d) 是推论 2-8-2 的特例. 因 μ 与 μ_α 是全有界测度，d) ⇔ e)是显然的, e) ⇒ f)也类似于推论 2-8-2 之(3). 因此剩下 a) ⇒ b) 与 f) ⇒b).

先证 a) ⇒ b). 设 μ_α 浑收敛于 μ, $g \in \boldsymbol{C}_b(X)$. 因 $\mu, \mu_\alpha \in \mathscr{M}_1(X)$, 故 g 关于这些测度都是可积的. 由于

$$g = \sup\{ f \in \boldsymbol{K}(X) | f \leq g\} = \inf\{q \in \boldsymbol{K}(X) \mid g \leq q\}$$

故

$$\liminf_\alpha \mu_\alpha(g) \geq \mu(g) ,$$

同时 $\limsup_\alpha \mu_\alpha(g) \leq \mu(g)$ ，所以

$$\lim_\alpha \mu_\alpha(g) = \mu(g).$$

再证 f) ⇒ a). 设 $g \in \boldsymbol{C}_b(X)$ 且 f)成立. 定义 $\boldsymbol{R}^1$ 上的测度 μ^g

如下：

对 $\boldsymbol{R}^1$ 上的任何 Borel 集 E, 令

$$\mu^g(E):=\mu\{x\in X\mid g(x)\in E\}.$$

由于 g 是有界函数, 故μ^g 的质量集中于某一个有界区间(a, b) (即 $\mu^g(\boldsymbol{R}^1\setminus(a, b))=0$). 显然至多在该区间的可数个点上分布有正质量(即$\{y\in(a,b)\mid \mu^g\{y\}>0\}$是可数集或有限集). 故对任意 $\varepsilon>0$, 可找到有限个实数 $t_1,\cdots,t_m$ 满足

(1) $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m=b$; $a<g(x)<b,\quad x\in X$;

(2) $\mu^g\{t_i\}=0,\ i=0,1,2,\cdots,m.$

(3) $t_j-t_{j-1}<\varepsilon$, $j=1,2,\cdots,m$.

令 $A_j:=\{x\in X\mid t_{j-1}\le g(x)<t_j\}, j=1,2,\cdots,m$. 那么 $A_1, A_2,\cdots, A_m$ 是 X 的两两不交的 Borel 集且 $X=\cup_j A_j$. 而且

$$\overline{A}_j\setminus A_j^0\subset\{x\in X\mid g(x)=t_{j-1}\}\cup\{x\in X\mid g(x)=t_j\},$$

所以$\mu(\overline{A}_j\setminus A_j^0)=0$. 因为条件 f)成立, 故

$$\lim_\alpha\mu_\alpha(A_j)=\mu(A_j)\quad ,j=1,2,\cdots,m.$$

令 $g^*:=\sum_j t_{j-1}1_{A_j}$. 注意到对每个 $x\in X$,

$$|g^*(x)-g(x)|<\varepsilon,$$

故有

$$\left|\int g\,\mathrm{d}\mu_\alpha-\int g\mathrm{d}\mu\right|\le\int|g-g^*|\mathrm{d}\mu+\left|\int g^*\mathrm{d}\mu_\alpha-\int g^*\mathrm{d}\mu\right|+\int|g-g^*|\mathrm{d}\mu_\alpha$$
$$\le 2\varepsilon+\sum_{j=1}^m|\mu_\alpha(A_j)-\mu(A_j)|\cdot|t_{j-1}|$$

因此 $\limsup_\alpha\left|\int g\,\mathrm{d}\mu_\alpha-\int g\,\mathrm{d}\mu_\alpha\right|\le 2\varepsilon$.

因为 ε 是任意的, 故推得 (8.2) 式成立, 即 b)成立 .□

引理 2-8-4 X 拓扑同胚于 $\mathcal{M}_1(X)$ 的子集 $\boldsymbol{D}:=\{\varepsilon_x\mid x\in X\}$, 这里 ε_x 表示在点 x 的单位正质量, 即对 X 的任意 Borel 集 B, 当 $x\in B$ 时 $\varepsilon_x(B)=1$; 当 $x\notin B$ 时 $\varepsilon_x(B)=0$.

证明 对任意 $x\in X$ 及任意 $g\in C_b(X)$ 有 $\varepsilon_x(g)=g(x)$. X 中

的网 (x_α) 若收敛于 $x \in X$, 则 $g(x_\alpha)$ 收敛于 $g(x)$. 因此$\varepsilon_{x(\alpha)}$浑收敛于ε_x(此处下标 $x(\alpha):=x_\alpha$,以下同). 反之设$\varepsilon_{x(\alpha)}$浑收敛于ε_x, 但(x_α)不收敛于 x, 则存在 x 的一个开邻域 G 及(x_α) 的一个子网(x_β)使得$\{x_\beta\} \subset X \setminus G$. 据 Uryshon 引理(§1.2), 存在一个取值于[0, 1]的连续函数 g 使得 $g(x)=0$ 而在 $X \setminus G$ 上 g 的值为 1. 于是$\varepsilon_{x(\beta)}(g)=1$ 对任意 β 成立, 但$\varepsilon_x(g)=0$. 这与$\varepsilon_{x(\alpha)}$浑收敛于 ε_x 矛盾.□

引理 2-8-5 上一引理中定义的测度集 $\boldsymbol{D}$ 是序列闭的, 即对 X 中的任何点列$\{x_n\}$, 若 $\varepsilon_{x(n)}$ 浑收敛于$\mu \in \mathscr{M}(X)$, 则$\mu \in \boldsymbol{D}$, 即存在 $x \in X$ 使得 $\mu=\varepsilon_x$.

证明 设$\varepsilon_{x(n)}$浑收敛于$\mu \in \mathscr{M}_1(X)$, 但$\{x_n\}$不存在任何收敛子列. 于是集 $E:=\{x_1, x_2, \cdots\}$是一个闭集 (无限集) 而且它的任一子集也是闭集. 因$\varepsilon_{x(n)}$浑收敛于μ, 据定理 2-8-3 之(e)有

$$\mu(C) \geq \limsup_n \varepsilon_{x(n)}(C)$$

对 X 的任何闭集 C 成立. 于是, 对 E 的任何无限子集 F 都有 $\mu(F)=1$, 这与 μ 是测度从而满足可加性矛盾.

因此$\{x_n\}$至少有一个子列, 记之为$\{x_k\}$, 收敛于某个 $x \in X$. 据引理 2-8-4 知 $\varepsilon_{x(k)}$ 浑收敛于ε_x, 故 $\mu=\varepsilon_x$. □

注 引理 2-8-4 与 2-8-5 只要求 X 是一般的度量空间即可.

定理 2-8-6 X的假定如前 (局部紧且可度量化), 那么$\mathscr{M}_1(X)$是紧度量空间的充要条件是: X是紧度量空间.

证明 设 $\mathscr{M}_1(X)$是紧度量空间, 由引理 2-8-4 与 2-8-5 知, X 同胚于 $\mathscr{M}_1(X)$的一个闭子集 $\boldsymbol{D}$, 故 X 是一个紧的度量空间.

反之, 设X是紧度量空间, 那么$C_b(X)$是可分的 Banach 空间, 因此 $C_b(X)$中存在一个列$\{g_n\}$使得 $g_1 \equiv 1$, $\|g_n\| \leq 1$ 且$\{g_n\}$在 $C_b(X)$中以 0 为中心、1 为半径的球 S_0 中稠密. 用 $[0,1]^\omega$ 表示可数个单位闭区间[0, 1] 的可数乘积, 那么$[0,1]^\omega$ 是紧的可分的、可度量化空间(参看 §1.2).

用 T 表示从 $\mathscr{M}_1(X)$ 到 $[0,1]^\omega$ 映射，其定义为

$$\mu \mapsto \{\mu(g_1), \mu(g_2), \cdots\}.$$

那么可证明，T 建立了 $\mathscr{M}_1(X)$ 到 $[0,1]^\omega$ 的一个闭子集上的一个同胚，由此，就推出了 $\mathscr{M}_1(X)$是紧的度量空间.

下面先验证 T 是一个同胚映射，首先 T 是一对一的. 因为，若$T(\mu)=T(\nu)$，则 $\mu(g_n)=\nu(g_n)$ 对每个$n\in\mathbf{N}$ 成立. 因为$\{g_n\}$在 S_0 稠密，故可推出对任意$f\in S_0$，从而对任何$f\in C_b(X)$都有

$$\mu(f)=\nu(f).$$

由 Riesz 表示定理的推论(定理 2-6-7、推论 2-6-8)知$\mu=\nu$.

再者，T 是连续的. 事实上，若$\mu_\alpha(g_n)$ 收敛于 $\mu(g_n)$ 对每个 $n\in\mathbf{N}$ 成立，从而 $T(\mu_\alpha)$收敛于 $T(\mu)$. 反过来，T^{-1} 也是连续的，事实上，设$\{\mu_\alpha\}$是 $\mathscr{M}_1(X)$中的网使得 $T(\mu_\alpha)$ 收敛于 $T(\mu)$，从而 $\mu_\alpha(g_n)$ 收敛于 $\mu(g_n)$对每个 $n\in\mathbf{N}$ 成立. 于是，对任意 $g\in S_0(\mathrm{x})$，

$$|\mu_\alpha(g)-\mu(g)|\le 2\|g-g_n\|+|\mu_\alpha(g_n)-\mu(g_n)|.$$

因此对每个 $n\in\mathbf{N}$ 有

$$\limsup_\alpha|\mu_\alpha(g)-\mu(g)|\le 2\|g-g_n\|.$$

因为存在$\{g_n\}$的一个子列$\{g_{n(k)}\}$ 使得$\|g-g_{n(k)}\|\to 0$，从而

$$\lim_\alpha|\mu_\alpha(g)-\mu(g)|=0.$$

因此推出，对任意 $g\in C_b(\mathrm{x})$ 都有 $\lim_\alpha\mu_\alpha(g)=\mu(g)$. 由定理 2-8-3 知，$\mu_\alpha$ 浑收敛于μ. 总之，已证得 T 是一个同胚映射.

下面证明 $T(\mathscr{M}_1(X))$ 在$[0,1]^\omega$ 中是闭的，假定$\{\mu_n\}$是 $\mathscr{M}_1(X)$中的一个列使得 $T(\mu_n)$ 收敛于 $[0,1]^\omega$ 中的一个元素$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$. 又设 g 是 $C_b(X)$的单位球 S_0 上的一个元素（函数），那么存在$\{g_n\}$的子列$\{g_{n(k)}\}$使得 $\|g_{n(k)}-g\|$ 当 $k\to\infty$ 时收敛于 0. 那么，对 $m,n\in\mathbf{N}$，

$$|\mu_n(g)-\mu_m(g)|\le 2\|g-g_{n(k)}\|+|\mu_n(g_{n(k)})-\mu_m(g_{n(k)})|.$$

故

$$\limsup_{m,n\to\infty} |\mu_n(g) - \mu_m(g)| \le 2\,\|g - g_{n(k)}\|$$

令 $k\to\infty$，得

$$\limsup_{m,n\to\infty} \; |\mu_n(g) - \mu_m(g)| = 0.$$

即对每一个 $g \in S_0$，$\mu_n(g)$ 的极限存在，记此极限即为 $\lambda(g)$．对 $C_b(X)$中的任一函数 f，存在一个正数 $c \neq 0$ 使得 $c\,f \in S_0$．令 $\lambda(f) := c\,\lambda(f/c)$. 于是 λ 是 $C_b(X)$（从而也是 $\boldsymbol{K}(X)$）上的正线性泛函且满足 $\lambda(1) = 1$. 根据 Riesz 表示定理，存在唯一的测度 μ 使得 $\lambda(g) = \mu(g)$, 对每个 $g \in \boldsymbol{K}(X)$, 从而对每个 $g \in C_b(X)$ 也成立. 特别, $\mu(g_n) = \alpha_n$ ，$n \in \mathbf{N}$．从而 $T(\mu) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$. 这就证明了 $T(\mathscr{M}_1(X))$ 是闭的. 因为 $[0, 1]^{\omega}$ 是紧的，故 $T(\mathscr{M}_1(X))$是紧的，从而 $\mathscr{M}_1(X)$ 是紧的. □

推论 2-8-7 设 X是局部紧的紧度量空间，则$\mathscr{M}_1(X)$中任意的网 $\{\mu_\alpha\}$ 必有子网收敛于 $\mathscr{M}_1(X)$ 中的点.

证明 由本定理及定理 2-2-4 直接推出.□

这个推论在位势论中常用. 下面设 $X := \boldsymbol{R}^N$ 中，我们可在 $\mathscr{M}(X)$ 中建立更一般的定理.

定义 $\mathscr{M}^+(X)$的一个子集 $\mathscr{N}$ 称为**弱有界的**，如果对每个 $f \in \boldsymbol{K}(X)$，存在一个常数 C_f 使得所有$\mu \in \mathscr{N}$都有 $|\mu(f)| < C_f$.

容易验证， $\mathscr{M}^+(X)$的一个子集 $\mathscr{N}$ 弱有界当且仅当对 X 的任意紧集 K, 存在一个常数 C_K 使得

$$\mu(K) < C_K \;, \qquad\qquad \mu \in \mathscr{N}.$$

定理 2-8-8 $\mathscr{M}^+(X)$的弱有界子集 $\mathscr{N}$ 是列紧的，即 $\mathscr{N}$ 中包含了浑收敛的列.

证明 参见 Landkof [32]. 这里只说明，由于 $X := \boldsymbol{R}^N$ 是可分的度量空间，可证明 $\mathscr{M}^+(X)$中关于浑拓扑也是可分的，故 $\mathscr{N}$ 紧的充要条件可用点列代替点网来描绘. □

第二篇 调和空间位势论

本篇是全书的中心，介绍现代位势理论中最重要且最有代表性的部分，即调和空间位势理论这个本世纪五十年代起开始形成并不断得到发展的公理系统论. 该理论将已有的关于椭圆型、抛物型等微分方程的位势论做了统一处理，并在调和空间中通过 Markov 半群与随机过程建立紧密的联系. 该理论不但大大推进了位势论自身整体的发展，为更新的研究方向，诸如扫除空间论，H-锥论，非线性论的建立与发展奠定基础，同时也推进了概率位势论的形成和发展.

第三章 调和空间的直观背景

本章主要目的是为公理位势论阐述其在 $\boldsymbol{R}^N$ $(N \geq 2)$ 的一些直观背景，为原来不太了解位势论的读者提供一个引子. 但是，由于经典位势论的内容极其丰富，这里只能从中选择部分与建立调和空间理论的三大基本原理（即极小值原理、收敛原理、Dirichlet 问题的解）关系较为密切的概念与结论来介绍. 又，据现行普通大学课程安排，许多学生对调和函数及其性质的认识主要是通过复解析函数的学习，故我们用了一定篇幅来阐述在 $\boldsymbol{R}^N$ 没有（当 $N \geq 3$ 时也不可能）经过复函数也能得到的、调和函数的一些基本性质，一来出于整体上的需要，二来便于比较.

至于可能与下面各章有关内容的叙述基本类似者，或与本书

中心问题关连不太直接者，此处基本略去不叙，少数叙而不证．读者可参看第十一章的有关介绍．

为便于初学者，本章的证明写得较详细，且很少用到微积分和 Lebesgue 积分以外的工具．本章对有关 Radon 测度与广义测度的知识要求不高，只须有初步了解即可；关于它们的控制收敛定理等，与关于 Lebesgue 测度的同名定理实际上类似．

下面把 $\boldsymbol{R}^N (N \geq 2)$ 的元素（点）记作 x, y 等；用坐标表示时，$x = (x_1, \cdots, x_N)$，$y = (y_1, \cdots, y_N)$； x 的范数

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}\ .$$

把 $B := B(x, r) = \{ y \mid |y - x| < r \}$，称为以 x 为中心，r 为半径的球；$\partial B := \partial B(x, r) = \{ x \mid |y - x| = r \}$，称为球面．记 v_N 为单位球体积，$\pi_N := N v_N = 2\pi^{\frac{N}{2}} / \Gamma(\frac{N}{2})$ 为单位球面面积，特别 $\pi_2 = 2\pi$．熟知，$B(x, r)$ 的体积是 $v_N r^N$，球面积是 $\pi_N r^{N-1}$． 又，$\boldsymbol{R}^N$ 的点 x 与子集 A 之间的距离记作 $|x - A|$．

$\boldsymbol{R}^N$ 中以任意一点 $y := (y_1, \cdots, y_N)$ 为中心可建立如下球极坐标系(θ, r)：对任意一点 $x := (x_1, \cdots, x_N)$，令

$$r := |x - y|,\ \theta := (\theta_1, \cdots, \theta_{N-1}, \theta_N),$$

其中 $\theta_i := (x_i - y_i) / r,\ i = 1, 2, \cdots, N.$

那么$(\theta_1, \cdots, \theta_{N-1}, \theta_N)$ 是单位向量，每个θ_i是向量 $x - y$ 与第 i 根坐标轴正向的夹角的余弦．坐标变换 $(x_1, \cdots, x_N) \mapsto (\theta_1, \cdots, \theta_{N-1}, r)$ 的 Jacobi 行列式的绝对值为

$$\left| \frac{\partial (x_1, \cdots, x_N)}{\partial (\theta_1, \cdots, \theta_{N-1}, r)} \right| = \frac{r^{N-1}}{|\theta_N|}.$$

对 $\overline{B}(y, \rho) := \overline{B(y, \rho)}$ 上的可积函数 $f(x)$ 的积分，若 $f(x)$ 在坐标变换下对应的函数为 $f(\theta, r)$，则

$$\int_{B(y,\rho)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\rho r^{N-1} \left[\int_{|\theta|=1} f(\theta, r)\,\mathrm{d}\sigma(\theta) \right] \mathrm{d}r,$$

其中 $d\sigma(\theta):=\frac{1}{|\theta_N|}d\theta_1\cdots d\theta_{N-1}$，而 $\int\cdot\ dx$ 表示 N 维 Lebesgue 积分. 一般地，$\int f d\sigma$ 表示 f 关于 $N-1$ 维曲面上的面积分.

§3.1 调和函数与经典位势的概念

设 D 为 $\boldsymbol{R}^N$ 的一个开集，从 $C^2(D)$ 到 $C(D)$ 的 Laplace 算子在直角坐标系的形式为

$$\Delta:=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

定义 当 $u\in C^2(D)$ 且 $\Delta u=0$ 在 D 处处成立时，称 u 在 D 调和或 u 为 D 上的调和函数.

我们知道，平面区域 D 上的解析函数的实部与虚部都是 D 上的调和函数; 实常数是 $\boldsymbol{R}^N$ 的任何开集 D 上的调和函数. 开集 D 上的调和函数全体构成一个实向量空间.

对那些仅与到一定点 $y\in D$ 的距离 $r:=|y-x|$ 有关的函数 $u(x)=u(r)$，Laplace 算子采用球极坐标的形式具特别简单的表达式，即

$$\Delta u=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{N-1}{r}\frac{du}{dr},\qquad r\neq 0 \tag{1.1}$$

在 $\boldsymbol{R}^N\setminus\{y\}$ 满足 $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{N-1}{r}\frac{du}{dr}=0$ 的函数 u 为:

$$\text{当 } N=2 \text{ 时},\ u=\alpha\log r+\beta;$$

$$\text{当 } N\geq 3 \text{ 时},\ u=\frac{\alpha}{r^{N-2}}+\beta,$$

其中 α,β 为任意实常数. 特别当 $\alpha=1,\beta=0$ 时，得到 $u=-\log r$ (当 $N=2$) 和 $u=r^{2-N}$ (当 $N\geq 3$)，这两个函数都是 $\boldsymbol{R}^N\setminus\{y\}$ 上的、

特殊的调和函数，在今后位势的讨论中起很大作用. 令

$$K(x, y)=\begin{cases}-\log|x-y|, x \neq y, \\ \infty, \quad x=y,\end{cases} \quad \text{当 } N=2\text{；}$$

$$K(x, y)=\begin{cases}|x-y|^{2-N}, x \neq y, \\ \infty, \quad x=y\end{cases} \quad \text{当 } N>2.$$

那么 $K(x, y)$ 关于 x, y 是对称的，$x \mapsto K(x, y)$ 是在整个 $\boldsymbol{R}^N$ 上定义的下半连续函数，在 $\boldsymbol{R}^N \setminus \{y\}$ 调和.

定义 称 $K(x, y)$ 为 $\boldsymbol{R}^N$ 上以 y 为极的**基本调和函数**，也称为**基本核**. 设 μ 是 $\boldsymbol{R}^N$ 上的带号（广义）测度，当下面的积分有意义时，由它定义的 $\boldsymbol{R}^N$ 上的函数 U^μ：

$$\mathrm{U}^\mu(x)=\int K(x, y)\, \mathrm{d}\mu(y),,$$

叫做**经典位势**，当 N=2 时又叫**对数位势**，当 $N \geq 3$ 时又叫 **Newton 位势**.

这里的积分区域未标名，表示是在全空间 $\boldsymbol{R}^N$ 上的积分. 今后都采用同样约定. 有关经典位势的性质的介绍将在 § 3.8 进行.

§ 3. 2 Green 公式与平均值原理

首先，复习一个很有用的公式 — **Green 公式.**

设 $\boldsymbol{R}^N$ 的开集 D 具有光滑的边界 ∂D，从 D 的闭包 $\overline{D}$ 的一个邻域 G 到 $\boldsymbol{R}^N$ 的向量函数 $w:=(w_1,\cdots,w_N)$ 的每个分量 $w_i:=w_i(x)$ 有一阶连续偏导数. 记 w 的散度为

$$\operatorname{div} w:=\sum_{i=1}^N \frac{\partial w_i}{\partial x_i};$$

用 $\mathbf{n}=\mathbf{n}(x)$ 表示边界曲面在点 $x \in \partial D$ 的单位外法向量，则有下面 Gauss 公式成立：

$$\int_D \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial D} (w, \mathbf{n}) \, d\sigma \tag{2.1}$$

若函数 u, v 在 G 有二阶连续偏导数，那么由

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u\Delta v + (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$$

及上述公式(2.1)得

$$\int_D u \Delta v \, dx + \int_D (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) \, dx$$
$$= \int_{\partial D} (u \operatorname{grad} v, \mathbf{n}) \, d\sigma = \int_{\partial D} u (\operatorname{grad} v, \mathbf{n}) \, d\sigma$$
$$= \int_{\partial D} (u \, D_{\mathbf{n}} v) \, d\sigma$$

其中 $D_{\mathbf{n}} v$ 表示 v 的外法向导数. 同理,

$$\int_D v \Delta u \, dx + \int_D (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) \, dx = \int_{\partial D} (v \, D_{\mathbf{n}} u) \, d\sigma$$

两式相减得

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial D} (u \, D_{\mathbf{n}} v - v \, D_{\mathbf{n}} u) \, d\sigma$$

这就是 Green 公式. 若特取 $v = 1$ (即 $v \equiv 1$), 就得到

$$\int_D \Delta u \, dx = \int_{\partial D} (D_{\mathbf{n}} u) \, d\sigma. \qquad \square$$

由上述 Green 公式立即推出下面定理:

定理 3-2-1 (Gauss 积分定理) 若函数 u 在 D 的闭包的一个邻域调和，则

$$\int_{\partial D} (D_{\mathbf{n}} u) \, d\sigma = 0$$

Gauss 积分定理表明，若 u 在开集 G 中调和，则它的梯度流出任一光滑子区域 D ($\overline{D} \subset G$)的流量等于 0. 反之，也可证明，若 u 在开集 G 有连续的一阶偏导数，且对任一闭包在 G 的球 B，u 的梯度流出 B 的流量为 0，则 u 在 G 调和.

定理 3-2-2 设 $B := B(y, \rho)$，u 在 $\overline{B}$ 的一个邻域 G 有二阶连续偏导数，则对于任意 $x \in B, z \in \overline{B}$ 及 $r := |x - z|$，有下面公式成立:

当 $N = 2$ 时,

$$2\pi u(x) = \int_{\partial B} [(-\log r) D_{\mathbf{n}} u - u \, D_{\mathbf{n}} (-\log r)] \, d\sigma(z)$$

$$-\int_B(-\log r)\,\Delta u\,\mathrm{d}z;$$

当 $N \ge 3$ 时,

$$(N-2)\pi_N u(x) = \int_{\partial B}[(r^{2-N})\,\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\,u - u\,\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\,(r^{2-N})]\mathrm{d}\sigma(z)$$
$$-\int_B(r^{2-N})\,\Delta u\,\mathrm{d}z\,.$$

证明 当 $N = 2$, 令 $v := -\log|x-z| = -\log r$. 那么, 对取定的 $x \in B$, v 作为 z 的函数在 $\boldsymbol{R}^N\setminus\{x\}$调和, 取充分小的$\eta > 0$, 使得

$$\overline{B}(x,\eta) \subset B(y,\rho)\,.$$

令 $D := B(y,\rho)\setminus\overline{B}(x,\eta)$. 由 Green 公式,

$$\int_D(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D}(u\,\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\,v - v\,\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\,u)\,\mathrm{d}\sigma(z),$$

注意到 D 的边界由两个球面组成及 v 的调和性, 得

$$\int_D(-v\Delta u)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(x,\rho)}(u\,\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\,v - v\,\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\,u)\,\mathrm{d}\sigma(z)$$
$$-\int_{\partial B(x,\eta)}(u\,\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\,v - v\,\mathrm{D}_{\mathbf{n}}\,u)\,\mathrm{d}\sigma(z), \tag{2.2}$$

可以断言, 上面(2.2)式左边当 $\eta\to 0$ 时以

$$\int_{B(y,\rho)}(-v\,\Delta u)\,\mathrm{d}z$$

为极限. 事实上, 由于Δu 与 $r\log r$ 在 B 为有界, 当 $\eta < 1$ 时,

$$\int_{B(x,\eta)}|v|\,\mathrm{d}z \le \int_{[0,\infty)}(-2\pi r\log r)\,\mathrm{d}r$$

有界, 从而$(-v\,\Delta u)$在 B 可积, 由积分的绝对连续性证实这个断言成立.

上面(2.2)式右边的第一个积分与$\eta\to 0$ 无关. 下面考察第二个积分. 由条件, u 的一阶偏导数在 G 连续, 从而 grad u 在 $\overline{B}$ 有界, 故存在实常数 $k > 0$ 使得

$$|\mathrm{D}_{\mathbf{n}}u| = |(\mathrm{grad}\;u,\mathbf{n})| = |\mathrm{grad}\;u| \le k < \infty.$$

当$\eta\to 0$ 时,

$$\left|\int_{\partial B(x,\eta)}(-v\,\mathrm{D}_{\mathbf{n}}u)\mathrm{d}\sigma(z)\right|$$

$$\le k\int_{\partial B(x,\eta)}(-\log r)\,\mathrm{d}\sigma(z)$$
$$=2k\pi(-\eta\log\eta)\to 0.$$

因 $v(z)=-\log r$，当 $z\in\partial B$ 时 $\mathrm{D_n}v=-\eta^{-1}$. 从而

$$\int_{\partial B(x,\eta)}(u\,\mathrm{D_n}v)\,\mathrm{d}\sigma(z)=-\eta^{-1}\int_{\partial B(x,\eta)}u\,\mathrm{d}\sigma(z)\ ,$$

由于 u 连续，利用积分平均值定理知右边的积分当 $\eta\to 0$ 时以 $-2\pi u(x)$为极限. 于是，在(2.2)式两边令$\eta\to 0$，得

$$\int_B(-\log r)\,\Delta u\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_{\partial B}[(-\log r)\,\mathrm{D_n}u-u\,\mathrm{D_n}(-\log r)]\mathrm{d}\sigma(z)-2\pi u(x)\ ,$$

移项后就得到所要的结果.

当 $N\ge 3$ 时，令 $v(z)=|z-x|^{2-N}$，可完全类似证明. □

定理 3-2-3（球面平均定理） 若函数 u 在球 $B:=B(y,\rho)$的闭包的一个邻域调和，则 u 在球心的值等于它在球面的平均:

$$u(y)=\frac{1}{\pi_N\cdot\rho^{N-1}}\int_{\partial B}u(z)\,\mathrm{d}\sigma(z)\,. \tag{2.3}$$

证明 当 $N\ge 3$ 时，注意到在 B 上有 $\Delta u=0$，由定理 3-2-2 得

$$u(y)=\frac{1}{(N-2)\pi_N}\int_{\partial B}[(|z-y|^{2-N})\mathrm{D_n}u-u\mathrm{D_n}(|z-y|^{2-N})]\,\mathrm{d}\sigma(z)$$

因 $z\in\partial B$, 故

$$|y-z|=\rho,\qquad \mathrm{D_n}(|z-y|^{2-N})=(2-N)\,\rho^{1-N},$$

代入上式得

$$u(y)=\frac{1}{(N-2)\pi_N}\left[\rho^{2-N}\int_{\partial B}\mathrm{D_n}u\mathrm{d}\sigma(z)-(2-N)\,\rho^{1-N}\int_{\partial B}u\,\mathrm{d}\sigma(z)\right],$$

由定理 3-2-1，$\int_{\partial B}\mathrm{D_n}u\,\mathrm{d}\sigma(z)=0$ ，从而得到(2.3)式. $N=2$ 的情形可类似证明. □

上一定理的条件可稍为减轻，即有下面

定理 3-2-4 若函数 u 在球 $B:=B(y,\rho)$ 调和，在 B 的闭包连

续，则(2.3)式同样成立.

证明 对任意 $0<r<\rho$, 由上一定理恒有

$$u(y)=(\pi_N)^{-1}r^{1-N}\int_{\partial B(y,r)}u(z)\,\mathrm{d}\sigma(z)$$
$$=(\pi_N)^{-1}\int_{|\theta|=1}u(\theta,r)\,\mathrm{d}\sigma(\theta).$$

由于 u 在 B 的闭包连续，可令 $r\to\rho$, 交换极限与积分的次序，便得到 (2.3) 式. □

定理 3-2-5（球体平均定理） 若函数 u 在球 $B:=B(y,\rho)$ 调和，在 B 的闭包连续，则 u 在球体的平均等于 u 在球心的值，即

$$u(y)=\frac{1}{\nu_N\rho^N}\int_B u(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 利用 Fubini 定理及上一定理得

$$\frac{1}{\nu_N\rho^N}\int_B u(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\nu_N\rho^N}\int_0^\rho r^{N-1}\left[\int_{|\theta|=1}u(\theta,r)\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\right]\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi_N}{\nu_N\rho^N}\int_0^\rho r^{N-1}u(y)\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi_N}{N\nu_N}u(y)=u(y).$$

最后一个等式成立是由于$\pi_N=N\,\nu_N$. □

利用球体平均定理可以证明，除非常数，不存在别的在整个$\boldsymbol{R}^N$定义的下有界或上有界的调和函数，即

定理 3-2-6 （Liouville-Picard 定理） 若 u 在 $\boldsymbol{R}^N$ 调和且上有界或下有界，则 u 为常值函数.

证明 由于 u 和 $-u$ 同时在 $\boldsymbol{R}^N$ 调和，不妨假设 u 为下有界，即存在实数α，使得 $u\geq\alpha$ 在 $\boldsymbol{R}^N$ 恒成立. 令 $h:=u-\alpha$，则 h 在 $\boldsymbol{R}^N$ 为正调和函数. 对于任意两点 x，y， 记 $e:=|x-y|$. 对任意实数$\delta>0$，令$\rho:=\delta+e$，于是 $B(x,\delta)\subset B(y,\rho)$, 据上一定理，

$$\nu_N\delta^N h(x)=\int_{B(x,\delta)}h(z)\,\mathrm{d}z\leq\int_{B(y,\rho)}h(z)\,\mathrm{d}z=\nu_N\rho^N h(y).$$

因此

$$\left(\frac{\delta}{\delta+e}\right)^N h(x)\le h(y),$$

令$\delta\to\infty$，得$h(x)\le h(y)$. 同理可证，$h(y)\le h(x)$. 故$h(x)=h(y)$. 由x, y的任意性，知h 从而 u是常数. □

§ 3.3 Poisson 积分公式

平面上关于调和函数的 Poisson 积分公式通常是借助于解析函数的 Cauchy 公式来证明的. 这里将利用定理 3-2-2 来得到在$\boldsymbol{R}^N (N\ge 2)$ 的相应公式，并用以推出调和函数的一些性质.

对$\boldsymbol{R}^N$ 的球$B:=B(y,\rho)$ 和任一点$x, x\ne y$, 将

$$x^*=y+\rho^2|x-y|^{-2}(x-y) \tag{3.1}$$

称为 x 关于球面∂B 的反演点. 显然，x^* 位于从球心出发经x的射线上且满足

$$|x-y||x^*-y|=\rho^2. \tag{3.2}$$

映照$x\mapsto x^*$ 称为$\boldsymbol{R}^N\setminus\{y\}$ 关于球面∂B 的反演. 若补充定义y与$\boldsymbol{R}^N$ 在单点紧致化下的添加点 ∞ 互为反演点，就得到 $\boldsymbol{R}^N\cup\{\infty\}$ 上的反演. 显然，∂B 上的点是这个映射下的不动点.

引理 3-3-1 对取定的球$B:=B(y,\rho)$ 中非球心y的点x，球面∂B上任意点z到x与到x^*的距离之比为常数，即

$$\frac{|z-x|}{|z-x^*|}=\frac{|x-y|}{\rho}, \qquad z\in\partial B$$

证明 向量$z-y$与$x-y$处于同一个二维平面，设它们之间的夹角为 α，由余弦定理，

$$|z-x|^2=\rho^2+|x-y|^2-2\rho|x-y|\cos\alpha, \tag{3.3}$$

$$|z-x^*|^2=\rho^2+|x^*-y|^2-2\rho|x^*-y|\cos\alpha, \tag{3.4}$$

从(3.4) 求出 $\cos\alpha$的表达式并用 (3.2) 代入得

$$\cos\alpha=\frac{(\rho^2-|z-x*|^2)|x-y|^2+\rho^4}{2\rho^3|x-y|^2},$$

再代入(3.3)，就得到所要的等式.

定义 对球 $B=B(y,\rho)$中取定的点 x，下面表达式确定的函数叫做以 x 为极, B 上的 **G** 函数：

当 $N=2$ 时,

$$G_x(z)=\begin{cases}\log\dfrac{|y-x|}{\rho}\dfrac{|z-x*|}{|z-x|}, & z\in B\setminus\{x\},x\neq y,\\ \log\dfrac{\rho}{|z-y|}, & z\in B\setminus\{x\},x=y,\\ \infty\ , & z=x\end{cases}$$

当 $N\geq 3$ 时,

$$G_x(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{|z-x|^{N-2}}-\left(\dfrac{\rho}{|x-y|}\right)^{N-2}\dfrac{1}{|z-x*|^{N-2}}, & z\in B\setminus(x),x\neq y,\\ \dfrac{1}{|z-x|^{N-2}}-\dfrac{1}{\rho^{N-2}}, & z\in B\setminus\{x\},x=y,\\ \infty, & z=x.\end{cases}$$

由引理 3-3-1，$G_x(z)$ 在球面∂B 以 0 为极限且有连续的方向导数.

定理 3-3-2 若 u 在球 B 的闭包的一个邻域调和，$x\in B$ 且 $x\neq y$，则有

$$u(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}u(z)\mathrm{D}_{\mathbf{n}}G_x(z)\mathrm{d}\sigma(z),\qquad 当\ N=2,$$

$$u(x)=-\frac{1}{(N-2)\pi_N}\int_{\partial B}u(z)D_nG_x(z)d\sigma(z),\text{ 当 }N\geq 3 .$$

证明 1) 当 $N=2$，注意到 u 调和，由定理 3-2-2，

$$2\pi u(x)=\int_{\partial B}[(-\log|x-z|)D_n u - u D_n(-\log|x-z|)]d\sigma(z), \tag{3.5}$$

由于 $\log|z-x^*|$ 在 B 的闭包的一个邻域调和，据 Green 公式，

$$0=\int_{\partial B}[(-\log|x^*-z|)D_n u-u D_n(-\log|x^*-z|)]d\sigma(z), \tag{3.6}$$

由 u 的调和性，据定理 3-2-1，对任意实数 $\alpha>0$ 有

$$0=\int_{\partial B}[(-\log\alpha)D_n u\, d\sigma(z),$$

结合(3.6) 得

$$0=\int_{\partial B}[(\log\alpha|x^*-z|)D_n u-u D_n(\log\alpha|x^*-z|)]d\sigma(z), \tag{3.7}$$

把 (3.6) 与 (3.7) 两边相加得

$$2\pi u(x)=\int_{\partial B}[(\log(\alpha|x^*-z|/|x-z|))D_n u - u D_n(\log(\alpha|x^*-z|/|x-z|))]d\sigma(z),$$

令 $\alpha=|y-x|/\rho$，由引理知，上面被积函数的第一项变成 0，故得

$$2\pi u(x)=\int_{\partial B}-u(z)D_n(\log\frac{|y-x||x^*-z|}{\rho|x-z|})d\sigma(z),$$

从而可得定理结论.

2) 当 $N\geq 3$ 时，类似地，由定理 3-2-2，

$$(N-2)\pi_N u(x) = \int_{\partial B}[(|x-z|^{2-N})D_n u-uD_n(|x-z|^{2-N})]d\sigma(z) \tag{3.8}$$

由于$|x^*-z|^{2-N}$ 在 B 的闭包的一个邻域调和，

$$0=\int_{\partial B}[(|x^*-z|^{2-N})D_n u-u D_n(|x^*-z|^{2-N})]d\sigma(z) \tag{3.9}$$

设实数$\alpha>0$，用 $-\alpha$ 乘(3.9) 两边再与 (3.8) 相加得

$$(N-2)\pi_N u(x)=\int_{\partial B}[(|x-z|^{2-N}-\alpha|x^*-z|^{2-N})D_n u(z)$$

$$-u(z)\, D_{\mathbf{n}}\,(|x-z|^{2-N}-\alpha\,|x^*-z|^{2-N})]\, \mathrm{d}\sigma(z).$$

由引理 3-3-1，可取常数

$$\alpha=\left(\frac{\rho}{|x-y|}\right)^{N-2}, \tag{3.10}$$

代入上式，被积函数的第一项变成 0，得

$$(N-2)\,\pi_N\, u(x)$$
$$=-\int_{\partial B}[u(z)D_{\mathbf{n}}\,(|x-z|^{2-N}-\alpha\,|x^*-z|^{2-N})]\mathrm{d}\sigma(z).\ \Box$$

定理 3-3-3 (Poisson 积分公式) 若 u 在球 $B=B(y,\rho)$ 的闭包的一个邻域调和，则

$$u(x)=\frac{1}{\rho\pi_N}\int_{\partial B}u(z)\,\frac{\rho^2-|x-y|^2}{|z-x|^N}\,\mathrm{d}\sigma(z),\qquad x\in B. \tag{3.11}$$

证明 首先注意到，当 x 为球心 y 时，由平均定理 3-2-3，知 (3.11) 成立．下面取定 $x\in B$，$x\neq y$．因考虑在边界的积分，可设 $z\neq x$．令

$$\mathrm{P}(x,z):=\frac{\rho^2-|x-y|^2}{|z-x|^N}.$$

由定理 3-3-2，只须证明，

当 $N=2$ 时，$\qquad \mathrm{P}(x,z)=-\rho\, D_{\mathbf{n}}G_x(z),\qquad z\in\partial B,$

当 $N\geq 3$ 时，$\qquad \mathrm{P}(x,z)=\rho\,(2-N)^{-1}D_{\mathbf{n}}G_x(z),\qquad z\in\partial B.$

下面以 $N\geq 3$ 的情况为例证之，而 $N=2$ 的情况类似．这时

$$G_x(z)=\frac{1}{|z-x|^{N-2}}-\frac{\rho^{N-2}}{|y-x|^{N-2}}\frac{1}{|z-x^*|^{N-2}},$$

易知，在 $z\in\partial B$ 曲面的单位法向量 $\mathbf{n}=\dfrac{z-y}{\rho}$，

$$\mathrm{grad}\,(|z-x|^{2-N})=\frac{(2-N)(z-x)}{|z-x|^N},$$

$$\operatorname{grad}\left(|z-x^*|^{2-N}\right)=\frac{(2-N)(z-x^*)}{|z-x^*|^N}.$$

从而，

$$\operatorname{grad} G_x(z)=\frac{(2-N)(z-x)}{|z-x|^N}-\alpha\frac{(2-N)(z-x^*)}{|z-x^*|^N},$$

其中α由 (3.10) 定义. 利用引理 3-3-1 及x^* 表达式 (3.1) 得，

$$\operatorname{grad} G_x(z)=(2-N)\frac{(\rho^2-|y-x|^2)(z-y)}{\rho^2-|z-x|^N},$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\mathbf{n}}G_x(z)&=(\mathbf{n},\operatorname{grad} G_x(z))\\
&=\left(\frac{z-y}{\rho},(2-N)\frac{(\rho^2-|y-x|^2)(z-y)}{\rho^2-|z-x|^N}\right)\\
&=(2-N)\frac{(\rho^2-|y-x|^2)}{\rho|z-x|^N}\\
&=\frac{2-N}{\rho}\mathrm{P}(x,z).\quad\square
\end{aligned}$$

推论 3-3-4 $\dfrac{1}{\rho\pi_N}\displaystyle\int_{\partial B}\frac{\rho^2-|x-y|^2}{|z-x|^N}\,\mathrm{d}\sigma(z)=1,\qquad x\in B.$

证明 因为常值函数$u=1$在球$B=B(y,\ \rho)$的闭包的一个邻域调和，由(3.11)式立得. □

为考虑积分与微分次序的交换问题，引入下面

引理 3-3-5 设U和K分别为$\boldsymbol{R}^N$的开集与紧集，$w:=w(x,z)$为$U\times K$上的连续函数，λ为K上的广义测度，则

$$V(x):=\int_K w(x,z)\,\mathrm{d}\lambda(z)\quad,x\in U,$$

为U上的连续函数； 进一步，若w关于x的每一个一阶偏导数

$$\frac{\partial w(x,z)}{\partial x_i},\qquad i=1,2,\cdots,N,$$

在 $U\times K$ 连续，则 V 关于 x 的每一个一阶偏导数在 U 也连续且

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}=\int_K\frac{\partial w(x,z)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\lambda(z),\qquad x\in U,\ i=1,2,\cdots,N.$$

证明 1) 对 U 中任意取定的点 x，有充分小的$\delta>0$，使得 $\overline{B}(x,\delta)\subset U$. 因 w 在紧集 $\overline{B}(x,\delta)\times K$ 上连续而且一致有界，据 Lebesgue 控制收敛定理，对任何收敛于 x 的点列$\{x_i\}$有

$$\lim_{i\to\infty}V(x_i)=\int_K\lim_{i\to\infty}w(x_i,z)\,\mathrm{d}\lambda(z)=\int_K w(x,z)\,\mathrm{d}\lambda(z)=V(x),$$

这就证明了 V 在 x 连续.

2) 设 w 关于 x 的每一个一阶偏导数 $\dfrac{\partial w(x,z)}{\partial x_i}$，$i=1,2,\cdots,N$, 在 $U\times K$ 连续. 任取单位向量 a，显然（关于 x 的）方向导数 $\mathrm{D}_a w$ 在 U 存在且在 $U\times K$ 连续. 我们要证 $\mathrm{D}_a V$ 在 U 存在且连续. 对 U 中任意取定的点 x，选 $\delta>0$，使 $\overline{B}(x,\delta)\subset U$. 又取 $\rho>0$ 充分小使得 $x+\rho a\in B$, 利用微分中值定理，对每个 $\rho>0$ 和 $z\in K$, 在 x 与 $x+\rho a$ 的连线上存在点 $x_{\rho,x}$ 满足

$$\frac{w(x+\rho a,z)-w(x,z)}{\rho}=\mathrm{D}_a w(x_{\rho,x},z),\tag{3.13}$$

因 $\mathrm{D}_a w(x,y)$ 在紧集 $\overline{B}(x,\delta)\times K$ 上连续而一致有界，据 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_a V(x)&=\lim_{\rho\to0}\frac{V(x+\rho a)-V(x)}{\rho}\\&=\lim_{\rho\to0}\int_K\frac{w(x+\rho a,z)-w(x,z)}{\rho}\,\mathrm{d}\lambda(z)\\&=\lim_{\rho\to0}\int_K\mathrm{D}_a w(x_{\rho,x},z)\,\mathrm{d}\lambda(z)\end{aligned}$$

$$= \int_K \lim_{\rho \to 0} D_a w(x_{\rho,x}, z)\, d\lambda(z)$$

$$= \int_K D_a w(x, z)\, d\lambda(z).$$

由第 1 段知，$D_a V$ 在 U 连续. 从而证得所要的结论. □

推论 3-3-6 在上一定理中，特当 U 是一个有界开集 D 的开子集，$K = \partial D$，f 是 ∂D 上关于 $N-1$ 维 Lebesgue 测度 $d\sigma$ 的可积函数时，若取广义测度 $\lambda := f\sigma$，(即 $d\lambda(z) = f d\sigma(z)$)，则有同样结论.

定义 对一个球 $B := B(y, \rho)$，称

$$P(x, z) := \frac{\rho^2 - |x-y|^2}{|z-x|^N}$$

为球 B 上的 **Poisson 核**.

易验证，对任意 $z \in \partial B$，x 的函数 $P(x, z)$（或简记为 $P(\cdot, z)$）在 $\boldsymbol{R}^N \setminus \{z\}$ 的任意阶偏导数连续且为调和.

定理 3-3-7 若 u 在开集 D 调和，则 u 在 D 有任意阶连续的偏导数，且它们也在 D 调和.

证明 对任意 D 中任一点 y，取定一个球 $B := B(y, \rho)$，使其闭包在 D 中. 于是，据定理 3-3-3，

$$u(x) = \frac{1}{\rho \pi_N} \int_{\partial B} P(x, z) u(z)\, d\sigma(z), \qquad x \in B, \qquad (3.14)$$

u 在球面 ∂B 上的限制连续，当然可积；x 的函数 $P(x, z)$ 的每个偏导数 $\dfrac{\partial P(x,z)}{\partial x_j}$ 在 $B \times \partial B$ 连续，由推论3-3-6，u 的每个偏导数 $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}$ 在 B 连续且

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho \pi_N} \int_{\partial B} \frac{\partial P(x,z)}{\partial x_j} u(z)\, d\sigma(z),$$

$$x \in B,\ j = 1, 2, \cdots, N.$$

由于 $P(\cdot, z)$ 在 $\boldsymbol{R}^N\setminus\{z\}$的任意阶偏导数连续，用数学归纳法，反复利用推论 3-3-6，就证得 u 为无限次可微. 因 $\Delta P(\cdot, z) = 0$ 在 B 成立，故

$$\Delta\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right] = \int_{\partial B} \Delta\left[\frac{\partial P(x,z)}{\partial x_j}\right] u(z)\, d\sigma(z)$$

$$= \int_{\partial B} \frac{\partial}{\partial x_j}[\Delta P(x, z)]u(z)\, d\sigma(z) = 0 \ ,$$

$$x \in B, \qquad j = 1,2,\cdots, N.$$

这说明 $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}$ 在 B 调和. 类似的，可证明 u 的各阶偏导数在 B 调和. 由于 B 是任意的，上面在 B 证明的结论也在 D 成立. □

定义 对于球 $B := B(y, \rho)$的边界∂B上的广义测度λ，下面定义的函数 $\mathrm{PI}(\lambda, B)$ 称为关于λ在 B 的 **Poisson 积分**：

$$\mathrm{PI}(\lambda, B)(x) = \frac{1}{\rho\pi_N} \int_{\partial B} P(x, z)d\lambda(z), \qquad x \in B, \tag{3.15}$$

特别，当 $\lambda = f\sigma$，其中 f 是∂B上的、关于测度 $d\sigma$的可积函数时，把 $\mathrm{PI}(\lambda, B)(x)$记作 $\mathrm{PI}(f, B)(x)$ ，称为f在 B 的 **Poisson 积分**.

推论 3-3-8 上述广义测度λ在 B 的 Poisson 积分 $\mathrm{PI}(\lambda, B)$在 B 调和. 特别，$\mathrm{PI}(f, B)$ 在 B 调和.

注 在第八章我们将再次涉及 Poisson 核，把 $\mathrm{PI}(f,B)$改写成 $H_B f$，并称 H_B为调和核.

§3.4 极值原理与局部平均性质

本节将研究调和函数的这两个重要性质.

定义 设 u 为 R^N 的区域 D 上的函数. 称 u 满足**极大值原理**，若 u 非常数，就不可能在 D 的内部达到极大值，即不存在 $x \in D$，使得

$$u(x) = \sup_{y \in D} u(y);$$

称 u 满足**极小值原理**，若 u 非常数，就不可能在 D 的内部达到极小值，即不存在 $x \in D$，使得

$$u(x) = \inf_{y \in D} u(y).$$

显然，u 在 D 满足极大值原理当且仅当 $-u$ 在 D 满足极小值原理.

设 $B := B(y, \rho)$ 上的函数 f 为 Lebesgue 可测且在 B 上的 Lebesgue 积分有意义，则记 f 在球 B 的平均为

$$\mathrm{A}(f; y, \rho) := \frac{1}{\nu_N \cdot \rho^N} \int_B f(z)\mathrm{d}z; \tag{4.1}$$

若 ∂B 上的函数 f 为 Lebesgue 可测且 Lebesgue 积分有意义，则记 f 在球面的平均为

$$\mathrm{L}(f; y, \rho) := \frac{1}{\pi_N \cdot \rho^{N-1}} \int_{\partial B} f(z)\mathrm{d}\sigma(z). \tag{4.2}$$

定义 设 u 为开集 U 上的函数，如对任意 $x \in U$，存在 $\delta_x > 0$，使得对任何 $\delta: 0 < \delta < \delta_x$，恒有 $\overline{B}(x, \delta) \subset U$ 且满足

$$u(x) = \mathrm{L}(u; x, \delta),$$

则称 u 在 U 满足**局部平均性质**.

定理 3-4-1 函数 u 若在区域 D 上连续且满足局部平均性质，则 u 在 D 满足极大值原理且满足极小值原理.

证明 设 u 满足条件且不是常数. 令

$$E := \{ x \in D \mid u(x) = \sup_{y \in D} u(y) \};$$

我们要证 E 为空集，即 u 在 D 内部取不到极大值. 首先注意到，由于 u 连续，E 为相对闭集. 若 E 不是空集，可证 E 为相对开

的. 设 $x \in E$. 因 u 在区域 D 满足局部平均性质,故存在 $\delta_x > 0$, 使得对任何 $0 < \delta < \delta_x$, 恒有 $\overline{B}(x, \delta) \subset D$ 且满足 $u(x) = \mathrm{L}(u; x, \delta)$. 任取 $y \in B(x, \delta_x) \setminus \{x\}$, 令 $\delta_1 = |x - y|$, 那么

$$0 < \delta_1 < \delta_x, \qquad u(x) = \mathrm{L}(u; x, \delta_1),$$

即 $\mathrm{L}(u(x) - u; x, \delta_1) = 0$. 因为 $x \in E$, 所以 $u(x) - u \geq 0$ 在 $\partial B(x, \delta_1)$ 上处处成立, 故 $u(x) - u = 0$ 在 $\partial B(x, \delta_1)$ 上几乎处处成立; 又因 u 连续, 从而在 $\partial B(x, \delta_1)$ 上处处成立; 特别有 $u(x) = u(y)$. 由 $y \in B(x, \delta_x)$的任意性知, $B(x, \delta_x) \subset E$. 这说明 E 为开集.

但区域 D 是连通的, 它的既相对开又相对闭子集 E 只能是 D 本身或空集. 因 u 不是常数, 故 $E \neq D$. 所以 E 是空集. 这就证得 u 在 D 满足极大值原理. 同理可证, u 在 D 满足极小值原理.
□

定理 3-4-2 (调和函数的极值原理) 开集 U 上的调和函数 u 在 U 的每个连通分支上满足极大值原理及极小值原理.

证明 由定理 3-2-3, 调和函数 u 在 U 满足局部平均性质; 又, 开集的每个连通分支都是区域, 故由上一定理立即推出结论.
□

推论 3-4-3 1) 区域 D 上的正调和函数 u 在 D 上要么点点严格正, 要么恒等于 0 .

2) 有界开集 U 上的两个调和函数 u 和 v 若满足: 对每个 $z \in \partial U$, 都有 $\varliminf_{x \to z} u(x) \geq \varlimsup_{x \to z} v(x)$, 则在 U 上 $u \geq v$.

于是, 若 u 满足: 对每个 $z \in \partial U$, 都有边界极限 0, 即 $\lim_{x \to z} u(x) = 0$, 则 u 在 U 上恒等于 0 . □

定理 3-4-4 设开集 U 上的函数 f 为局部 Lebesgue 可积. 任意取定充分小的实数 $\delta > 0$, 那么在开集 $U_\delta := \{ x \in U \mid |x - \partial U| > \delta \}$上定义的函数 $f_\delta(x) := \mathrm{A}(f; x, \delta)$连续.

证明 设 U_δ非空，$y, x \in U_\delta$，则

$$
\begin{aligned}
&|f_\delta(x)-f_\delta(y)| \\
&=\left|\frac{1}{v_N \cdot \delta^N}\int_{B(x,\delta)} f(z)\,\mathrm{d}z-\frac{1}{v_N \cdot \delta^N}\int_{B(y,\delta)} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \frac{1}{v_N \cdot \delta^N}\int_E |f(z)|\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

其中 $E := B(x,\delta)\,\Delta\, B(x,\delta)$，即两球之并与两球之交的差集，即两球之对称差. 当 $x \to y$ 时，E 的 Lebesgue 测度趋于 0; 因 f 局部可积，在 U 的任意紧子集可积，据积分的绝对连续性知，当 $x \to y$ 时，

$$
\frac{1}{v_N \cdot \delta^N}\int_E |f(z)| dz \to 0,
$$

故 $|f_\delta(x)-f_\delta(y)| \to 0$，即$f_\delta(x) \to f_\delta(y)$. 这就证明了$f_\delta$ 在 U_δ 连续. □

注 3-4-5 进一步可证明，若f在 U连续，则$f_\delta(x)$ 在 U_δ有一阶连续的偏导数；一般地，若f在 U有 $k\,(k \geq 1)$ 阶连续的偏导数，则$f_\delta(x)$ 在 U_δ有 $k+1$ 阶连续的偏导数. 这也说明，若开集 U 上的函数 f 为局部 Lebesgue 可积，则经过两次平均得到的函数$(f_\delta)_\delta$在$(U_\delta)_\delta$ 有一阶连续的偏导数; 类似地， 经过 $k+1$ 次平均就得到具有 k 阶连续的偏导数的函数. 因此，若把求平均看成算子，可认为是一个光滑化算子. 这结论的证明留作练习. □

若开集 U 上的函数f 为局部 Lebesgue 可积,则对任意 $x \in U$, 任意 $0 < \delta < |x - \partial U|$ ，$\mathrm{A}(f; x, \delta)$ 存在且有限. 由 Fubini 定理， 关于 1 维 Lebesgue 测度对几乎所有 $0 < r < \delta$, $\mathrm{L}(f; x, r)$存在且有限，并且

$$
\mathrm{A}(f; x, \delta) = \frac{\pi_N}{v_N \cdot \delta^N}\int_0^\delta \mathrm{L}(f; x, r)\; r^{N-1}\mathrm{d}r
$$

$$=\frac{N}{\delta^N}\int_0^\delta \ \mathrm{L}(f;x,r)\ r^{N-1}\mathrm{d}r \tag{4.3}$$

从下面定理可知，平均性质实为调和函数的特征.

定理 3-4-6 设 u 为开集 U 上的实函数，那么，u 在 U 调和的充要条件是：u 在 U 局部可积且对每个 $x\in U$，对几乎所有 δ：$0<\delta<|x-\partial U|$，满足

$$u(x)=\mathrm{L}(\,u;\,x,\,\delta) \tag{4.4}$$

证明 由定理 3-2-3 知必要性成立. 下面证充分性. 由(4.3)式知，对每个 $x\in U$，对所有 $0<\delta<|x-\partial U|$，$u(x)=\mathrm{A}(\,u;\,x,\ \delta)$. 据定理 3-4-3，$x\in U_\delta$ 且在 U_δ 上 $u=u_\delta$ 连续，即在 x 连续. 因 x 是任意的，故 u 在 U 连续. 从而对所有 $0<\delta<|x-\partial U|$，(4.4)成立. 令

$$\xi(t)=\begin{cases} a_N\cdot\exp[(t^2-1)^{-1}], & 0\le t<1,\\ 0, & t\ge 0\end{cases},$$

其中 a_N 满足 $\pi_N\cdot\int_0^\infty t^{N-1}\xi(t)dt=1$. 任意取定充分小的 $\delta>0$，定义 U_δ 上的函数 $\mathrm{A}_\delta u$：

$$\mathrm{A}_\delta u(x)=\frac{1}{\delta^N}\int_{R^N}\ \xi\left(\frac{|x-z|}{\delta}\right)u(z)\mathrm{d}\,z \tag{4.5}$$

因为$\xi(|x|)$ 在 $\boldsymbol{R}^N$ 无限次可微，同时上述积分实际上是在 $B(x,\ \delta)$ 进行的，可看成在一个包含 $B(x,\delta)$的适当紧集上的积分，由引理 3-3-5 可推出，U_δ上的函数 $\mathrm{A}_\delta u$ 无限次可微. 又，经变量替换及简单计算，并注意到 $\pi_N\cdot\int_0^\infty t^{N-1}\xi(t)\,\mathrm{d}\,t=1$，得

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_\delta u(x)&=\pi_N\cdot\int_0^\infty t^{N-1}\xi(t)\,\mathrm{L}(u;\,x,\,t)\mathrm{d}\,t\\&=u(x)\,\pi_N\cdot\int_0^\infty t^{N-1}\xi(t)\,\mathrm{d}\,t=u(x)\end{aligned}$$

在 U_δ上成立，故 u 在 U_δ 上无限次可微. 因 $\delta>0$ 是任意的，故

u 在 U 无限次可微.

这样一来，对 $x \in U, 0 < r < |x - \partial U|$，有

$$\frac{\partial L(u;x,r)}{\partial r} = \frac{1}{\pi_N} \int_{|\theta|=1} \frac{\partial u(\theta,r)}{\partial r} \mathrm{d}\sigma(\theta)$$

$$= \frac{1}{\pi_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} u(z) \, \mathrm{d}\sigma(z) .$$

在球 $B := B(x,r)$上应用 Green 公式（见 § 3.2）得

$$\int_B \Delta u(z) \, \mathrm{d}z = \pi_N \cdot r^{N-1} \frac{\partial L(u;x,r)}{\partial r} .$$

因 (4.4) 对所有$0 < \delta < |x - \partial U|$ 成立，故上式右边的导数等于0. 这说明对任意 $x \in U$，当 $0 < r < |x - \partial U|$时，在球 $B(x, r)$ 上 Δu 的积分恒为 0 . 因 u 在 U 无限次可微，Δu 在 U 连续，从而在 U 上 $\Delta u = 0$ 成立，即 u 在 U 调和. □

§ 3.5 球上的 Dirichlet 问题的解

设 U 为 $\boldsymbol{R}^N$ 上的有界开集，f 是边界∂U 上的实函数. 古典的 **Dirichlet** 问题是：求 U 上的满足下面边值条件的调和函数 u：对每个 $z \in \partial U$ 有

$$\lim_{x \to z} u(x) = f(z) . \tag{5.1}$$

本节限于讨论古典的 Dirichlet 问题.

定理 3-5-1 若 ∂U 上的函数f 不连续，则关于f 的 Dirichlet 问题在 U 上无解.

证明 用反证法. 假定f在某个 $z \in \partial U$ 不连续，但关于f的 Dirichlet 问题在 U 上有解 u.

于是，对任意 $\varepsilon > 0$，由(5.1)式知，存在 $\delta > 0$，使得

$$|u(x)-f(z)|<\varepsilon/2, \qquad x\in U\cap B(z,\delta).$$

设 $w\in\partial U\cap B(z,\delta/2)$，因为对 $z:=w$，(5.1)式也满足，故有 $r:0<r<\delta/2$，使得

$$|u(x)-f(w)|<\varepsilon/2, \qquad x\in U\cap B(w,r).$$

这样一来，对 $x\in U\cap B(w,r)\subset U\cap B(z,\delta)$，有

$$|f(w)-f(z)|\le|u(x)-f(z)|+|u(x)-f(w)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

即对任意 $w\in\partial U\cap B(z,\delta/2)$，都有 $|f(w)-f(z)|<\varepsilon$. 这说明 f 在 z 连续，与原假设矛盾. □

定理 3-5-2 若关于 ∂U 上的连续函数 f 的 Dirichlet 问题在 U 上有解，则其解唯一.

证明 设 u, v 都是所说的解，令 $w:=u-v$，则 w 在 U 调和且对每个 $z\in\partial U$，

$$\lim_{x\to z} w(x)=0.$$

由极值原理（推论 3-4-3），w 在 U 的每个连通分支恒等于 0．这说明 u 与 v 在 U 上恒等. □

由推论 3-3-8 知，对球面 $\partial B:=\partial B(y,\rho)$ 上的 Lebesgue 可积函数 f 的 Poisson 积分 $\mathrm{PI}(f,B)$ 是 B 上的调和函数. 进一步，我们有下面

定理 3-5-3 若 $\partial B:=\partial B(y,\rho)$ 上的 Lebesgue 可积函数 f 在 $\zeta\in\partial B$ 为有限连续，则

$$\lim_{x\to\zeta}\mathrm{PI}(f,B)(x)=f(\zeta). \tag{5.3}$$

从而，若 f 为 ∂B 上的连续实函数，则 $\mathrm{PI}(f,B)$ 就是 B 上关于 f 的 Dirichlet 问题解，而且这时 $\mathrm{PI}(f,B)(y)=\mathrm{L}(f;y,\rho)$.

证明 首先注意到，由推论 3-3-4，$\mathrm{PI}(1,B)(x)=1, x\in B$. 故

$$\mathrm{PI}(f(\zeta),B)(x)=\frac{1}{\rho\cdot\pi_N}\int_{\partial B}\mathrm{P}(x,z)f(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(z)=f(\zeta), \qquad x\in B. \tag{5.4}$$

因f在ζ为有限连续，故对任意$\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon/2, \qquad z\in\partial B\cap B(\zeta,2\delta). \tag{5.5}$$

由 $\mathrm{PI}(f,B)$ 的定义及 (5.4) 得，

$$\begin{aligned}
|\mathrm{PI}(f,B)(x)-f(\zeta)| &= \Big|\frac{1}{\rho\cdot\pi_N}\int_{\partial B}\mathrm{P}(x,z)f(z)\,\mathrm{d}\sigma(z) \\
&\quad -\frac{1}{\rho\cdot\pi_N}\int_{\partial B}\mathrm{P}(x,z)f(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(z)\Big| \\
&\le \frac{1}{\rho\cdot\pi_N}\int_{\partial B}\mathrm{P}(x,z)|f(z)-f(\zeta)|\,\mathrm{d}\sigma(z) \\
&= \frac{1}{\rho\cdot\pi_N}\int_{E}\mathrm{P}(x,z)|f(z)-f(\zeta)|\,\mathrm{d}\sigma(z) \\
&\quad +\frac{1}{\rho\cdot\pi_N}\int_{H}\mathrm{P}(x,z)|f(z)-f(\zeta)|\,\mathrm{d}\sigma(z) \\
&:= I+J,
\end{aligned}$$

其中E表示$\partial B\cap B(\zeta,2\delta)$，$H$表示 $\partial B\setminus B(\zeta,2\delta)$，$I$表示最后第二个等号右边的第一个积分，$J$表示第二个积分. 由 (5.5) 式，

$$I\le\frac{\varepsilon}{2\rho\cdot\pi_N}\int_E\mathrm{P}(x,z)\,\mathrm{d}\sigma(z)\le\frac{\varepsilon}{2\rho\cdot\pi_N}\int_{\partial B}\mathrm{P}(x,z)\,\mathrm{d}\sigma(z)\le\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

为估计J, 考虑$x\to\zeta$的情形, 当$x\in B\cap B(\zeta,\delta)$, $z\in\partial B\setminus B(\zeta,2\delta)$时，

$$|x-z|\ge|\zeta-z|-|\zeta-x|\ge2\delta-\delta=\delta.$$

因此 $$\mathrm{P}(x,z)=\frac{\rho^2-|x-y|^2}{|x-z|^N}\le\frac{\rho^2-|x-y|^2}{\delta^N}\ .$$

又，注意到f在∂B 为 Lebesgue 可积，故存在实数$k>0$使得

$$\frac{1}{\rho\cdot\pi_N}\int_{\partial B}(|f(z)|+|f(\zeta)|)\,\mathrm{d}\sigma(z)<k.$$

当$x\to\zeta$时, $|x-y|\to\rho$，故存在$0<\eta<\delta$, 使得当 $x\in B\cap B(\zeta,\eta)$时，

$$\mathrm{P}(x,z) \le \frac{\rho^2 - |x-y|^2}{\delta^N} < \frac{\varepsilon}{2k};$$

这时

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\rho \cdot \pi_N} \int_H \mathrm{P}(x,z) |f(z) - f(\zeta)| \, \mathrm{d}\sigma(z) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2k} \frac{1}{\rho \cdot \pi_N} \int_H |f(z) - f(\zeta)| \, \mathrm{d}\sigma(z) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2k} \frac{1}{\rho \cdot \pi_N} \int_{\partial B} (|f(z)| + |f(\zeta)|) \mathrm{d}\sigma(z) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

综合上述讨论得，当 $x \in B \cap B(\zeta, \eta)$时，

$$|\mathrm{PI}(f, B)(x) - f(\zeta)| \le I + J < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证明了(5.3)式. □

例 任意取定一点 $y \in \boldsymbol{R}^N$, 设 $D := \{x \mid 0 < a < |x - y| < b\}$, $C_1 := \{x \mid |x-y| = a\}$, $C_2 := \{x \mid |x-y| = b\}$, D 的边界上的函数 f 在 C_1 的每一点取值为 1，在 C_2 的每一点取值为 0. 那么在 D 上关于 f 的 Dirichlet 问题的解 u 为

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{\log|x-y| - \log b}{\log a - \log b}, & N = 2 \\ \dfrac{a^{N-2}(b^{N-2} - |x-y|^{N-2})}{|x-y|^{N-2}(b^{N-2} - a^{N-2})}, & N > 2 \end{cases},$$

§3.6 Harnack 原理与收敛原理

由极值原理的推论 3-4-3 知，区域 D 上的正调函数 u 要么在 D 上恒等于 0，要么点点严格正，即对每个 $x \in D, u(x) > 0$.

定理 3-6-1 (Harnack 不等式 1) 对任意$0 < \delta < \rho < \infty$, 下面

不等式对 $B(y,\ \rho)$上的任何严格正的调和函数和任意两点 $p,\ q \in \overline{B}(y,\delta)$一致成立：

$$\frac{u(p)}{u(q)} \le \frac{\rho^2}{\rho^2-\delta^2}\left(\frac{\rho+\delta}{\rho-\delta}\right)^N \tag{6.1}$$

证明 任意取定 $0<\delta<\rho<\infty$，$\delta<t<\rho$，当 $|z-y|=t$，且 $p,\ q\in \overline{B}(y,\delta)$时，

$$t-\delta<|z-p|<t+\delta;\ t-\delta<|z-q|<t+\delta,$$

$$\frac{t^2-\delta^2}{(t+\delta)^N} \le \frac{t^2-|p-y|^2}{|z-p|^N} \le \frac{t^2}{(t-\delta)^N};$$

$$\frac{t^2-\delta^2}{(t+\delta)^N} \le \frac{t^2-|q-y|^2}{|z-q|^N} \le \frac{t^2}{(t-\delta)^N};$$

从而有

$$u(z)\frac{t^2-|p-y|^2}{|z-p|^N} \le \frac{t^2}{t^2-\delta^2}\,\frac{(t+\delta)^N}{(t-\delta)^N}\,\frac{(t^2-|q-y|^2)}{|z-q|^N}u(z),$$

上式两边在$\partial B(y,t)$上关于变量 z 积分，据 Poisson 积分公式得

$$u(p) \le \frac{t^2}{t^2-\delta^2}\,\frac{(t+\delta)^N}{(t-\delta)^N}u(q),$$

因上式对任何 $\delta<t<\rho$成立，令 $t\to\rho$ 便得到 (6.1)式. □

注：在(6.1)中特取 $2\delta=\rho$，便得到当$p,q\in\overline{B}(y,\delta)$时，

$$\frac{u(p)}{u(q)} \le \frac{4}{3}\cdot 3^N = 4\cdot 3^{N-1}.$$

定理 3-6-2 (Harnack 不等式 2) 设 G 为区域 D 的相对紧子区域且 G 的闭包在 D，即，$\overline{G}$紧且满足 $G\subset\overline{G}\subset D$，则存在仅与 G 及 D 有关的常数 $c>0$，使得

$$\frac{u(p)}{u(q)} \le c \tag{6.2}$$

对 D 上任何严格正的调和函数 u 及 G 上的任意两点 p, q 一致成立.

证明 任选 ρ 使得

$$0<\rho<\inf\{|x-y| \mid x\in\overline{G}, y\in\partial D\}$$

(此式表示 $\overline{G}$ 与 D 的边界之间的距离，由 G 的条件，它是严格正的)．由于 $\overline{G}$ 紧，可用有限个，设为 i 个，半径为 $\delta:=\rho/2$ 的球 $B(x_m, \delta)$ 将 $\overline{G}$ 覆盖. 因 G 连通，对 G 上的任意两点 p, q，总可以用一条位于 G 的不自交的折线连接 p, q．这条折线至多被 j 个 $(j\le i)$ 这样的球 $B(x_m, \delta)$ 所覆盖. 不妨设沿折线从 p 到 q 依次经过的球为 $B(x_1, \delta),\cdots, B(x_j, \delta)$. 可取

$$y_m\in B(x_m, \delta)\cap B(x_{m+1}, \delta), m=1,2,\cdots,j-1.$$

注意到每个 $B(x_m, 2\delta)\subset D$;

$$p, y_1\in B(x_1, \delta),\quad y_m, y_{m+1}\in B(x_m, \delta), y_{j-1}, q\in B(x_j, \delta).$$

在这 j 个 $B(x_m, \rho)$应用上一定理的附注，对 D 上任何严格正的调和函数 u 有，

$$\frac{u(p)}{u(q)}=\frac{u(p)}{u(y_1)}\cdot\frac{u(y_1)}{u(y_2)}\cdots\frac{u(y_{j-1})}{u(q)}\le(4\cdot 3^{N-1})^j\le(4\cdot 3^{N-1})^i:=c,$$

常数 c 确实与所说的 u 及 p, q 无关. □

第一章 § 1.1 已介绍过定向集和网的概念及网的收敛等有关性质. 函数网是函数列的推广，二者有许多性质类似，例如，连续函数网若一致收敛，则其极限函数也连续.

引理 3-6-3 (Harnack 一致收敛定理) 若$(u_\alpha| \alpha\in P)$是开集 U 上的一个一致收敛于 u 的调和函数网，则 u 在 U 调和.

证明 因为$(u_\alpha| \alpha\in P)$是开集 U 上的一致收敛于 u 连续函数网，故 u 在 U 连续. 对任何 $\delta>0$, 当 $y\in\overline{B}(y, \delta)\subset U$时，因每个 u_α 在 U 调和，满足局部平均值性质，并据一致收敛性，有

$$u(y)=\lim_P u_\alpha(y)$$

$$= \lim_P \frac{1}{\pi_N \cdot \delta^{N-1}} \int_{\partial B(y,\delta)} u_\alpha d\sigma$$

$$= \frac{1}{\pi_N \cdot \delta^{N-1}} \int_{\partial B(y,\delta)} u \, d\sigma = \mathrm{L}(u; y, \delta).$$

这说明满足局部平均值性质，由定理 3-4-6 知，u 在 U 调和. □

定理 3-6-4 设 $\mathcal{F}$ 为开集 U 上的一族调和函数，满足：U 中每个点有邻域使得 $\mathcal{F}$ 在该邻域为一致有界，则：(1) $\mathcal{F}$ 在 U 的任意紧子集 C 上等度连续；(2) $\mathcal{F}$ 中每个网必有子网在 C 上一致收敛. 此外，若$(u_\alpha | \alpha \in P)$是开集 U 上的一致有界的，收敛于 u 的调和函数网，则 u 在 U 调和.

证明 取定 U 的紧子集 C，由有限覆盖性知 $\mathcal{F}$ 在 C 的一个开邻域 $V(V \subset U)$上为一致有界. 假定

$$\sup \{ |u(x)| \,|\, x \in V, u \in \mathcal{F} \} \le a < \infty,$$

又设 $r > 0$ 充分小使得 $\overline{B}(x, r) \subset V$ 对所有 $x \in C$ 一致成立. 于是，对 $x, y \in C$, $u \in \mathcal{F}$, 有

$$|u(x) - u(y)| = \left| \frac{1}{v_N \cdot r^N} \int_{B(x,r)} u(z) dz - \frac{1}{v_N \cdot r^N} \int_{B(y,r)} u(z) dz \right|$$

$$\le \frac{1}{v_N \cdot r^N} \int_E |u(z)| dz \le \frac{a}{v_N \cdot r^N} \int_E dz,$$

其中积分区域 $E := B(x, r) \Delta B(y, r)$, 当 $|x - y|$ 充分小时, E 的测度任意小，从而$|u(x) - u(y)|$ 任意小. 换言之, $|u(x) - u(y)|$的任意小程度仅取决于 $|x - y|$的充分小程度，故证得结论(1).

由(1)知，$\mathcal{F}$ 中每个网必在 C 上等度连续且一致有界，由 Arzela-Ascoli 紧性定理（见 Kelly J L. [29]）知结论 (2) 成立.

再设确$(u_\alpha | \alpha \in P)$ 是开集 U 上的一致有界的，收敛于 u 的调和函数网，则对任意闭包在 U 的球 B，由 (2) 知有子网在 $\overline{B}$ 上一致收敛于 u; 据定理 3-6-3，u 在 B 调和. 因球 B 是任意的，

故 u 在 U 调和. □

定义 集 E 上的一族函数 $\mathscr{V}$ 称为**上定向的**，如果对任意 $f, g \in \mathscr{V}$，存在 $h \in \mathscr{V}$，使得 $f \le h, g \le h$ 都成立. 若上述"≤"改为"≥"，则 $\mathscr{V}$ 称为**下定向的**.

若 $\mathscr{V}$ 为上定向族（或 $\mathscr{V}$ 为下定向族），则 $\mathscr{V} := (\mathscr{V}, \le)$（或 $(\mathscr{V}, \ge)$）是一个定向集，也是一个函数网. 特别，单调增（或减）函数列是上（相应地，下）定向族，也是函数网.

定理 3-6-5 若 $\{u_j | j \in J\}$ 是区域 D 上的一族上（或，下）定向的调和函数，则 $u := \sup\{u_j | j \in J\}$（或，$v := \inf\{u_j | j \in J\}$）要么恒等于 ∞（或，相应地 $-\infty$），要么在 D 调和.

证明 不妨只就上定向族的情况证之. 任意取定一个 $p \in J$，则

$$u = \sup\{u_j | j \in J,\ u_j \ge u_p\},$$

因此下面可假定该族函数有最小元 u_p. 假定有 $x \in D$ 使得

$$u(x) = \sup\{u_j(x) | j \in J\} < \infty,$$

那么对任何一个相对紧的子区域 V，当 $x \in V \subset \overline{V} \subset D$ 时，由定理 3-6-2 知正调和函数族 $\{u_j - u_p \mid j \in J\}$ 在紧集 $\overline{V}$ 上一致有界，从而 $\{u_j \mid j \in J\}$ 在紧集 $\overline{V}$ 上一致有界. 由于 $\{u_j \mid j \in J\}$ 也是一个调和函数网且收敛于 u，据定理 3-6-4，u 在 V 调和. 因 V 是任意的及 D 可表为一列单调增的相对紧的子区域 $\{V_k\}$ 的并，故 u 在 D 调和. □

推论 3-6-6 设 $\{h_j\}$ 是区域 D 上的一个单调增的调和函数列，则 $u = \sup\{h_j\}$ 要么恒等于∞，要么在 D 调和. □

例（§ 3.5 例子的继续）取两个严格单调的实数列 $\{a_i\}, \{b_j\}$，$a_i \to 0, b_j \to \infty$ 且 $0 < a_i < a < b < b_j$ 对任意自然数 i, j 都成立. 做两个单调增球环列 $\{D_i\}$，$\{G_j\}$ 如下：

$$D_i := \{x \mid a_i < |x - y| < b\},\ G_j := \{x \mid a < |x - y| < b_j\}.$$

令 $$D := \cup_{i=1}^{\infty} D_i = \{ x \mid 0 < |x-y| < b \},$$
$$G := \cup_{i=1}^{\infty} G_i = \{ x \mid a < |x-y| < \infty \};$$
在每个 D_i 作 Dirichlet 解 u_i 使之在 $\{ x \mid a_i = |x-y| \}$ 上以 1 为边界值，在 $\{ x \mid |x-y| = b \}$ 上以 0 为边界值，那么

$$u_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\log|x-y| - \log b}{\log a_i - \log b}, & N=2; \\[2ex] \dfrac{a_i^{N-2}(b^{N-2} - |x-y|^{N-2})}{|x-y|^{N-2}(b^{N-2} - a_i^{N-2})}, & N>2 \end{cases}$$

同样，可在在每个 G_j 作 Dirichlet 解 w_j 使之在 $\{ x \mid a = |x-y| \}$ 上以 1 为边界值，在 $\{ x \mid |x-y| = b_j \}$ 上以 0 为边界值，那么

$$w_j(x) = \begin{cases} \dfrac{\log|x-y| - \log b_j}{\log a - \log b_j}, & N=2; \\[2ex] \dfrac{a^{N-2}(b_j^{N-2} - |x-y|^{N-2})}{|x-y|^{N-2}(b_j^{N-2} - a^{N-2})}, & N>2 \end{cases}$$

由极值原理（定理 3-4-2）知，在 D_i 有 $0 < u_i < 1$，且对任意取定的自然数 p，函数列 $\{ u_i \mid i > p \}$ 在 D_p 单调减一致收敛于 D 上的调和函数 0. 类似地，在 G_j 有 $0 < w_j < 1$，且对任意取定的自然数 p，函数列 $\{ w_j \mid j > p \}$ 在 G_p 单调增一致收敛于 G 上的调和函数 1（当 $N=2$）或 $\dfrac{a^{N-2}}{|x-y|^{N-2}}$（当 $N>2$）.

定理 3-6-7（可去奇点定理） 设 u 为去心球 $B(y, r) \setminus \{y\}$ 上的有界调和函数，则 u 可以延拓成 $B(y, r)$ 上的调和函数.

证明 取一列实数 $\{ r_i \}$ 及实数 b 使得

$$r > b > r_1 > r_2 > \cdots > r_i > r_{i+1} > 0, \quad r_i \to 0.$$

显然，u 在去心球 $B(y, b) \setminus \{y\}$ 上有界调和且在 $\overline{B}(y, b) \setminus \{y\}$ 连续.
令

$$v(x) := \frac{1}{b^{N-1}\pi_N}\int_{\partial B(y,b)} \mathrm{P}(x, z)u(z)\mathrm{d}\sigma(z) \qquad x \in B(y, b),$$

那么 v 在 $B(y, b)$调和且在 $\overline{B}(y, b)$连续，在 $\partial B(y, b)$上 $u = v$. 令 $h := u - v$, 则 h 在 $B(y, b) \setminus \{y\}$上的有界调和且在 $\overline{B}(y, b) \setminus \{y\}$连续，在 $\partial B(y, b)$ 上 $h = 0$.

下面证明 h 恒等于 0. 设实数 M 为$|h|$ 的上界. 在每个区域 $D_i := \{x \mid r_i < |x - y| < b\}$上作一个正调和函数 u_i ,使得它在$\partial B(y, b)$上取值为 0，在$\{x \mid r_i = |x - y|\}$ 上取值为 M.（见例子）. 对任意 $x \in B(y, b) \setminus \{y\}$, 存在自然数 m 使得对所有 $i > m$, 有 $x \in D_i$. 据推论 3-4-3，通过比较边界值得，对所有 $i > m$ 有

$$-u_i(z) \le h(z) \le u_i(z), \quad z \in D_i;$$

特别有$|h(x)| \le u_i(x)$. 当 $i \to \infty$ 时，$u_i(x)$单调减少趋于 0，故 $h(x) = 0$; 由 x 的任意性知 h 恒等于 0. 即 u 与 v 在 $B(y, b) \setminus \{y\}$上恒等. 但 v 在 $B(y, b)$调和且在 $\overline{B}(y, b)$连续，令 $u(y) := v(y)$, 则 u 在 $B(y, b)$, 从而在 $B(y, r)$调和. □

§3.7 上调和函数

上调和函数是与调和函数族关系最密切的重要函数族. 我们将看到，位势也是上调和函数. 关于一般开集的广义 Dirichlet 解的 Perron 方法就是借助于上，下调和函数族来实现的. Perron 方法和上调和函数满足的极小值原理同为建立调和空间的基础.

定义 从一个开集 U 到$(-\infty, \infty]$ 的函数 u 若满足下面条件，则称 u 在 U 为上调和的：

1） u 在 U 的每个连通分支不恒等于∞;

2） u 在 U 为下半连续；

3） u 有上平均性质，即对任意球 $B(x, r) \subset \overline{B}(x, r) \subset U$, 有

$$L(u, x, r) \le u(x).$$

又，若 $-u$ 在 U 为上调和的，则称 u 在 U 为**下调和的**.

显然，若 h 在 U 调和，u 在 U 为上调和，则 $u + h$ 在 U 为上调和.

定理 3-7-1 开集 U 上的函数 u 为调和的充要条件是 u 既上调和又下调和.

证明 U 上的调和函数 u 是实的连续函数，且据定理 3-2-3，满足平均值性质，故由上，下调和定义立即推出必要性. 反之，若 u 在 U 既上调和又下调和，则 u 是实的连续函数且满足平均值性质，由定理 3-4-6 知其调和，充分性得证. □

定理 3-7-2 从一个区域 D 到 $(-\infty, \infty]$ 的函数 u 若不恒等于∞、下半连续且有**局部上平均性质**：即对任意 $x \in D$，存在$\delta_x > 0$，使得 $B(x, \delta_x) \subset D$，且 $L(u, x, \delta) \le u(x)$ 对所有 $0 < \delta < \delta_x$ 都成立，则 u 在 D 满足极小值原理.

证明 假定 u 不是常数且在 $x_0 \in D$ 达到极小值，即

$$u(x_0) = \inf\{ u(x) \mid x \in D \}$$

由定理的条件知，$-\infty < u(x_0) < \infty$. 令

$$E := \{x \in D \mid u(x) = u(x_0)\},$$

因 u 在 D 为下半连续，故 E 是相对闭集. 我们要证 E 也是相对开集. 任取 $y \in E$，据假定，存在$\delta_y > 0$，使得 $B(y, \delta_y) \subset D$，且

$$L(u, y, \delta) \le u(y) \qquad 0 < \delta < \delta_y \qquad (7.1)$$

若 $B(y, \delta_y) \subset E$，则已证得 E 是开集. 否则，存在 $z \in B(y, \delta_y) \setminus E$，令 $\delta_1 := |z - y|$，显然 $0 < \delta_1 < \delta_y$. 因为 u 在 y 达到极小值，故

$$u(y) \le L(u, y, \delta_1),$$

且结合(7.1)式推出

$$u = u(y)$$

在 $\partial B(y, \delta_1)$ 几乎处处成立. 因 $z \notin E$，故 $u(y) < u(z)$. 而 u 在 D

为下半连续，推出 z 有邻域 $G\subset D$ 使得在 G 上 $u(y)<u$，但 $G\cap\partial B(y,\delta_1)$具有严格正的测度，与“$u=u(y)$ 在$\partial B(y,\delta_1)$ 几乎处处成立”矛盾. 故 $B(y,\delta_y)\subset E$ ，从而 E 既相对闭又相对开. 由于 D 连通且 $x_0\in E$，推出 $E=D$，这与“u 不是常数”的假定矛盾. 这说明，u 在 D 满足极小值原理. □

注 3-7-3 如果将定理的条件中“$L(u,x,\delta)\le u(x)$” 改为“$A(u,x,\delta)\le u(x)$”，可类似证明有同样结论. 这时称 u 有球体局部上平均性质.

定理 3-7-4 若 u 在区域 D 为上调和，则 u 满足极小值原理；若 u 在相对紧的开集 U 为上调和且对每个 $z\in\partial U$,

$$\liminf_{x\to z} u(x)\ge 0,$$

则 $u\ge 0$ 在 U 成立.

证明 设 u 在区域 D 为上调和，由上调和的定义知 u 满足上平均值性质，从而满足局部上平均值性质，即定理 3-7-2 的条件成立，故 u 满足极小值原理. 任取 U 的一个连通分支 G，那么，G 是区域，$\overline{G}$ 是紧集. 对每个 $z\in\partial G$，令

$$u(z)=\liminf_{x\to z} u(x),$$

那么 $u(z)\ge 0$; 延拓后的 u 在 $\overline{G}$ 为下半连续且取到极小值. 若有 $y\in G$ 使得 $u(y)<0$, 则 u 不能在∂G ，而是要在 G 的内点取到极小值，与上段结论矛盾. 所以在 G 上 $u\ge 0$. 再由 G 的任意性知，$u\ge 0$ 在 U 成立. □

定理 3-7-5 若 u 在开集 U 为上调和，则 u 在 U 满足下面所谓性质 **P**：

对任意相对紧的开集 $G\subset\overline{G}\subset U$，对任何在 G 调和且在 $\overline{G}$ 连续的函数 h，若在∂G 上 $u\ge h$ 成立，则同样不等式在 G 成立.

证明 任取上述 G 的一个连通分支，为记号简单，不妨仍记作 G. 那么，$u-h$ 仍在 G 为上调和，在 $\overline{G}$ 下半连续，且对每

个 $z \in \partial G$,

$$\begin{aligned}&\liminf_{x \to z}\,[u(x) - h(x)]\\ \geq\ &\liminf_{x \to z}\, u(x) - h(z)\\ \geq\ & u(z) - h(z) \geq 0\,.\end{aligned}$$

应用上一定理知，$u - h \geq 0$ 在 G 成立. □

定理 3-7-6 从一个开集 U 到 $(-\infty, \infty]$ 的下半连续函数 u 若在 U 的每一个连通分支不恒等于 ∞，则下面 3 个命题等价：

1）u 在 U 为上调和；

2）u 在 U 满足性质 P；

3）u 在 U 有局部上平均性质.

证明 由定理 3-7-5，命题 1 蕴涵命题 2；由上调和的定义直接得出，命题 1 蕴涵命题 3.

下面先证命题 2 蕴涵命题 1. 设 u 在 U 满足性质 P. 对任意球

$$B(x, r) \subset \overline{B}(x, r) \subset U,$$

因为 u 在$\partial B(y, r)$ 下半连续，故存在$\partial B(y, r)$上的一列单调增加的连续函数$\{f_i\}$收敛于 u. 把 $B(y, r)$上关于边界函数 f_i 的 Poisson 积分 $\mathrm{PI}(f_i, B)$简记为 h_i，它可以延拓成$\overline{B}(x, r)$上的连续函数且在$\partial B(y, r)$上 $u \geq h_i = f_i$. 因 u 在 U 满足性质 P，故 $u \geq h_i$ 在 $B(x, r)$ 成立；特别 $u(x) \geq h_i(x) = \mathrm{L}(f_i; x, r)$. 因$\{f_i\}$单调增收敛于 u. 由 Lebesgue 单调增收敛定理得，$u(x) \geq \mathrm{L}(u; x, r)$.

再证命题 3 蕴涵命题 2. 设 u 在 U 有局部上平均性质. 对任意相对紧的开集 $G \subset \overline{G} \subset U$，任取 G 的一个连通分支，为记号简单，不妨仍记作 G. 设函数 h 在 G 调和，在 $\overline{G}$ 连续，在∂G 上 $u \geq h$ 成立. 于是 $u - h$ 在 $\overline{G}$ 下半连续并达到极小值. 因 h 在 G 调和，满足平均值性质，从而 $u - h$ 在 G 有局部上平均性质；据定理 3-

7-2 知，$u-h$ 在 G 满足极小值原理，即 $u-h$ 在 G 不能达到极小值，除非它是常数. 从而 $u \geq h$ 在 G 成立. 这说明 u 在 U 满足性质 P. □

定理 3-7-7 开集 U 上的函数 u 若具有二阶连续的偏导数，则 u 为上调和的充要条件是 $\Delta u \leq 0$ 在 U 成立.

证明 充分性：假定 $\Delta u \leq 0$ 在 U 成立，显然只要证 u 在 U 有上平均性质. 任取球

$$B := B(x, r) \subset \overline{B}(x, r) \subset U.$$

先设 $\Delta u < 0$ 在 B 成立. 因 u 在 $\overline{B}$ 连续，Poisson 积分 PI(u, B) 可连续延拓到 $\overline{B}$ 且在 ∂B 等于 u，记 $\overline{B}$ 上的这个函数为 h. 令

$$w := u - h,$$

那么

$$\Delta w = \Delta u - \Delta h < 0$$

在 B 且 $w = 0$ 在 ∂B 上成立，w 在 $\overline{B}$ 连续. 假定 w 在 $y \in \overline{B}$ 达到极小值. 如果 $y \in B$，则

$$\frac{\partial^2 w(y)}{\partial x_i^2} \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N,$$

从而 $\Delta w \geq 0$. 矛盾. 因此，$y \in \partial B$. 即 $w = u - h \geq 0$ 在 $\overline{B}$ 成立. 由 h 的定义，

$$u(x) \geq h(x) = \mathrm{L}(u; x, r).$$

一般地，设 $\Delta u \leq 0$ 在 U 成立. 令 $f(x) = |x|^2$，则 $\Delta f = 2N > 0$. 对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\Delta(u - \varepsilon f) = \Delta u - \varepsilon \Delta f < 0$$

在 U 成立. 据上一段的结论有，

$$u(x) - \varepsilon f(x) \geq \mathrm{L}(u - \varepsilon f; x, r) = \mathrm{L}(u; x, r) - \varepsilon \mathrm{L}(f; x, r),$$

令 $\varepsilon \to 0$，得到 $u(x) \geq \mathrm{L}(u; x, r)$. 这表明 u 在 U 有上平均性质，从而在 U 为上调和.

必要性：设 u 在 U 为上调和且具有二阶连续的偏导数，于是 Δu 在 U 连续. 令

$$D := \{ x \in U \mid \Delta u > 0 \},$$

那么 D 为 U 的开子集. 设 D 非空集，则在 D 上 $\Delta(-u) < 0$.

据充分性知，$-u$ 在 D 为上调和，即 u 在 D 为下调和. 由定理 3-7-1，u 在 D 为调和. 从而 $\Delta u = 0$ 在 D 成立. 矛盾. 故 D 为空集，即 $\Delta u \le 0$ 在 U 成立. □

定理 3-7-8 从一个开集 U 到$(-\infty, \infty]$的下半连续函数 u 若在 U 的每一个连通分支不恒等于 ∞，则 u 为上调和的充要条件是 u 有球体上平均性质：即对任何闭包在 U 的球 $B(x, r)$满足

$$u(x) \ge \mathrm{A}(u; x, r).$$

证明 充分性：设 u 有球体上平均性质，则 u 有球体局部上平均性质. 据附注 3-7-3，及定理 3-2-5，可完全类似于定理 3-7-6 证明中由命题 3 推出命题 2 的过程，证得 u 在 U 满足性质 P. 再由定理 3-7-6 得出 u 为上调和.

必要性：设 u 在 U 为上调和. 又设球 $B(x, r)$的闭包在 U，要证

$$u(x) \ge \mathrm{A}(u; x, r).$$

若 $u(x) = \infty$，则该不等式自然成立. 下面设 $u(x) < \infty$. 由上调和的定义，

$$u(x) \ge \mathrm{L}(u; x, t)$$

对所有 $0 < t < r$ 成立，即

$$\pi_N \cdot t^{N-1} u(x) \ge \int_{\partial B(x, t)} u(z) \mathrm{d}\sigma(z), \quad 0 < t < r.$$

上式两边关于 t 在$(0, r)$ 积分，并注意到$\pi_N = N v_N$ 得，

$$v_N \cdot r^N u(x) \ge \int_{B(x, r)} u(z) \mathrm{d}z,$$

即 $u(x) \ge \mathrm{A}(u; x, r)$. 我们已证明了，$u$ 有球体上平均性质. □

定理 3-7-9 在开集 U 为上调和的函数 u 必关于 N 维 Lebes-

gue 测度几乎处处取有限值且局部可积.

证明 任取 U 的一个连通分支 D. 因 u 上调和, u 在 D 不恒等于 ∞, 故存在 $x \in D$ 使得 $u(x) < \infty$. 由上一定理知, 存在 $r > 0$, 使得 u 在 $B(x, r)$ 几乎处处有限, 于是集合

$$E := \{ y \in D \mid u \text{ 在 } D \text{ 内某个球 } B(y, r) \text{上几乎处处有限} \}$$

非空. 我们断言, $E = D$.

为此,先证 E 是开集. 设 $y_1 \in E$, 则 u 在 D 内某个球 $B(y_1, 2t)$ 上几乎处处有限. 对任意 $z \in B(y_1, t)$,

$$B(z, t) \subset B(y_1, 2t).$$

故 u 在 $B(z, t)$ 上几乎处处有限, 推出 $z \in E$, 从而 $B(y_1, t) \subset E$. 这说明 E 是开集.

再证 E 为 D 的相对闭集. 设 E 中有点列 $\{y_i\}$ 收敛于 $y \in D$. 因 D 为开集, 故有 $s > 0$ 使得 $B(y, 2s) \subset D$. 对充分大的 i 恒有 $y_i \in B(y, s)$. 因 $y_i \subset E$, u 在 D 内某个球 $B(y_i, r_i)$上几乎处处有限. 从而有 $p \in B(y, s) \cap B(y_i, r_i)$ 满足 $u(p) < \infty$. 因 $B(p, s)$的闭包在 D 内, 由上一定理, $\mathrm{A}(u; p, s) \le u(p)$, u 在球 $B(p, s)$上几乎处处有限. 因 $y \in B(p, s)$, 故有 $r > 0$ 使得 $B(y, r) \subset B(p, s)$, 所以 u 在球 $B(y, r)$ 上几乎处处有限. 即 $y \in E$. 这说明 E 为 D 的相对闭集.

因 D 连通, E 非空, 故 $E = D$. 由于 D 可表示成可数个在 E 的定义中所说的那样的球之并, 所以 u 在 U 几乎处处取有限值.

再证局部可积性. 据上述结论, 对任意 $y \in D$, 当球 $B(y, 2r) \subset D$ 时, u 在球 $B(y, 2r)$上几乎处处有限. 故存在 $x \in B(y, r)$使得 $u(x) < \infty$. 因 $B(x, r)$的闭包在 D,由 $\mathrm{A}(u; x, r) \le u(x)$ 知 u 在 $B(x, r)$ 可积, 而 $y \in B(x, r)$, 即 u 在 y 的邻域 $B(x, r)$ 可积. □

定理 3-7-10 若函数 u 在开集 U 为上调和, 球 $B = B(y, t)$的闭包包含在 U, 则 u 关于∂B 的 Lebesgue 测度可积, 其 Poisson 积分

$$\mathrm{PI}(u, B) \le u$$

且在 B 调和. 又，令

$$\tau_B u = \begin{cases} PI(u,B)(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in U \setminus B \end{cases}$$

则 $\tau_B u \le u$ 且在 U 为上调和. 称 $\tau_B u$ 为 u 在 B 的**截断函数**.

证明 在 ∂B 上：因为 u 为下半连接，故下有界，可不妨设 $u \ge 0$，从而有单调增的正的连续函数列 $\{f_j\}$ 收敛于 u. 在 $\overline{B}$ 上定义函数 v_j：它是 $\mathrm{PI}(f_j, B)$ 在 $\overline{B}$ 的连续延拓，那么在 ∂B 上

$$u \ge v_j = f_j;$$

在 B 上 v_j 调和. 据定理 3-7-6，$u \ge v_j$ 在 B 成立. 又，$\{v_j\}$ 为 B 上的单调增的调和函数列，据推论 3-6-6，$v := \lim_{j\to\infty} v_j$ 要么调和，要么恒等于∞. 但 u 在 B 几乎处处有限且 $u \ge v$，因此 v 在 B 调和. 同时，由 Lebesgue 单调收敛定理知，$v = \mathrm{PI}(u, B)$，特别有

$$\mathrm{PI}(u, B)(y) = \mathrm{L}(u; y, t) = v(y) < \infty,$$

即 u 在 ∂B 上可积.

下面考虑截断函数 $\tau_B u$ 的情形.

在 U 上显然 $\tau_B u \le u$. 要证 $\tau_B u$ 为上调和，由定理 3-7-6，只须验证它在 ∂B 上的下半连续性且满足局部上平均性质. 由习题 8 并注意到 u 在 U 是下半连续的，对任意 $\varsigma \in \partial B$，

$$\liminf_{x\in B, x\to\varsigma} \tau_B u(x) \ge \liminf_{z\in\partial B, z\to\varsigma} u(z) \ge \liminf_{x\to\varsigma} u(x) \ge u(\varsigma) = \tau_B(\varsigma);$$

当 $x \in U \setminus B$ 时，$\tau_B u = u$,

$$\liminf_{x\notin B, x\to\varsigma} \tau_B u(x) = \liminf_{z\notin B, z\to\varsigma} u(z) \ge \liminf_{x\to\varsigma} u(x) \ge u(\varsigma) = \tau_B(\varsigma).$$

由上两式就推出 $\tau_B u$ 在 ζ 下半连续. 又，当 $B(\zeta, r)$ 的闭包在 U 时，

$$\tau_B u(\zeta) = u(\zeta) \ge \mathrm{L}(u; \zeta, r) \ge \mathrm{L}(\tau_B u; \zeta, r),$$

即 $\tau_B u$ 在 ∂B 上满足局部上平均性质. □

定理 3-7-11 若函数 u, v 在开集 U 为上调和，实数 $c \geq 0$，则 $u+v, cu$ 及 $\inf\{u, v\}$ 在 U 都是上调和的.

证明 $u+v$, cu 及 $\inf\{u, v\}$ 的下半连续性是显然的，易验证，它们满足上平均性质. □

这定理说明在开集 U 为上调和的函数全体是一个凸锥且关于点点求下确界的运算 inf 封闭.

定理 3-7-12 若 $\{u_i \mid i \in I\}$ 是开集 U 上的一个上定向的上调和函数族，D 是 U 的一个连通分支，则

$$u := \sup\{u_i \mid i \in I\}$$

在 D 要么上调和，要么恒等于 ∞.

证明 由定理 1-4-4 知，u 是下半连续的. 类似于定理 3-7-10，不难推出 u 满足上平均性质. □

回顾 § 1.4 定义过的拓扑空间上的函数的下半连续正则化.

关于开集 U 上的函数 f，那个函数值点点小于或等于 f 的最大下半连续函数记作 $\hat{f}$，称为 f 的**下半连续正则化**.

容易验证，$\forall x \in U, \hat{f}(x) = \sup\limits_{G}(\inf\limits_{y \in G} f(y))$，其中 G 是 x 的开邻域. 也就是说，只要把 U 看成一个拓扑子空间，这里的定义与 § 1.4 的定义一致.

定理 3-7-13 若 $\{v_i \mid i \in I\}$ 是开集 U 上的一个下定向的，局部下有界的上调和函数族，则 $u := \inf\{u_i \mid i \in I\}$ 的下半连续正则化 $\hat{u}$ 在 U 为上调和.

证明 易验证，u 满足球体上平均性质. 虽然未必下半连续，但集 $\{x \in X \mid \hat{u}(x) < u(x)\}$ 是一个零测集（甚至是极集，见 § 7.1 及练习 7.4.11)，故由定理 3-4-4 易知，$\hat{u}$ 满足球体局部上平均性质，从而为上调和. □

定义 在开集 U 上的一个上调和函数族 $\mathcal{E}$ 称为**上调和饱和族**，如果满足：

1) 若 $u, v \in \mathcal{E}$，则 $\inf\{u, v\} \in \mathcal{E}$;

2) 若 $u \in \mathcal{E}$，则对任意闭包在 U 的球 B，$\tau_B u \in \mathcal{E}$.

定理 3-7-14 设 $\mathcal{E}$ 为开集 U 上的上调和饱和族，则对 U 的每个连通分支 G，在 G 上 $w := \inf \mathcal{E}$ 要么调和，要么恒等于 $-\infty$.

证明 任取 U 的一个连通分支 G 及闭包在 G 的球 B. 因为对任何 $u \in \mathcal{E}$，$\tau_B u \in \mathcal{E}$，$\tau_B u \le u$，故 $w = \inf\{\tau_B u \mid u \in \mathcal{E}\}$. 由条件 1，若 $u, v \in \mathcal{E}$，则 $\inf\{u, v\} \in \mathcal{E}$；由

$$\tau_B(\inf\{u, v\}) \le \inf\{\tau_B u, \tau_B v\}$$

知 $\{\tau_B u \mid u \in \mathcal{E}\}$ 是下定向族，据定理 3-6-5，在 B 上 $w = \inf \mathcal{E}$. 要么调和，要么恒等于 $-\infty$. 由 B 的任意性及定理 3-6-5 推出结论.
□

这个定理很重要，可用于证明一些开集上的 Green 函数（见下节）的存在性及用于 Perron 方法来求广义 Dirichlet 问题的解. 在调和空间直接用 Perron 方法定义广义 Dirichlet 问题的解. 由于两处的叙述相近，这里不作介绍.

§3.8 Green 函数与位势

定义 设 U 为开集，若在 $U \times U$ 上存在满足下面条件的正数值函数 G_U，则说 U 上 存在 **Green 函数**，G_U 为 U 的 **Green 函数**:

1) 对每个 $x \in U$, 存在 U 上的调和函数 $h_x = h(x, \cdot)$ 使得 $G_U(x, \cdot) = K_x + h_x$，这里 $K_x := K(x, y)$ 是 $\boldsymbol{R}^N (N \ge 2)$ 的基本核（见 §3.1）；

2) 对每个 $x \in U$, $G_U(x, \cdot)$是函数族

$\mathcal{F} := \{v \mid v \ge 0$ 且在 U 可表为某个上调和函数 w_x 与 K_x之和$\}$

中的最小者，即 $G_U(x,\cdot)\in\mathcal{F}$ 且对任何 $v\in\mathcal{F}$ 都有 $v\ge G_U(x,\cdot)$.

由定义立即推出，若 U 上有 Green 函数，则必唯一.

定理 3-8-1 §3.3 在球 $B=B(y,\rho)$上的定义的 G 函数 G_x 是该球上的 Green 函数.

证明 由定义, $G_x=K(x,\cdot)+h_x$,

当 $N=2$，$h_x(z)=\begin{cases}\log(|y-x||z-x^*|/\rho), & x\ne y,\\ \log\rho\quad, & x=y.\end{cases}$

当 $N\ge 3$， $h_x(z)=\begin{cases}\dfrac{-\rho^{N-2}}{(|x-y||z-x^*|)^{N-2}}, & x\ne y;\\ \dfrac{-1}{\rho^{N-2}}\quad, & x=y.\end{cases}$

由定理 3-6-7，易验证 h_x 在 $B(y,\rho)$ 调和. 从而 $G_x=G(x,\cdot)$在 B 为上调和; 又，它在 ∂B 的边界极限都等于 0，由极小值原理推出，$G_x>0$ 在 B 成立.

进一步，若 $v\ge 0$ 且在 B 可表为某个上调和函数 w_x 与 K_x 之和. 那么，对任意$\zeta\in\partial B$,

$$\begin{aligned}&\liminf_{z\to\zeta}[(K(x,z)+w_x(z))-(K(x,z)+h_x(z))]\\ &=\liminf_{z\to\zeta}[K(x,z)+w_x(z)]-\lim_{z\to\zeta}G(x,z)\\ &=\liminf_{z\to\zeta}[K(x,z)+w_x(z)]\ge 0\,.\end{aligned}$$

故 B 上的上调和函数 w_x-h_x 对任意 $\zeta\in\partial B$，满足

$$\liminf_{z\to\zeta}[w_x(z)-h_x(z)]\ge 0.$$

由极小值原理推出，$w_x-h_x\ge 0$，从而 $v\ge G_x$ 在 B 上成立. 这就证明了 G_x是该 B 上的 Green 函数. □

限于篇幅，我们不去证明 Green 函数在一个开集存在的条件，而直接指出：

定理 3-8-2

1)当 $N\ge 3$ 时，$\boldsymbol{R}^N$ 的每个开集 U 都有 Green 函数 G_U；基本

核 $K_x=K(x,y)$就是全空间 $\boldsymbol{R}^N$ 上的 Green 函数；

2)当 $N=2$ 时，不存在全空间 $\boldsymbol{R}^2$ 上的 Green 函数；一个开集 U 的余集若具有严格正的容量，例如 U 的余集包含一个连续统，则 U 上必有 Green 函数（参看第十一章）.

定理 3-8-3 设开集 U 上存在 Green 函数 G_U，则 G_U 具有下面性质：

1）（**对称性**）对每个 $x\in U, y\in U$,有 $G_U(x,y)=G_U(y,x)$；

2）（**调和性**）对每个 $x\in U, y\in U$, 有 $G_U(x,\cdot)$ 在 U 为上调和，在 $U\setminus\{x\}$调和；$G_U(\cdot,y)$在 U 为上调和，在 $U\setminus\{y\}$调和.

3）（**严格正**）对每个 $x\in U$, $G_U(x,\cdot)$ 在 U 严格正.

4）（**0 边界值**）对每个 $x\in U$, $\inf\{G_U(x,y)|y\in U\}=0$. 当 U 的边界由有限条 Jordan 曲线组成时，$G_U(x,\cdot)$在每个边界点以 0 为极限值.

5）（**极点的孤立性**）对每个 $x\in U$, $G_U(x,\cdot)$在任意一个其闭包包含于 U 的球 $B(x,r)$之外有界；在 U 的、包含 x 的连通分支 D 上限制就是 $G_D(x,\cdot)$；在不包含 x 的连通分支上恒等于 0.

6）（**关于定义域的单调性**） 若非空开集 $V\subset U$, 则 V 上存在 Green 函数 G_V, 且 $G_V\le G_U$.

其中性质 2）~6）的证明可据定义及上调和函数的性质直接推出. 性质 1）的证明较繁，包括要用到下面定义的调和下属等的性质.

定义 若 u 在开集 U 为上调和函数, h 在 U 调和且 $h\le u$, 就说 h 是 u 的一个**调和下属**. 若 h 是 u 的一个调和下属，且对 u 的任意调和下属 v，都有 $v\le h$，则称 h 是 u 的**最大调和下属**.

若 u 在开集 U 为下调和函数，则 u 的**调和上属**与**最小调和上属**分别定义为 $-u$ 的调和下属与最大调和下属.

定理 3-8-4 若 u 在开集 U 为上调和函数且有一个调和下

属，则 u 在 U 必有唯一的最大调和下属. □

定理 3-8-5 设开集 U 上存在 Green 函数 G_U，则对每个 $x\in U$，$G_U(x,\cdot)$ 在 U 的最大调和下属为 0. □

定义 设开集 U 上存在 Green 函数 $G=G_U$，μ 为 U 上的广义测度，当下面积分在 U 处处有意义时，它所定义的 U 上的函数 G_μ 叫做 μ 的 **Green 位势**：

$$G_\mu(x)=\int_U(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y),\qquad x\in U$$

特别，当 μ 为 U 上的测度，G_μ 为上调和时，则称 G_μ 为**位势.**

今后在调和空间中考虑的位势就是这种位势的推广.

定理 3-8-6 设开集 U 上存在 Green 函数 $G:=G_U$，μ 为 U 上的测度，则 G_μ 在 U 的任意取定的连通分支上要么上调和，要么恒等于∞.

证明 设 D 是 U 的一个连通分支，$\{D_j\}$是相对紧的开集的单调增加列，使得 $\overline{D_j}\subset D,\cup_{j=1}^{\infty}D_j=D$. 对每个 $j\in\mathbf{N}$，及 $x\in D$，定义

$$G^*_j(x,\cdot):=\min\{G(x,\cdot),j\};$$
$$u_j(x):=\int_{D_j}G^*_j(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

因为 μ 为 U 上的 Radon 测度，$\mu(D_j)\le\mu(\overline{D_j})\le\infty$. 利用 Green 位势的对称性及 $G(x,\cdot)$在 D 上的广义连续性知，当 $x_i\to x$ 时，$G(x_i,\cdot)\to G(x,\cdot)$，从而

$$G^*_j(x_i,\cdot)\to G^*_j(x,\cdot).$$

因 $G^*_j(x,\cdot)$以自然数 j 为上界，据 Lebesgue 控制收敛定理，当 $x_i\to x$ 时，

$$u_j(x_i)=\int_{D_j}G^*_j(x_i,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\to\int_{D_j}G^*_j(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)=u_j(x).$$

这说明 $u_j(x)$在 D 连续. 因为集列$\{D_j\}$单调增收敛于 D，函数列$\{G^*_j\}$单调增收敛 $G(x,\cdot)$，由 Lebesgue 单调收敛定理，$\{u_j\}$单

调增收敛 G_μ. G_μ作为单调增连续函数列的极限在 D 为下半连续.

由于 $G(x, y)$关于 x, y 对称，对每个 $y \in D$, $G(\cdot, y)$ 在 U 为上调和. 对闭包在 D 的球 $B(x, r)$有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}(G_\mu; x, r) &= \mathrm{L}\left(\int_U G(x, y)\mathrm{d}\mu(y); x, r\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} \left(\int_U G(x, y)\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\sigma(x).
\end{aligned}
$$

由 Fubini 定理，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}(G_\mu; x, r) &= \int_U \mathrm{L}(G(x, y); x, r)\mathrm{d}\mu(y) \\
&\le \int_U G(x, y)\mathrm{d}\mu(y) = G_\mu(x).
\end{aligned}
$$

这说明 G_μ满足上平均性质. 因此，若 G_μ在 D 上不恒为 ∞，则必为上调和. □

引理 3-8-7 设开集 U 上存在 Green 函数 $G := G_U$，μ 为 U 上的测度，$\mu(U) < \infty$ 且有一个闭包在 U 的球 B 使得 $\mu(B) = 0$，则在 U 的包含 B 的连通分支 D 上，G_μ为上调和.

证明 设 $x \in B$，则由定理 3-8-3 性质 5 知，$G(x, \cdot)$在 $U \setminus B$ 有界且 $G(x, \cdot)$在 U 的其它连通分支上恒等于 0. 又由于$\mu(B) = 0$，故

$$
G_\mu(x) = \int_D G(x, y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{D \setminus B} G(x, y)\,\mathrm{d}\mu(y) < \infty.
$$

这说明 G_μ不恒为 ∞. 由上一定理知，G_μ为上调和.

定理 3-8-8 设开集 U 上存在 Green 函数，μ 为 U 上的测度，$\mu(U) < \infty$，则 G_μ 为位势.

证明 先设 U 为连通的. 考虑一个闭包在 U 的球 B，于是$\mu = \mu_1 + \mu_2$，这里 $\mu_1 := \mu|_B$ 与 $\mu_2 := \mu|_{U \setminus B}$ 分别是μ在 B 与 $U \setminus B$ 的限制，$\mu_1(U \setminus B) = 0, \mu_2(B) = 0$. 显然，

$$
G_\mu = G_{\mu_1} + G_{\mu_2}.
$$

由$\mu_2(B) = 0$ 及 $\mu_2(U) \le \mu(U) < \infty$，据上一引理知 G_{μ_2} 为位势.

注意到$\overline{B}\subset U$，存在一个闭包在$U\setminus\overline{B}$的球S，显然$\mu_1(S)=0$，$\mu_1(U)<\infty$. 同样据上一引理知G_{μ_1}为位势. 因此G_μ为位势.

若U不连通，设$\{U_j\}$为U的所有连通分支，它至多是可数个. 对每个j，令μ_j为μ在U_j的限制，那么$\mu_j(U_j)<\infty$. 由Green函数的性质（定理 3-8-3），当x在某个U_j时，$G_U(x,\cdot)$在U_j的限制就是U_j上的Green函数$G_j(x,\cdot)$，它在其它分支上恒等于0. 故

$$G_\mu(x)=\int_U G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)=\int_{U_j} G_j(x,y)\,\mathrm{d}\mu_j(y)$$

最后一式就是μ_j在U_j的Green位势，由上段的证明知，它在U_j上为上调和. 从而推出G_μ在U为位势. □

从位势论的发展历史看，Green位势是对数位势（$N=2$）及Newton位势（$N\geq 3$）的发展.

当$N\geq 3$时，由于基本核K是$\boldsymbol{R}^N$全空间的Green函数G，故$\boldsymbol{R}^N$上的Newton位势与Green位势一致；当μ为$\boldsymbol{R}^N$上的测度，$\mu(\boldsymbol{R}^N)<\infty$时，则$G_\mu=\mathrm{U}^\mu$为位势.

当$N=2$时，由于基本核K不是正的，全空间$\boldsymbol{R}^2$上不存在Green函数；关于测度的对数位势一般也不是正的，定理 3-8-6的证明中用到Fubini定理一般也不能用于对数位势. 但是我们有下面定理：

定理 3-8-9 若限制μ为$\boldsymbol{R}^2$上的具有紧支柱C的测度，则U^μ为上调和函数.

证明 事实上，对任意圆盘$B(x,r)$，由于$-\log|x-y|$在$\overline{B}(x,r)\times C$广义连续（即作为从$\overline{B}(x,r)\times C$到$[-\infty,\infty]$的映照连续），且不取$-\infty$为值，故有实数$k$使得

$$-\log|x-y|+k>0$$

在$\overline{B}(x,r)\times C$成立. 注意到对每个$x\in\boldsymbol{R}^2$，$-\log|x-y|+k$作为$y$的函数是上调和的，在$\overline{B}(x,r)\times C$应用Fubini定理得

$$L(U^\mu; x, r) + k\,\mu(C) = \int L(-\log|x-y| + k; x, r)\,d\mu(y)$$
$$\leq \int(-\log|x-y| + k)\,d\mu(y)$$
$$= U^\mu(x) + k\mu(C),$$
因 $\mu(C) < \infty$，得 $L(U^\mu; x, r) \leq U^\mu(x)$，即 U^μ 在 $\boldsymbol{R}^2$ 满足上平均性质. 又，$U^\mu(x) \geq -k\mu(C) > -\infty$. 同时可类似定理 3-8-6 证明 U^μ 在 $B(x, r)$ 为下半连续. 再由 $B(x, r)$ 的任意性推出，U^μ 在 $\boldsymbol{R}^2$ 为下半连续. 这样，已证得 U^μ 为上调和函数. □

定理 3-8-10 若 $\boldsymbol{R}^2$ 的开集 U 上存在 Green 函数，测度 μ 的支柱包含于 U，则对数位势与 U 上的 Green 位势相差一个调和函数.

证明 实际上，由 Green 函数的定义，是对每个 $x \in U$，存在 U 上的调和函数 $h_x = h(x, \cdot)$ 使得 $G_U(x, \cdot) = K_x + h_x$，故
$$G_\mu(x) = \int K(x, y)\,d\mu(y) + \int h(x, y)\,d\mu(y)$$
$$= U^\mu(x) + \int h(x, y)\,d\mu(y), \qquad x \in U$$
由 Green 函数的对称性知 $h(x, y)$ 也有对称性，从而易推出
$$\int h(x, y)\,d\mu(y)$$
的调和性. □

定理 3-8-11 若 $\boldsymbol{R}^N$ 的开集 U 上存在 Green 函数，G_μ 为测度 μ 的位势，那么 G_μ 在 U 的最大调和下属为 0. □

进一步，我们有下面重要定理：

定理 3-8-12（Riesz 分解定理） 若 $\boldsymbol{R}^N$ 的开集 U 上存在 Green 函数 G，u 在 U 为上调和，则存在唯一的 U 上的测度 μ，使得对任何闭包在 U 的相对紧开集 D 有
$$u = (G_D)_{\mu|D} + h_D = \int G_D(x, y)\,d\mu|_D(y) + h_D, \tag{8.1}$$
这里 h_D 是 u 在 D 的最大调和下属，$(G_D)_{\mu|D}$ 是测度 μ 在 D 上的限制 $\mu|_D$ 所对应的、D 上的 Green 位势. 特别，当 u 在 U 上为

正上调和时，则 $u=G_\mu+h$，这里 h 是 u 在 U 的最大调和下属. □

注 这个定理特别重要之处在于，u 所对应的测度 μ 唯一且 (8.1) 式与 D 的选取无关. □

§3.9 第三章练习题

练习 3-9-1 验证：在 $\boldsymbol{R}^N (N\geq 2)$ 中，对那些仅与到一个定点 y 的距离

$$r:=|x-y|$$

有关的二次连续可微函数 $u(x)=u(r)$，Laplace 算子具有下面极坐标形式：

$$\Delta u=\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{N-1}{r}\frac{du(r)}{dr},\quad (r>0).$$

以 $\boldsymbol{R}^2$ 时为例说明，当 u 与 θ 有关时，Laplace 算子的极坐标形式必含有对 θ 的偏导数的项.

练习 3-9-2 分别用 Laplace 算子的直角坐标形式与极坐标形式验证基本调和函数 $K_x(y)=K(x,y)$ 在 $\boldsymbol{R}^N\setminus\{y\}$ 调和.

练习 3-9-3 验证：当 y, z 取定，$t:=|y-z|$，则下面函数 f：

$$f(x)=\frac{t^2-|x-y|^2}{|x-z|^N}$$

在 $\boldsymbol{R}^N\setminus\{z\}$ 调和且有任意阶连续的偏导数.

练习 3-9-4 验证：当 $z=(z_1, z_2,\cdots, z_{N-1}, 0)$ 取定，则下面函数 g：

$$g(x)=\frac{x_N}{|x-z|^N}$$

在上半空间 $\{x=(x_1,\cdots,x_N)\,|\,x_N>0\}$ 调和.

练习 3-9-5 验证：u若在开集 U 调和，则

a) $|u|$在 U 为下调和，$-|u|$在 U 为上调和.

b) $u^+ := \sup\{u, 0\}$在 U 为下调和；$u^- := -\inf\{u, 0\}$在 U 为上调和.

练习 3-9-6 设f为平面的区域 D 上的复解析函数，则 $|f|^p$ 在 D 为下调和（其中 $p>0$ 为实数）; $\log|f|$ 在 D 下调和且在f 非零的点集上为调和.

练习 3-9-7 证明附注 3-7-3.

练习 3-9-8 设 f 为 $\partial B(x, r)$ 上的 Lebesgue 可积函数，又设在 $\zeta \in \partial B$ 的一个邻域上 $f \le k$（常数）几乎处处成立，则

$$\limsup_{x \in B, x \to \zeta} \mathrm{PI}(f, B)(x) \le k.$$

进一步，对任意 $\zeta \in \partial B$,

$$\limsup_{x \in B, x \to \zeta} \mathrm{PI}(f, B)(x) \le \limsup_{z \in \partial B, z \to \zeta} f(z).$$

并由此证明定理 3-5-3 和 3-7-10.

第四章　调和空间的一般理论

本章介绍调和空间的一般理论. 通常谈及调和空间时指的是 CC 调和空间, 即由 Constantinescu C 和 Cornea A 引入的公理体系构成的调和空间, 它包含了 Brelot 调和空间与 Bauer 调和空间 (又称 BBCC 调和空间). 我们将看到 Brelot 调和空间必是 Bauer 调和空间; 椭圆调和空间是 Brelot 调和空间的推广, 实际上, 存在着非 Brelot 调和空间的椭圆 Bauer 空间.

本章前三节分别叙述 CC 调和空间、Brelot 调和空间及 Bauer 调和空间, 第四节介绍调和空间的基地空间的性质, 第五节讨论超调和函数的一些基本性质. 第六节作为补充, 简要介绍关于调和簇的扫除、椭圆调和空间、拟正则扫除及三种超调和函数.

对一个集 E 上的函数族 $\mathfrak{J}$ 及 E 的子集 A, 称 $\mathfrak{J}$ **能分辨** A **中的点**, 指的是, 对 A 中不同的两点 x 与 y, 存在 $f, g \in \mathfrak{J}$ 满足 $f(x)g(y) \neq f(y)g(x)$ (按惯例, $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$). 对 E 上的两个函数族 $\mathfrak{J}$ 与 $\mathfrak{J}'$, 用 $\mathfrak{J} - \mathfrak{J}'$ 表示函数族

$$\{f-g \mid f \in \mathfrak{J}, g \in \mathfrak{J}'\};$$

特别,

$$-\mathfrak{J} := \{-f \mid f \in \mathfrak{J}\}.$$

以下均设 X 为一个局部紧的 Hausdorff 空间, 它的拓扑为 $\mathcal{T}$. 以下谈到开集时, 若未加另外的说明, 总是指 $\mathcal{T}$ 开集. 对任意开集 G, 用 $\mathcal{M}^{+}(G)$ 表示 G 上的 Radon 测度全体 (Radon 测度简称为测度, 有关知识可参见 § 2.3 ~ § 2.6).

定义　若 $\mathcal{U}$ 是定义在 X 的拓扑 $\mathcal{T}$ 上的满足下面三个条件的

映射, 则 $\mathscr{W}$ 称为 X 上的一个函数簇 (Sheaf of functions):

(1) 对任一开集 G, $\mathscr{W}(G)$是 G 上的一个函数族;

(2) 对任意两个开集 G, U, 当 $G \subset U$ 且 $f \in \mathscr{W}(U)$, 则 $f|_G \in \mathscr{W}(G)$;

(3) 对任意一族开集$\{ G_j \mid j \in \mathrm{I}\}$, 记 $G:=\cup \{ G_j \mid j \in \mathrm{I}\}$, 若$f$是 G 上的函数且对每个 $j \in \mathrm{I}$, f 在 G_j 的限制属于$\mathscr{W}(G_j)$,则$f \in \mathscr{W}(G)$.

称V为(其)闭包(包含)**在开集G的相对紧开集**, 指的是开集V的闭包$\overline{V}$ 是紧集且$\overline{V} \subset G$.

§4.1 MP 集、可解集、CC 调和空间

定义 X上的一个函数簇$\mathscr{H}$称为**调和簇**, 如果对X的任一开集 V, $\mathscr{H}(V)$是 V 上的一些连续的实函数构成的实向量空间. 一个函数 h 称为 V 上的 $\mathscr{H}$ 函数,如果 h 的定义域包含了 V 而且 h 在 V 上的限制属于 $\mathscr{H}(V)$.

定义 设$\mathscr{U}$是X上的一个函数簇且满足: 对每个开集G, $\mathscr{U}(G)$是一个由定义在G上取值于$(-\infty, \infty]$的下半连续函数构成的凸锥, 就称 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一个**超调和簇**. 一个函数 u 称为 G 上的 $\mathscr{U}$ 函数, 如果 u 的定义域包含了 G 而且 u 在 G 上的限制属于 $\mathscr{U}(G)$.

定义 设 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一个超调和簇, 对每个开集 G, 令

$$\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(G):=(-\mathscr{U}(G)) \cap \mathscr{U}(G).$$

那么 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(G)$ 是由 G 上的一些连续函数构成的线性空间, $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 是 X 上的一个调和簇, 称为 **$\mathscr{U}$ 关联的调和簇**.

定义 一个开集 G 若满足下面极小值原理, 则称为关于 X 上的超调和簇 $\mathscr{U}$ 的一个 **MP 集**.

极小值原理 对任意$f \in \mathscr{U}(G)$, 若f在X的某个紧集之外取

正值且对每个 $z \in \partial G$ 有

$$\liminf_{x \in G, x \to z} f(x) \geq 0,$$

则在 G 上有 $f \geq 0$.

定理 4-1-1 设 $\mathscr{U}$ 是 X 上的超调和簇，G, V 是 X 的开集，$V \subset G$ 且满足：(1) G 是一个 MP 集；(2) 若 $u \in \mathscr{U}(V)$，则 $\inf\{u, 0\} \in \mathscr{U}(V)$；(3) 对任意 $x \in V$，存在 $v \in \mathscr{U}(V)$ 及 V 的一个紧子集 L 使得 v 在 x 取有限值且 $\inf_{V \setminus L} v > 0$. 那么 V 是一个 MP 集.

证明 设 $u \in \mathscr{U}(V)$ 在 X 的一个紧集 K 之外取正值且对每个 $z \in \partial V$ 有，

$$\liminf_{x \in V, x \to z} u(x) \geq 0.$$

设 $x \in K \cap V$，且 v, L 如定理条件(3)所述. 又设实数 $\varepsilon > 0$. 令

$$K' := \{ y \in (L \cup K) \cap V \mid u(y) + \varepsilon v(y) \leq 0 \}.$$

那么 K' 是 V 的紧子集. 用 w 表示 G 上的函数使得它在 $G \setminus V$ 上等于 0，在 V 上等于 $\inf\{u + \varepsilon v, 0\}$. 据条件 2，$w \in \mathscr{U}(V)$ 且在 $V \setminus K'$ 上等于 0，据簇的定义知 $w \in \mathscr{U}(G)$. 因 G 是 MP 集，故 w 是正的，从而 $u(x) + \varepsilon v(x) \geq 0$. 由 ε 与 x 的任意性推出 u 是正的. □

设 G 为 MP 集. 对 G 的边界 ∂G 上的函数 g，用 $\overline{\mathscr{U}}_g^G$ 表示 $\mathscr{U}(G)$ 中满足下面两条件的函数 u 全体:

(1) u 在 G 上为下有界，在 X 的某个紧集与 G 的交集之外取正值;

(2) $\liminf_{x \in G, x \to z} u(x) \geq g(z), \quad \forall z \in \partial G.$

又记 $\underline{\mathscr{U}}_g^G = -\overline{\mathscr{U}}_{-g}^G$，再记

$$\overline{H}_g^G = \inf \overline{\mathscr{U}}_g^G, \quad \underline{H}_g^G = \sup \underline{\mathscr{U}}_g^G,$$

这里约定 $\inf \varnothing = \infty$, $\sup \varnothing = -\infty$. 并把 $\overline{\mathscr{U}}_g^G$ 与 $\underline{\mathscr{U}}_g^G$ 中的元素分别称为关于 g 在 G 的上函数与下函数.

由上述规定可直接推出下面性质:

a) $-\overline{H}_g^G=\underline{H}_{-g}^G$, $\underline{H}_g^G\le\overline{H}_g$;

b) 对任意正实数 k 成立: $\overline{H}_{kg}^G=k\overline{H}_g^G$;

c) 对∂G上的函数f, g, 若$f\le g$, 则

$$\overline{H}_f^G\le\overline{H}_g^G,\qquad \underline{H}_f^G\le\underline{H}_g^G;$$

d) $\overline{H}_{f+g}^G\le\overline{H}_f^G+\overline{H}_g^G$ 当不出现 $(-\infty)+\infty$ 或 $\infty+(-\infty)$ 时成立.

定义 开集 G 的边界∂G上的一个函数 g 称为(在 G 关于 $\mathscr{U}$)是可解的, 如果$\overline{H}_g^G=\underline{H}_g^G$ 且属于 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(G)$. 当 g 可解时, 记 H_g^G 代替 $\overline{H}_g^G$ 或 $\underline{H}_g^G$.

定义 如果一个非空的MP集 G 使得每个 $q\in\boldsymbol{K}(\partial G)$ 关于 $\mathscr{U}$ 可解, 则称 G 是一个(关于 $\mathscr{U}$ 的)**可解集**.

若 G 是可解集, 则对每个取定的 $x\in G$, 映射 $q\mapsto H_q^G(x)$是$\boldsymbol{K}(\partial G)$上的一个正线性泛函. 据 Riesz 表现定理(定理 2-6-3), 在∂G上存在唯一的 Radon 测度μ_x^G使得

$$H_q^G(x)=\int q\,\mathrm{d}\,\mu_x^G,\qquad q\in\boldsymbol{K}(\partial G)$$

这个测度 $\mu_x:=\mu_x^G$ 称为关于 G 在 x (相对于 $\mathscr{U}$)的**调和测度**. 调和测度族 $(\mu_x)_{x\in G}$ 称为记作 μ^G 或 μ, 称为 G 上的**调和扫除** (参看 § 4.6) .

对∂G上的任意函数f, 我们定义 $\mu f(x)$ 或 $\mu_x^G f$ 为 f 关于μ_x(或关于相应的泛函) 的上积分 (关于上、下积分的概念可参见 § 2.3):

$$\mu f(x)=\mu_x^G f:=\int^{*} f\,\mathrm{d}\mu_x;$$

当 x 取遍 G 时, 就得到 G 上的一个函数 $\mu^G f$ 或简记为 μf. 特别, 当$f\in\boldsymbol{K}(\partial G)$ 时有 $\mu f=H_f^G$. 由广义 Riesz 表现定理 (定理

2-6-4) 知，当 f 为可测且 μ_x 可积时，上积分就是通常的积分，即

$$\int^{*} f \mathrm{d}\mu_x = \int f \mathrm{d}\mu_x.$$

注 1 上面在定义边界函数的可解性及可解集时，采用了 Perron 开创的、在 $\boldsymbol{R}^N$ 的开集 G 上求 Dirichlet 问题一般解（或称广义解）的方法，也称为 **WPB** (Wiener-Perron-Brelot)方法. 其中 $\overline{\mathscr{U}}_g^G$ 与 $\underline{\mathscr{U}}_g^G$ 分别为上、下函数族，$\overline{H}_g^G$ 与 $\underline{H}_g^G$ 分别称为关于 g 的上解与下解，当 g 可解时，H_g^G 就是关于 g 在 G 的 Dirichlet 问题的一般解. □

定理 4-1-2 设 $X, \mathscr{U}$ 如上段规定, G 为可解集, $x \in G$.

a) 设 f 是 ∂G 上的任一数值函数，则

$$\underline{H}_f^G(x) \le \int_{*} f \mathrm{d}\mu_x^G \le \int^{*} f \mathrm{d}\mu_x^G \le \overline{H}_f^G(x),$$

其中 $\int_{*}$ 表示下积分.

b) 若 f 在 ∂G 上是下有界的、下半连续的且在一个紧集之外取正值, 则

$$\underline{H}_f^G(x) = \int^{*} f \mathrm{d}\, \mu_x^G = \mu_x^G(f);$$

c) 特别，当 $g \in \mathscr{U}(G)$，则对任何闭包在 G 的相对紧可解集 V 都有 $\mu^V g \le g$.

证明 a) 设 $u \in \overline{\mathscr{U}}_f^G$，用 u^* 表示在∂G上用下式定义的函数

$$u^*(z) := \liminf_{y \to z,\, y \in G} u(y) \quad , \quad z \in \partial G$$

那么 u^*是∂G 上的一个下有界、下半连续函数, $u^* \ge f$ 且在一个紧集之外取正值. 令 $Q := \{q \in \boldsymbol{K}(\partial G) \mid q \le u^*\}$. 那么对每个 $q \in Q$ 有 $u^* \in \overline{\mathscr{U}}_q^G$，故有

$$\int q \, \mathrm{d}\mu_x^G = H_q^G(x) \le u(x).$$

从而

$$\int^{*} f\,\mathrm{d}\,\mu_x^G \le \int^{*} u^{*}\,\mathrm{d}\,\mu_x^G$$
$$=\sup_{q\in Q}\int q\,\mathrm{d}\mu_x^G \le u(x)\,.$$
因为 u 是任意的，故
$$\int^{*} f\mathrm{d}\mu_x^G \le \overline{H}_f^G(x).$$
同理可证
$$\underline{H}_f^G(x) \le \int_{*} f\mathrm{d}\mu_x^G\ .$$
b) 现设 f 为 ∂G 上的下有界，下半连续函数且在某一个紧集之外取正值. 设 $q\in \boldsymbol{K}(\partial G)$ 且 $q\le f$，则
$$\int q\,\mathrm{d}\mu_x^G = H_q^G(x) \le \underline{H}_f^G(x)\,,$$
从而
$$\int^{*} f\mathrm{d}\mu_x^G \le \underline{H}_f^G(x)\,.$$
c) 当 $g\in \mathcal{U}(G)$，V 是闭包在 G 的相对紧可解集时，g 在紧集 $\overline{V}$ 下有界；因 $f:=g|_{\partial V}$ 满足 b) 所要求的条件且 g 是 f 在 V 的上函数，故在 V 上有 $\mu^V g\le g$.□

定理 4-1-3 设 X 为局部紧 Hausdorff 空间，$\mathcal{U}$ 为 X 上的一个超调和函数簇，G 为 X 的一个可解集，W 是 G 的一个开子集使得 $\partial W\subset\partial G$，那么 W 是可解集且对任意 $x\in W$，有 $\mu_x^W=\mu_x^G$. 因此，若 X 局部连通，则任一可解集的任何连通分支都是可解集.

证明 易知 W 是一个 MP 集. 设 $f\in \boldsymbol{K}(\partial W)$. 那么，存在 $g\in \boldsymbol{K}(\partial G)$ 使得 $f=g|_{\partial W}$. 因此，对任何 $v\in\overline{\mathcal{U}}_g^G$，有 $v|_W\in\overline{\mathcal{U}}_f^W$；关于下函数的情况类似，从而，
$$H_g^G(x)\le \underline{H}_f^W \le \overline{H}_f^W \le H_g^G$$
在 W 上成立. 这说明 W 可解. □

定义 设 X 为局部紧 Hausdorff 空间，$\mathcal{U}$ 为 X 上的一个超调和函数簇，若下面四个公理满足，则称 $(X,\mathcal{U})$ 或 X 为一个 CC

调和空间，简称调和空间.

在调和空间中，总认定 $\mathscr{H} := \mathscr{H}_{\mathscr{U}}$.

公理 P（**正性公理**）：X 的每个点 x 有一个开邻域 U 及某个 $h \in \mathscr{H}(U)$ 使得 $h(x) \neq 0$.

公理 R（**可解性公理**）关于 $\mathscr{U}$ 的可解集全体构成 X 的拓扑基.

公理 C（**完备性公理**）：对任意开集 G 及 G 上任意一个取值于 $(-\infty, \infty]$ 的下半连续函数 u, 若关于任一闭包在 G 的相对紧可解集 V 都有 $\mu^V u \leq u$ 在 V 成立，则 $u \in \mathscr{U}(G)$.

公理 BC（**Bauer 收敛性质**）：对任何开集 G, 若$\{u_i\}$是 $\mathscr{H}(G)$ 中的一个单调增加列且局部一致有界，则其极限函数

$$u := \lim_i u_i \in \mathscr{H}(G).$$

定义 对于调和空间$(X, \mathscr{U})$中的开集 G, $\mathscr{H}(G)$的元素称为 G 上的**调和函数**, $\mathscr{U}(G)$的元素称为 G 上的**超调和函数**. 若 $-u$ 是 G 上的超调和函数，则 u 说是 G 上的**次调和函数**.

注 2 在正性公理中，条件 $h(x) \neq 0$ 可以换成 $h(x) > 0$. 进一步，若选取 x 的开邻域 U 充分小，可以保证在 $\overline{U}$ 上有 $h(x) > 0$. □

注 3 由完备性公理及 $\mathscr{U}$ 的簇性质可推出：对任意开集 G 及 G 上的任意取值于 $(-\infty, \infty]$ 的下半连续函数 u, 如果 G 中每个 x 都有一个开邻域 $U_x \subset G$, 使得对任何闭包在 U_x 的相对紧的可解集 D 都有 $\mu^D u \leq u$ 在 D 成立，则 $u \in \mathscr{U}(G)$.

由完备性公理和定理 4-1-2 之 c)得，在调和空间$(X, \mathscr{U})$中，对 X 的任一开子集 G, $u \in \mathscr{U}(G)$ 当且仅当对任何闭包在 G 的相对紧的可解集 V 有 $\mu^V u \leq u$. □

注 4 通过比较超调和函数的定义，完备性公理与第三章关于 $\boldsymbol{R}^N$ 中经典的调和函数的定义，性质 P 及定理 3-2-7 的结论，可以进一步认识公理系统的相应概念的历史背景与直观模型. □

设 $Y\subset X$ 为非空开集而 $f\in C(Y)$ 是 Y 上的、严格正的函数. 对 Y 的每个相对开集 D，令

$$\mathscr{U}_{Yf}(D)=\{\,u/f\,|\,u\in\mathscr{U}(D)\,\},$$

则 $\mathscr{U}_{Yf}$ 是 Y 上的一个超调和簇且 $(Y,\mathscr{U}_{Yf})$ 是一个调和空间. 当 $Y=X$ 时，我们用 $\mathscr{U}_f$ 代替 $\mathscr{U}_{Yf}$. 另一方面，若 $f\equiv 1$，则用 $\mathscr{U}_Y$ 代替 $\mathscr{U}_{Yf}$，这时，$(Y,\mathscr{U}_Y)$ 叫做 $(X,\mathscr{U})$ 在 Y 的限制，也叫做 (以 Y 为基地的)子调和空间.

§4.2 Brelot 调和空间

Trautz G 与 Doob J L 最早在位势论中引入公理体系. 在他们建立的基础上, Brelot M 于 1957 年引入了一个较为严格的公理系统，其中要求调和簇具有类似于 $\boldsymbol{R}^N$ 中关于 Laplace 方程的调和函数列之 Harnack 收敛性质的性质 — 后来被命名为 Brelot 收敛性质. 由此出发，他的巴黎数学研究院迅速获得大批成果. 因此，人们把他们研究的空间冠以 Brelot 的大名. 不难看到，这个空间的许多性质是经典位势论中相应性质的直接发展. 其实，Brelot 调和空间的建立就是为了统一处理 $\boldsymbol{R}^N$ $(N\geq 2)$中与比 Laplace 方程更一般的椭圆型方程相关联的位势，上调和函数等位势论概念与定理的. 后来 Brelot 空间发展为更为一般的空间 — 椭圆调和空间，它对应于 $\boldsymbol{R}^N$ 中更广泛的一类椭圆型微分方程.

类似于在 $\boldsymbol{R}^N$，我们也常把 X 的连通开集称为区域.

定义 设 $X=(X,\mathcal{T})$是无孤立点的、局部连通的局部紧 Hausdorff 空间，$\mathscr{H}$ 是 X 上的一个函数簇. 序偶$(X,\mathscr{H})$若满足下面三个公理，则称之为 **Brelot 调和空间**. 当 $\mathscr{H}$ 明确时，也称 X 为 Brelot 调和空间：

公理 1：对 X 的每个开集 G，$\mathscr{H}(G)$是连续函数空间 $C(G)$的一个线性子空间.

公理 2 关于 $\mathscr{H}$ 的正则区域全体构成 X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基.

X 的一个区域 D 称为关于 $\mathscr{H}$ **正则的**或简称**正则的**，如果 D 是相对紧的，其边界∂D 是非空集；且对每个 $g \in C(\partial D)$，存在唯一的函数 $h \in C(\overline{D})$ 使得 $h|_{\partial D} = g$ 且 $h|_D \in \mathscr{H}(D)$ 并满足：当 $g \geq 0$ 时必有 $h \geq 0$.

公理 3（Brelot 收敛性质） 若 D 是 X 上的一个区域，$\{u_i\}$ 是$\mathscr{H}(D)$中的一个单调增加列且存在 $x_0 \in D$ 使得 $\{u_i(x_0)\}$有界，则

$$u := \lim_i u_i \in \mathscr{H}(D).$$

若 D 是一个正则区域且 $g \in C(\partial D)$，将满足下面条件的函数 h 记作 H_g^D: $h \in C(\overline{D})$使得 $h|_{\partial D} = g$ 且 $h|_D \in \mathscr{H}(D)$. 于是，对任意取定的 D，映射 $g \mapsto H_g^D$ 是 $C(\partial D)$上的一个正线性泛函. 据 Riesz 表示定理（定理 2-4-2），该泛函对应着 ∂D 上唯一的 Radon 测度$\mu_x := \mu_x^D$，称为在 D 中 x 的**调和测度**（试比较 § 4.1 在可解集的边界上定义的关于 $\mathscr{U}$ 的调和测度）. 类似于 § 4.1，调和测度族$(\mu_x)_{x\in D}$记作 μ^D 或 μ，可以定义 ∂D 上的映射 μ (或记作 μ^D)：对∂D 上的任意数值函数f，

$$\mu f(x) = (\mu^D f)(x) := \int^* f \, d\mu_x^D, \qquad x \in D.$$

那么，μ 或 μ^D 把 ∂D 上的函数映射成 D 上的函数.

定义 在 Brelot 调和空间 $(X, \mathscr{H})$中，设 G 为开集，则称$\mathscr{H}(G)$中的函数为 G 上的**调和函数**. 对 G 上的下半连续函数 u，若 G 中每一点 x 有一个开邻域 V_x，使得对任何一个闭包包含于 V_x 的正则区域 D 恒有 $\mu^D u \leq u$ 在 D 成立，则称 u 在 G 上 (相对于$\mathscr{H}$) **是局部超调和的**.

用 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}(G)$ 表示 G 上所有相对于 $\mathscr{H}$ 是局部超调和的函数全体，则容易看到，对所有开集都作同样考虑得到的函数簇 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 是

X 上的一个超调和簇且当记 $\mathscr{U}':=\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 时有 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}'}=\mathscr{H}$.

引理 4-2-1 设 $(X,\mathscr{H})$ 是 Brelot 调和空间，G 为区域且 $u\in\mathscr{H}(G)$. 若 u 在 G 是正的（即 $u\geq 0$）且有 $y\in G$ 使得 $u(y)=0$，则 u 在 G 上恒等于 0.

证明 设 $u_i:=i\,u$, $i\in\mathbf{N}$, 则$\{u_i\}$为 $\mathscr{H}(G)$ 中的单调增加列，因为 $\{u_i(y)\}$ 有界（实际上，每个 $u_i(y)=0$），由公理 3 知

$$w:=\lim_{i\to\infty}u_i\in\mathscr{H}(G).$$

故对 G 中的 x 都有 $0\leq i\,u(x)\leq w(x)<\infty$, $i\in\mathbf{N}$; 所以 $u(x)=0$. □

引理 4-2-2 设$(X,\mathscr{H})$是 Brelot 调和空间，D 是一个正则区域，W 是一个开集使得 $\partial D\cap W\neq\varnothing$. 那么对 D 中每个 x 成立

$$\mu_x^D(\partial D\cap W)>0. \tag{2.1}$$

证明 据 Uryshon 引理及 § 1.2 有关结论，可选取 ∂D 上的一个连续函数 g，使得 g 不恒等于 0，g 取值于区间 $[0,1]$ 之中且其支柱包含于 $\partial D\cap W$. 因为对任取定的 $x\in D$, $g\mapsto H_g^D(x)$ 是 $C(\partial D)$ 上的一个正线性泛函，故 H_g^D 是 D 上的正调和函数. 因 g 不恒为 0 知 H_g^D 也不恒为 0. 再据上一个引理推出 $H_g^D(x)>0$, $x\in D$. 对 $\partial D\cap W$ 的特征函数 f, 显然有 $0\leq g\leq f$. 因为

$$\mu_x^D(\partial D\cap W)=\int f\mu_x^D=H_f^D(x)\geq H_g^D(x)>0,$$

从而(2.1)式成立. □

引理 4-2-3 设$(X,\mathscr{H})$是 Brelot 调和空间，D 是 X 的一个区域，$u\in\mathscr{U}_{\mathscr{H}}(D)$. 若 u 在 D 的一个非空开子集 W 上恒等于 ∞，则它在 D 上也恒等于 ∞. 换言之，u 在 D 要么恒等于 ∞，要么在 D 的一个稠密子集恒等于 ∞.

证明 设 $A:=\{x\in D\mid u$ 在 x 的一个开邻域上恒等于$\infty\}$, 显然 A 是包含 W 的开集. 我们断言 $A=D$. 否则，设 G 是 A 的一个连通分支，于是 $G\subset D$ 且 $G\neq D$. 因 D 是连通的，$\partial G\cap D$ 非空. 设 $z\in\partial G\cap D$. 因 $u\in\mathscr{U}_{\mathscr{H}}(D)$，由局部超调和函数的定义，存在 z 的

一个开邻域 V，使得对任何一个闭包包含在 V 的正则区域 U 都有 $\mu^U u \leq u$. 取定一个 $y \in V \cap G$ 及一个正则区域 U 使得 $z \in U$ 且 U 的闭包包含在 $V \setminus \{ y \}$. 因为 G 是连通的，故 $\partial U \cap G$ 非空. 由于 u 在 $\partial U \cap G$ 上恒等于 ∞，据上一引理知：对任意 $x \in U$ 有 $\mu_x^U(\partial U \cap G) > 0$；故

$$u(x) \geq \mu^U u(x) = \infty, \qquad x \in U$$

这说明 $z \in A$，与 z 的定义矛盾. 故 $A = D$. □

定理 4-2-4 设$(X, \mathscr{H})$是 Brelot 调和空间，D 是 X 的一个区域，$u \in \mathscr{U}_{\mathscr{H}}(D)$且在 D 上有 $u \geq 0$. 若存在 D 中的点 z 使得 $u(z) = 0$，则 $u \equiv 0$.

证明 令 $G := \{ x \in D \mid u(x) > 0 \}$，则 G 为开集. 若 G 非空，令 $g := \lim_i (i\,u)$. 显然，$g \in \mathscr{U}_{\mathscr{H}}(G)$. 因为在 G 上 $g \equiv \infty$，由上一引理知，在 D 上也有 $g \equiv \infty$. 这表明对任意 $x \in D$ 有 $u(x) > 0$. □

定理 4-2-5 设 $(X, \mathscr{H})$ 是 Brelot 调和空间，G 是开集. 若存在 $f \in \mathscr{U}_{\mathscr{H}}(G) \cap C(G)$ 使得 $\inf_G f > 0$，则 G 是相对于 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 的一个 MP 集.

证明 设 $u \in \mathscr{U}_{\mathscr{H}}(G)$ 且具有紧支柱 K 使得在 $G \setminus K$ 上有 $u \geq 0$，并且对每个 $z \in \partial G$ 有

$$\liminf_{x \in G, x \to z} u(x) \geq 0 . \tag{2.2}$$

我们要证 $u \geq 0$ 在 G 上成立. 否则，将推出

$$\alpha := \inf_G (u / f) < 0 .$$

那么由 u/f 的下半连续性及 u 的边界条件(2.2)推出，存在 $y \in G$ 使得

$$\alpha = \frac{u(y)}{f(y)} .$$

令 $w := u - \alpha f$，则 $w \in \mathscr{U}_{\mathscr{H}}(G)$ 且在 G 上有 $w \geq 0$. 因为 $w(y) = 0$，由定理 4-2-4 知，在 G 的那个包含 y 的连通分支上 w 恒等于 0，

即 $u=\alpha f$. 再由假定 $\alpha<0$ 且 $\inf_G f>0$ 知，这与(2.2)式矛盾. □

下一定理是本节的主要结论.

定理 4-2-6 若 $(X,\mathscr{H})$ 是 Brelot 调和空间，则 $(X,\mathscr{U}_{\mathscr{H}})$ 是一个 CC 调和空间，而且每个局部超调和函数都是超调和函数，即：若 G 是开集，$u\in\mathscr{U}_{\mathscr{H}}(G)$，则在任何一个其闭包包含于 G 的正则区域 D 上有 $\mu^D u\le u$.

证明 设 D 为正则区域，令 $h:=H_1^D$，则 $h\in\mathscr{H}(D)$ 且由引理 4-2-1 知在 $\overline{D}$ 上有 $h>0$. 由公理 2，正则域全体构成 X 的一个拓扑基，从而 $(X,\mathscr{U}_{\mathscr{H}})$ 满足 § 4.1 的公理 P（正性公理）.

又，由定理 4-2-5 知，每个正则域都是 MP 集. 容易看到，对每个正则域 D 及 $f\in C(D)$有

$$H_f^D=\overline{H}_f^D=\underline{H}_f^D .$$

因此，D 是相对于 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 的可解集. 故由公理 2 得知，有一个由可解集构成的 X 的拓扑基，即 § 4.1 的公理 R（可解性公理）也满足.

再者，由 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 的定义立即推出 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 满足公理 C（完备性公理）. 而公理 3 (Brelot 收敛性质）成立显然蕴涵 § 4.1 的公理 BC (Bauer 收敛性质）成立. 因此，$(X,\mathscr{U}_{\mathscr{H}})$是一个 CC 调和空间.

下面证每个局部超调和函数都是超调和函数. 设 G 为开集，$u\in\mathscr{U}_{\mathscr{H}}(G)$，$D$ 为正则区域且闭包包含于 G. 由于 u 在 ∂D 下半连续，故

$$\mathscr{G}:=\{f\in \mathbf{K}(\partial D)\mid f\le u \text{ 在} \partial D\}$$

是一个上定向集且 $u=\sup\mathscr{G}$. 对任意 $f\in\mathscr{G}$, 对于 D 的任何一个边界点 z 有

$$\liminf_{x\in D,x\to z} u(x)\ge u(z)\ge f(z) .$$

因为 D 正则，故 H_f^D 在 $\overline{D}$ 连续且在∂D 上等于f，从而由上式得

$$\liminf_{x\in D, x\to z} [u(x) - H_f^D(x)] \geq 0 .$$

由于 $u - H_f^D \in \mathscr{U}_{\mathscr{H}}(D)$，又 D 是 MP 集且 D 为正则，从而其闭包是紧的，故由上式及上一定理推出，

$$u - H_f^D \geq 0$$

在 D 上成立. 再由

$$u(x) \geq H_f^D(x) = \int f \mathrm{d}\mu_x^D, \qquad x \in D$$

推出

$$u(x) \geq \int u \,\mathrm{d}\mu_x^D = \mu^D u(x), \qquad x \in D \quad \square$$

注 请读者比较本定理与定理 4-1-2 的异同点，并思考其中类似的结论为何采用不同的办法来证明.

§4.3 Bauer 调和空间

仍设 X 为局部紧 Hausdorff 拓扑空间，$\mathscr{H}$ 为 X 上的满足 §4.2 中公理 1 及公理 2 的一个调和簇，$\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 为相对于 $\mathscr{H}$ 的局部超调和函数簇，用 $\mathscr{H}^*(G)$表示开集 G 上所有超调和函数组成的集，即

$\mathscr{H}^*(G) := \{ u \mid u$ 是从 G 到$(-\infty, \infty]$的下半连续函数且对每个闭包包含在 G 的正则区域 D 满足$\mu^D u \leq u \}$.

定义 序偶 $(X, \mathscr{H})$ 如果同时满足 §4.2 中公理 1、公理 2, §4.1 中公理 P、公理 BC 及下面的公理 S，则称为一个 Bauer-Boboc-Constantinescu-Cornea 调和空间，简称 **BBCC 调和空间或 Bauer 调和空间**:

公理 S（分辨性公理）: X 中的每个点 x 都有一个开邻域 G 使得 $\mathscr{H}^*(G)$ 能分辨 G 中的点 (分辨的定义见本章开头).

下面我们先证明 Bauer 调和空间是 CC 调和空间，然后再说

明 Brelot 调和空间是 Bauer 调和空间. 最后，举例说明 Bauer 调和空间未必是 Brelot 调和空间，CC 调和空间也未必是 Bauer 调和空间.

引理 4-3-1 设 Y 是 X 的一个紧子集, $\mathfrak{I}$ 是从 Y 到 $(-\infty, \infty]$ 的一些下半连续函数组成的集, $\mathfrak{I}$ 能分辨 Y 中的点且 $\mathfrak{I}$ 中存在一个严格正的连续函数 g. 若 $f \in \mathfrak{I}$ 且存在 $x \in Y$ 使得 $f(x) < 0$, 则存在 $\xi \in Y$ 使得 $f(\xi) < 0$ 且单位正质点 ε_ξ 是满足下面关系式的、Y 上的唯一测度 μ:

$$\int u \, d\mu \le u(\xi), \qquad u \in \mathfrak{I}$$

证明 设 $\alpha := -\inf_Y (f/g)$, 那么 $\alpha > 0$ 且在 Y 上有 $f + \alpha g \ge 0$. 因 f/g 在紧集 Y 下半连续，故

$$K := \{ y \in Y \,|\, f(y) + \alpha g(x) = 0 \} \ne \varnothing.$$

显然 K 为紧集且在 K 上有 $f < 0$. 对每个 $y \in Y$, 令

$$\mathcal{M}_y := \{ \mu \in \mathcal{M}^+(Y) \,|\, \int u \, d\mu \le u(y), \forall u \in \mathfrak{I} \},$$

其中 $\mathcal{M}^+(Y)$ 表示 Y 上的 Radon 测度全体. 又令

$$\mathcal{A} := \{ A \subset Y \,|\, A \text{ 为非空紧集且} \mu(Y \setminus A) = 0 \ \forall y \in A, \forall \mu \in \mathcal{M}_y \}$$

若 $y \in K$, $\mu \in \mathcal{M}_y$, 则

$$0 \le \int (f + \alpha g) \, d\mu \le (f + \alpha g)(y) = 0,$$

故 $f + \alpha g = 0$ μ-a.e, 即 $\mu(Y \setminus K) = 0$. 可见 $K \in \mathcal{A}$.

在集族 $\mathcal{A}$ 中规定以集合之间的反包含关系为次序“$\le$”，即 $\forall\, U, V \in \mathcal{A}$, $U \le V$ 当且仅当 $V \subset U$. 于是 A 中每个线性集有极大元. 事实上，设 $\mathcal{L} \subset A$ 是一个线性集，那么易验证 $U := \cap \mathcal{L} \in \mathcal{A}$, 于是，据 Zorn 引理，在 $\mathcal{A}$ 中存在一个最大元 B, $B \subset K$.

下面证明 B 为单点集. 设 $u \in \mathfrak{I}$ 且在 B 上不恒等于 ∞, 那么存在正的实数 β 使得对 B 中的每个点 z 都满足 $u(z) + \beta f(z) < 0$. 令

$$r := -\inf_B [(u + \beta f)/g],$$

则 $r > 0$ 且在 B 上有 $u + \beta f + r g \ge 0$. 再令

$$C := \{y \in B \mid u(y) + \beta f(y) + r\, g(y) = 0\},$$
则 $C \neq \varnothing$. 类似于对 K 的讨论可推出 $C \in \mathcal{A}$. 因为 B 为最大元且 C 为 B 的子集，故 $B = C$. 即在 B 上有

$$u = -\beta f - r\, g = (\delta - r)\, g,$$
其中 $\delta := -\beta - \alpha$. 这说明 $\mathfrak{I}$ 的每个元素 u 在 B 上与 g 成比例. 但据题设，$\mathfrak{I}$ 能分辨 Y 中的点，因此 B 只能是单点集. 记 $B := \{\xi\}$. 若 $\mu \in \mathcal{M}_\xi$，则 $\mu(Y\setminus\{\xi\}) = 0$. 于是，存在正的实数 k 使得 $\mu = k\,\varepsilon_\xi$. 又因为

$$\int u\, d\mu \leq u(\xi) \qquad u \in \mathfrak{I},$$

而 $f(\xi) < 0$，$g(\xi) > 0$，所以推出 $k = 1$，即 $\mu = \varepsilon_\xi$，从而 $\mathcal{M}_\xi = \{\varepsilon_\xi\}$.
□

定理 4-3-2（**极小值原理**）设 $(X, \mathcal{H})$ 是 Bauer 调和空间，G 为开集. 假定

a) 存在 $v \in \mathcal{U}_{\mathcal{H}}(G) \cap C(G)$ 使得 $\inf_G v > 0$ 且

b) $\mathcal{H}^*(G)$能分辨 G 中的点，

则 G 是关于 $\mathcal{U}_{\mathcal{H}}$ 的 MP 集且 $\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(G) = \mathcal{H}^*(G)$.

证明 设 $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{H}}(G)$且 X 有紧子集 K 使得在 $G \setminus K$ 上 $u \geq 0$，并对每个 $z \in \partial G$ 有

$$\liminf_{x\in G, x\to z} u(x) \geq 0 .$$

我们要证

$$A := \{x \in G \mid u(x) < 0\} = \varnothing.$$
用反证法，设 $A \neq \varnothing$. 取一个正的实数 k 使得对一个取定的 $x \in A$ 有 $u(x) + k\,v(x) < 0$. 令

$$B := \{y \in A \mid u(y) + k\,v(y) \leq 0\},$$
那么 B 是非空紧集. 用 Y 表示 B 的一个紧邻域使得 $Y \subset G$，考虑 $u + k\,v$，v 以及 $\mathcal{H}^*(G)$ 的元素在 Y 上的限制所组成的函数族$\mathfrak{I}$，即

$$\mathfrak{I} := \{w|_Y \mid w \in \mathcal{H}^*(G)\} \cup \{(u+kv)|_Y\} \cup \{v|_Y\},$$

据上一引理知，存在$\xi \in B$使得ε_ξ是Y上满足下面条件的唯一测度 μ：

$$\int f d\mu \le f(z), \qquad f \in \mathfrak{I}. \qquad (3.1)$$

因为$u, v \in \mathcal{U}_\mathcal{H}(G)$, 可选一个正则区域$D$使得$\xi \in D \subset \overline{D} \subset Y$且

$$\int u \, d\mu_\xi^D \le u(\xi), \qquad \int v \, d\mu_\xi^D \le v(\xi),$$

而对于$h \in \mathcal{H}^*(G)$，自然有

$$\int h \, d\mu_\xi^D \le h(\xi).$$

于是，当 $\mu = \mu_\xi^D$ 时，(3.1) 对每个 $f \in \mathfrak{I}$ 成立. 由此推出，$\mu_\xi^D = \varepsilon_\xi$. 但这与 μ_ξ^D 分布在 ∂D 而 $\xi \in D$ 的事实矛盾. 因此A为空集，即在G上有$u \ge 0$. 从而证明了G是关于$\mathcal{U}_\mathcal{H}$的MP集. 又因为$\mathcal{H}^*(G) \subset \mathcal{U}_\mathcal{H}(G)$，故$G$也是关于$\mathcal{H}^*$的MP集.

对于G的任何开子集V，显然条件a）与b）也满足，故V关于$\mathcal{U}_\mathcal{H}$及$\mathcal{H}^*$ 也都是MP集.

下面证明，局部超调和函数必是超调和函数. 设$g \in \mathcal{U}_\mathcal{H}(G)$, 要证$g \in \mathcal{H}^*(G)$. 任取一个正则集$V$使得其闭包$\overline{V}$包含于$G$. 在$\partial V$上，因$g$下半连续，故可表示为$g = \sup\{f \in \boldsymbol{K}(\partial V) \mid f \le g\}$. 注意到对任何这样的函数$f$及$\partial V$上的任意点$z$有

$$\lim_{x \to z, x \in V} g(x) \ge g(z) \ge f(z).$$

因为V是正则集，所以H_f^V在$\overline{V}$上连续. 从而

$$\lim_{x \to z, x \in V} [g(x) - H_f^V(x)] \ge 0.$$

又因V是MP集，故 $[g(x) - H_f^V(x)] \ge 0$ 在V上成立，即

$$\int f \, d\mu_x^V \le g(x), \qquad x \in V.$$

由Radon测度的广义Riesz表示定理（定理2-6-3）推出

$$g(x) \ge \int (\sup f) \, d\mu_x^V = \int g \, d\mu_x^V = \mu^V g(x), \qquad x \in V.$$

即$g \ge \mu^V g$. 由V的任意性知g为超调和函数. 从而证得了

$$\mathscr{U}_{\mathscr{H}}(G) \subset \mathscr{H}^*(G);$$

而反向的包含关系是显然的，故定理获证. □

定理 4-3-3 若$(X,\mathscr{H})$ 是 Bauer 调和空间，则 $(X,\mathscr{U}_{\mathscr{H}})$ 是 CC 调和空间.

证明 首先，按 Bauer 空间的定义，§ 1 的公理 P 与公理 BC 成立(因为 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 所关联的调和空间就是 $\mathscr{H}$). 又，对任何正则域 D，若存在 $h \in \mathscr{H}(D)$ 使得 $\inf_D h > 0$ 且这里的 $\mathscr{H}^*(D)$ 能分辨 D 中的点，则由定理 4-3-2 知，D 为 MP 集，从而是可解集. 由 § 2 公理 2，正则域全体构成 X 的一个拓扑基. 再由公理 P 和公理 S 知，X 的每个点 x 有一个邻域 $V:=V_x$，使得 V 上存在一个调和函数满足 $\inf_D h > 0$ 且 $\mathscr{H}^*(V)$ 能分辨 V 的点. 于是，X 的每个点的那些既是正则区域又是 MP 集的邻域构成该点的一个邻域基，由此可以得到 X 的一个由这种可解集构成的拓扑基. 这说明公理 R 成立. 又因 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 是一个簇，由局部超调和函数的定义可推出公理 C 也成立. 综合上述论述知 $(X,\mathscr{U}_{\mathscr{H}})$ 是 CC 调和空间. □

注 可以证明，若 $(X,\mathscr{U})$ 是一个 CC 调和空间且 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 满足 § 2 公理 2，则 $(X,\mathscr{H}_{\mathscr{U}})$ 是一个 Bauer 调和空间（见定理 5-4-14 或文献[10]推论 3.1.2）. 前面已证明了 Brelot 调和空间是一个 CC 调和空间，由此推出 Brelot 调和空间也是 Bauer 调和空间.

例 1 设 X 是 N 维欧氏空间 R^N ($N \geq 1$)的一个开集，a_{ij}, b_i, c ($i, j=1,2,\cdots,N$) 是 X 上连续的实函数且 (a_{ij}) 是 X 上的一个对称的、严格正定的矩阵. 令

$$Lu:=\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu.$$

对 X 的开子集 G，令

$$\mathscr{H}(G):=\{u \in C^2(G) \mid Lu=0 \text{ 在 } G \text{ 成立}\},$$

则 $(X,\mathscr{H})$ 是一个 Brelot 调和空间（[10]Ex.3.2.7）. 特当 L 为 Laplace 算子 Δ 时，$\mathscr{H}$ 就是经典的调和簇. 此时，每个 N 维开球

都是正则域. 这时，X中的开球全体是X的的一个拓扑基，公理 3 就是通常的 Harnack 单调收敛定理（参看 § 3.6 推论 3-6-6）.

例 2 设X是$\boldsymbol{R}^{N+1}(N\geq 1)$ 的一个开集，G是X的开集，令

$$\mathscr{H}(G):=\{u\in \boldsymbol{C}^2(G)\mid \frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}=\Delta_N u \text{ 在 } G \text{ 成立}\},$$

此处$\Delta_N:=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$，则 $(X, \mathscr{H})$ 是一个 Bauer 空间（见文献[38]或[10] § 3.3)，但不是 Brelot 调和空间.

例 3 $X=\boldsymbol{R}^1$，对X的任意开子集G，用$\mathscr{U}(G)$表示G上这种取值于$(-\infty,\infty]$ 的下半连续函数u组成的簇: u在G的每个连通分支上是单调增加的，则$(X, \mathscr{U})$是一个调和空间. 但是，没有一个开集是相对于 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 正则的. 于是，这样的空间$(X, \mathscr{H}_{\mathscr{U}})$不是 Bauer 调和空间.

例 4 设X是$\boldsymbol{R}^1$的子空间$(-1, 1)$. 对X的任意开集G，用$\mathscr{H}(G)$ 表示G上这样的连续实函数h全体：h在$G\setminus\{0\}$是局部线性的而且当 $0\in G$ 时， 存在一个严格正的常数ε使得 h 在 $G\cap(-\varepsilon, 0)$ 上取常数值. 那么$\mathscr{H}$是一个调和簇，它具有 **Doob 收敛性质**：即在X的任意开子集G上，$\mathscr{H}$中任何单调增加的序列的极限函数若在G的一稠密子集上取有限值，则该极限函数也是$\mathscr{H}(G)$中的函数.

易知，$(X, \mathscr{H})$是一个 Bauer 空间但不是 Brelot 空间（参看文献[10]Ex.3.1.7）.

§ 4.4 调和空间的基地空间的性质

设 $(X, \mathscr{U})$ 为 CC 调和空间.

引理 4-4-1 (Cornea A.) 设Y是一个局部紧 Hausdorff 空间，

$\Im$是$C(Y)$中的一个上定向集，使得 $\Im$ 中每个单调增加列$\{f_i\}$的极限函数是连续的，则 $\sup \Im$也是连续的.

证明 设$f := \sup \Im$. 假定f 在$y \in Y$不连续. 因为f下半连续，故

$$f(y) < \limsup_{x \to y} f(x).$$

选取实数α, β使得满足

$$f(y) < \alpha < \beta < \limsup_{x \to y} f(x). \tag{4.1}$$

任取$f_1 \in \Im$，则$f_1(y) \le f(y) < \alpha$，因而y有一个紧邻域K_1使得在K_1有$f_1 < \alpha$. 另一方面，由(4.1)式知存在$x_1 \in K_1$，使得$f(x_1) > \beta$. 据f 的定义，存在$f_2 \in \Im$，使得 $f_2(x_1) > \beta$ 且 $f_2 \ge f_1$（因 $\Im$ 是上定向集）. 一般地，由归纳法可推出，对每个$n \in \mathbf{N}$，可选取$f_n \in \Im$，y的一个紧邻域$K_n \supset K_{n+1}$及一点 $x_n \in K_n$，使得$f_n \le f_{n+1}$，在K_n上$f_n < \alpha$ 成立且$f_{n+1}(x_n) > \beta$, $n \in \mathbf{N}$.

由题设

$$g := \lim_n f_n$$

是连续的, 点网$\{x_n\}$有一个聚点$x' \in \cap_n K_n$. 显然 $g(x') \le \alpha$（因$f_n < \alpha$在K_n成立，$n \in \mathbf{N}$）. 另一方面， $g(x_n) \ge f_{n+1}(x_n) > \beta$ 对每个自然数n成立，推出$g(x') \ge \beta$. 矛盾. □

定理 4-4-2 设G为X的开集，$\wp$是$\mathscr{H}(G)$（$\mathscr{H}$表示$\mathscr{U}$所关联的调和簇）中的一个上定向集，若$\wp$在 G 是局部一致上有界的，则$\sup \wp \in \mathscr{H}(G)$.

证明 据 Bauer 收敛性质（§4.1 公理 BC）及上一引理知$h := \sup \wp$ 在G连续. 对任意一个闭包包含于G的相对紧可解集V，因为h连续，故$\mu^V h$在V调和. 因每个$g \in \wp$在G调和，故在V上成立 $\mu^V g = g$. 从而由定理 2-3-4 知，在V上有

$$h = \sup\{g \mid g \in \wp\} = \sup\{\mu^V g \mid g \in \wp\} = \mu^V h.$$

即$h|_V \in \mathscr{H}(V)$. 由$\mathscr{H}$是一个簇及V的选取的任意性知$h \in \mathscr{H}(G)$. □

注 上面这个定理很重要，它是下一章 Perron 集的基础.

定理 4-4-3 若 $(X, \mathcal{U})$ 是调和空间，则 X 是局部连通的.

证明 任取 $x \in X$. 据正性公理（§4.1 的公理 P 或注 2），存在 x 的一个开邻域 G 及 $h \in \mathcal{H}(G)$（$\mathcal{H}$ 表示 $\mathcal{U}$ 关联的调和簇）使使得 $h > 0$ 在 G 上成立. 用 $\mathcal{B}$ 表示 G 的既开又闭（相对于 G 的）且包含 x 的子集全体. 对每个 $V \in \mathcal{B}$，用 h_{V^*} 表示 G 上这样的函数：它在 V 上取零值而在 $G \setminus V$ 上取 h 的值. 因 V 既开又闭，故 $h_{V^*} \in \mathcal{H}(G)$ 且 $\wp := \{ h_{V^*} \mid V \in \mathcal{B} \}$ 是上定向集. 因 $0 \le h_{V^*} \le h$，故 $\wp$ 为局部一致有界簇. 由上一定理知，$u := \sup \wp \in \mathcal{H}(G)$. 从而 u 在 G 连续，因此集

$$W := \{ y \in G \mid u(y) = 0 \} = \{ y \in G \mid u(y) < h(x) \}$$

为 G 的既开又闭子集，从而 $W \in \mathcal{B}$ 而且 W 是 $\mathcal{B}$ 的极小元，因为它不可能有一个既开又闭的、包含 x 的真子集. 这也说明 W 是 x 的一个连通邻域. 由 x 的任意性推出 X 是局部连通的. □

推论 4-4-4 调和空间$(X, \mathcal{U})$具有一个由可解区域构成的拓扑基.

证明 由定理 4-1-3 知，一个可解集的任一连通分支也是可解的. 据公理 R (参看 §4.1), X 有一个由关于 $\mathcal{U}$ 的可解集构成的拓扑基. 又据本定理得，X 的每一点有一个邻域是可解的区域. 因此 X 具有一个由可解区域构成的基. □

定理 4-4-5 对调和空间 $(X, \mathcal{U})$，X 没有孤立点.

证明 设 $x \in X$ 是孤立点，于是据公理 R，单点集 $\{x\}$ 是可解集. 因它必须是 MP 集，故当 $u \in \mathcal{U}(\{x\})$，必有 $u \ge 0$. 这表示 $\mathcal{H}(\{x\}) = \{0\}$（这里 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{U}$ 所关联的调和簇），这与正性公理（§4.1 公理 P）矛盾. □

注 由定理 4-4-5 及定理 4-4-3 我们看到，对于一个 CC 调和空间 $(X, \mathcal{U})$ 来说，由公理本身可推出，X 没有孤立点且是局部连通的. 因此，在定义 Brelot 空间的时，为了便于论证，可把“X 没有孤立点且是局部连通的”这种拓扑要求作为前提条件. □

§ 4.5 超调和函数的性质

本节将讨论 CC 调和空间 $(X, \mathcal{U})$ 中超调和函数的性质，中心是定理 4-5-4，它将为下面章节推广定理 3-7-10 作准备.

定理 4-5-1 设 G 为 X 的开集.

1) 若 $f, g \in \mathcal{U}(G)$, 则 $\inf\{f, g\} \in \mathcal{U}(G)$.

2) 若 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathcal{U}(G)$的一个上定向子集，则 $\sup \mathfrak{I} \in \mathcal{U}(G)$.

证明 (1) 设 V 是一个闭包包含在 G 的相对紧可解集，令 $q := \inf\{f, g\}$. 于是 q 在 G 为下半连续且在 V 上有

$$\mu^V q \le \mu^V f \le f \quad 且 \quad \mu^V q \le \mu^V g \le g,$$

从而$\mu^V q \le \inf\{f, g\} = q$. 由完备性公理（§ 4.1）知 $q \in \mathcal{U}(G)$.

(2) 设$f := \sup \mathfrak{I}$, 那么f在 G为下半连续且对每个$\mathfrak{I}$中的元g有 $\mu^V g \le g \le f$在 V成立，即

$$\mu^V g(x) \le f(x), \qquad x \in V.$$

由上定向集关于上积分的性质（见定理 2-3-4）知，

$$\mu^V f(x) \le f(x), \qquad x \in V.$$

再次利用完备性公理知命题 2)成立. □

定理 4-5-2 设 G, U为 X的开集且 $G \subset U$, $u \in \mathcal{U}(U)$, $g \in \mathcal{U}(G)$. 若函数

$$u^* = \begin{cases} \min\{u, g\}, & in \quad G \\ \quad u \quad, & in \quad U \setminus G \end{cases}$$

在 U 为下半连续，则 $u^* \in \mathcal{U}(U)$.

证明 设V是闭包包含在U的相对紧可解集，且在$\bar{V}$ 的一个邻域上有调和函数 $h > 0$ (据正性公理). 由 § 4.1 注 3，我们只须证明对每个这样的 V 有$\mu^V u^* \le u^*$即可. 进一步，由$\mu^V u^*$的定义

知，只须证明对任何$f\in C(\partial V)$，当 $f\le u^*$在∂V 上成立时必有$\mu^V f\le u^*$ 在 V 成立即可.

取定一个这样的f, 因在 U 上有 $u^*\le u$ ，故在 V 上有$\mu^V f\le u$. 任取 $s\in \underline{\mathcal{U}}_f^V$ 及任意实数$\varepsilon>0$，因对每个 $z\in\partial G\cap V$ 有

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{x\to z,\,x\in G\cap V}\ \{u^*(x)+\varepsilon h(x)-s(x)\}\\
&\ge u(z)+\varepsilon h(z)-\mu^V f(z)\\
&\ge \varepsilon h(z)>0\,.
\end{aligned}
$$

故在 $\partial G\cap V$ 的一个邻域与 $G\cap V$ 的交集上有 $u^*+\varepsilon h-s\ge 0$. 从而，函数

$$
w_\varepsilon=\begin{cases}\min\{u^*+\varepsilon h-s,0\}, & in\ \ G\cap V\\ 0 & ,\ in\ \ V\setminus G\end{cases}
$$

属于$\mathcal{U}(V)$. 进一步，对每个 $z\in\partial V\cap G$ 有

$$
\liminf_{x\to z,\,x\in V} w_\varepsilon(x)\ge u^*(z)-f(z)\ge 0,
$$

所以，对每个 $z\in\partial V$ 有

$$
\liminf_{x\to z,\,x\in V} w_\varepsilon(x)\ge 0.
$$

由于V是MP集，故 $w_\varepsilon(x)\ge 0$．即在 $V\cap G$ 上有 $u^*+\varepsilon h\ge s$．令$\varepsilon\to 0$ 得 $u^*\ge s$. 再对 s 取上确界，就推出在 $V\cap G$ 上有

$$
u^*\ge\mu^V f. \tag{5.1}
$$

而在 $V\setminus G$ 上有 $u^*=u\ge\mu^V f$，即得出在 V 上有(5.1)成立．□

定理 4-5-3 一个MP集的任何开子集也是MP集.

证明 设 V 是MP集，G 是 V 的开子集，设$g\in\mathcal{U}(G)$且存在紧集 K 使得在 $G\setminus K$ 上有 $g\ge 0$，同时，对每个 $z\in\partial G$ 有

$$
\liminf_{x\to z,\,x\in G} g(x)\ge 0.
$$

令

$$
g^*=\begin{cases}\min\{g,0\} & ,\ in\ \ \ G\\ 0 & ,\ in\ \ V\setminus G,\end{cases}
$$

那么 g^* 在 V 下半连续. 据上一定理知, $g^* \in \mathscr{U}(V)$. 由于 V 是 MP 集且显然对每个 $y \in \partial V$ 有

$$\liminf_{x \to y, x \in V} g^* \geq 0 .$$

从而在 V 有 $g^* \geq 0$, 故在 G 上有 $g \geq 0$. 这说明 G 是 MP 集.□

定理 4-5-4 设 W 是开集, G 是相对紧可解集且闭包包含于 W. 又设 $u \in \mathscr{U}(W)$, $g \in \mathscr{U}(G)$ 且在 G 上有 $\mu^G u \leq g$. 作 W 上的一个函数 u^*, 使得 u^* 在 $W \setminus \overline{G}$ 上等于 u; 在 G 上等于 $\inf\{u, g\}$; 而对每个 $x \in \partial G$, 有

$$u^*(x) = \inf\{u(x), \liminf_{y \to x, y \in G} g(x)\}.$$

假如 u^* 在 ∂G 上的每个点不取 $-\infty$ 值, 则 $u^* \in \mathscr{U}(W)$.

证明 由 u^* 的定义知其在 W 为下半连续. 设 V 是一个相对紧可解集且闭包包含于 W, 又设 f 是 ∂V 上的连续函数且 $f \leq u^*$. 我们要证在 V 上有 $\mu^V f \leq u^*$, 从而推出 $\mu^V u^* \leq u^*$, 这样就可由完备性公理及 § 4.1 注 3 推出所要的结论.

注意到 $u^* \leq u$, 从而在 V 上有 $\mu^V f \leq u$, 故 $\mu^V f \leq u^*$ 在 $V \setminus \overline{G}$ 成立. 再设 $s \in \underline{\mathscr{U}}_f^V$, 并依下面方法将 s 延拓到 $\overline{V}$ 上, 即对任意 $z \in \partial V$. 令

$$s(z) := \limsup_{x \to z, x \in V} s(x).$$

于是在 ∂V 上有 $s \leq f \leq u^* \leq u$, 从而在 $\overline{V}$ 上有 $s \leq u$. 因 s 为上半连续函数, u 是下半连续的, 可选取 $q \in C(\partial G)$ 使得在 ∂G 上 $q \leq u$ 而在 $\partial G \cap \overline{V}$ 上 $s \leq q$. 任取 $t \in \overline{\mathscr{U}}_q^G$, 并考虑 $G \cap V$ 上的函数

$$p := g + t - s - \mu^G q.$$

显然 p 在 $G \cap V$ 上是超调和的. 若 $z \in \partial V \cap \overline{G}$, 则

$$\liminf_{y \to z, y \in G \cap V} [g(y) - s(y)] \geq u^*(z) - s(z) \geq f(z) - s(z) \geq 0 .$$

因为 $t \geq \mu^G q$, 故对每个 $z \in \partial V \cap \overline{G}$ 有

$$\liminf_{y \to z, y \in G \cap V} p(y) \geq 0 . \tag{5.2}$$

若 $z \in \partial G \cap V$, 则

$$\liminf_{y \to z, y \in G \cap V} [t(y) - s(y)] \geq q(z) - s(z) \geq 0 .$$

因在∂G上有 $q \leq u$, 故在 G 上有$\mu^G q \leq \mu^G u \leq g$. 从而对 $z \in \partial G \cap V$ 有(5.2)式成立.

因 $G \cap V$ 是一个 MP 集（由上一定理），故在 $G \cap V$ 上有 $p \geq 0$. 现对所有 $t \in \overline{\mathscr{U}}_q^G$ 取下确界函数, 对所有 $s \in \underline{\mathscr{U}}_f^V$ 取上确界函数，得到

$$g + \mu^G q - \mu^V f - \mu^G q \geq 0$$

在 $G \cap V$ 成立，即在 $G \cap V$ 上有 $\mu^V f \leq g$, 从而 $\mu^V f \leq u^*$. 进一步，对任意 $x \in \partial G \cap V$ 有

$$u^*(x) = \min\{u(x), \liminf_{y \to z, y \in G \cap V} g(x)\} \geq (\mu^V f)(x) .$$

综合上述结果知 $\mu^V f \leq u^*$ 在 V 成立.□

例 4-5-5 设 $X = \boldsymbol{R}^1$, 对 X 的任意开集 G, 用$\mathscr{U}(G)$表示 G 上定义的、这样的、下半连续、下有限的数值函数 u 构成的集：u 在 G 的每个连通分支上是单调减的. 则 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一个一个超调和簇且 $(X, \mathscr{U})$ 是一个调和空间, 而且 $\mathscr{U}$ 所关联的调和簇 $\mathscr{H}$ 具有 Brelot 收敛性质（即满足 § 4.2 公理 3）.

证明 对任一开集 G, 显然一个函数 $h \in \mathscr{H}(G)$ 当且仅当 h 在 G 的每个连通分支上取实常数值, 因为它必须在每个连通分支上既单调增又单调减且不取$\pm\infty$值. 由此, 立即推出 $\mathscr{H}$ 具有 Brelot 收敛性质. 而正性公理（§ 4.1）显然满足.

设 $a, b \in \boldsymbol{R}^1, a < b$. 易验证开区间 $D := (a, b)$ 是关于 $\mathscr{U}$ 的可解集且对任意 $x \in D$, $\mu_x^D = \varepsilon_b$ (ε_b表示在 b 点的单位正质量分布），即对任意取有限值的边界函数f, $\mu^D f = f(b)$. X 显然有一

个由相对紧可解集（如有限开区间）构成的拓扑基，即公理 R（§4.1)满足. 因 Brelot 收敛性质蕴涵 Bauer 收敛性性质，故公理 BC 也满足. 易验证公理 C 也满足(留给读者作练习). 从而$(X,\mathscr{U})$是一个 CC 调和空间.

因为 X 的任何相对紧的连通开集都是有限开区间，它显然不是正则集. 因此 §4.2 的公理 2 不能满足，因而这个调和空间不是 Bauer 调和空间，更不是 Brelot 调和空间.

注 4-5-6 由此还可得知，在一个调和空间中，超调和簇并不是由调和簇所唯一确定的，虽然与超调和簇相关的调和簇是唯一确定的. 事实上，§3 的例 3 将上例中所有 u 的“单调减”性质都换成“单调增”，而得到另一个超调和簇 $\mathscr{U}_1$ 及另一个调和空间$(\boldsymbol{R}^1,\mathscr{U}_1)$，但 $\mathscr{U}_1$ 所关联的调和簇与 $\mathscr{U}$ 所关联的调和簇一致.

§4.6 H 扫除与椭圆调和空间

本节是 §4.1 至 §4.4 内容的补充. 限于篇幅，其中有的命题的证明略去，有兴趣的读者可参见 Constantinescu C, Cornea A [10].

以下若未加声明，均设 X 为一个局部紧的 Hausdorff 空间. 调和簇的定义见 §4.1.

1. $\mathscr{H}$ 扫除

定义 设 G 是 X 的开集，那么∂G 上一个测度族 $\omega:=(\omega_x)_{x\in G}$ 称为 G 上的一个扫除. 对∂G 上的任一数值函数 f，用 ωf 表示如下 G 上定义的数值函数:

$$x\mapsto\int^{*}f\mathrm{d}\omega_x.$$

定义 设$\mathscr{H}$是X上的一个调和簇，G是相对紧开集，ω是G上的扫除，若下面两条件成立则称ω是一个$\mathscr{H}$扫除：

a) 对任何$f\in C(\partial G)$, ωf是G上的$\mathscr{H}$函数.

b) 若h是$\overline{G}$的开邻域V上的$\mathscr{H}$函数，则在V上有$\omega h=h$.

测度族 $\Omega:=(\{\omega_{ix}\mid x\in G_i\})_{i\in I}$ 称为一个$\mathscr{H}$扫除系，如果$\{G_i\mid i\in I\}$ 是X的一个拓扑基且每个 G_i 是相对紧开集，并且对每个$i\in I$, $\omega_i:=\{\omega_{ix}\mid x\in G_i\}$ 是G_i上的一个$\mathscr{H}$扫除.

例 1 设 $(X,\mathscr{U})$ 是 CC 调和空间，$\mathscr{U}$所关联的调和簇$\mathscr{H}$是一个调和簇. 当G是一个相对紧可解集时，§4.1 所定义的相对于$\mathscr{U}$的调和测度族 $\mu=\mu^G:=(\mu_x)_{x\in G}$ 就是G上的一个$\mathscr{H}$扫除，考虑任意一个由相对紧可解集构成的基$\mathscr{B}$, 就得到一个$\mathscr{H}$扫除系.

例 2 若 $(X,\mathscr{H})$ 是 Bauer 调和空间或 Brelot 调和空间，$\mathscr{H}$当然是调和簇. 对于一个正则区域D，§4.2 定义的调和测度族

$$\mu=\mu^D:=(\mu_x^D)_{x\in D}$$

是D上的一个$\mathscr{H}$扫除；考虑X的一个由正则区域构成的基，就得到一个$\mathscr{H}$扫除系.

定理 4-6-1 若X上的调和簇$\mathscr{H}$满足 Bauer（或 (2)Doob, 或 (3)Brelot）收敛性质（见§4.3，§4.2），则X的任意开集G上的、任一个由G上的$\mathscr{H}$函数组成的上定向族的上确界函数 s 是一个$\mathscr{H}$函数，如果s在G上是局部上有界的（或相应于(2)，在一个稠密子集上取有限值或相应于(3)，在一点取有限值.）

证明 参照定理 4-4-2，留作练习. □

定理 4-6-2 若X上的调和簇$\mathscr{H}$满足 Bauer 收敛性质，$(\omega_x)_{x\in V}$是一个$\mathscr{H}$扫除，f是∂V上的一个下有界的数值函数，则ωf是下半连续的且对任何$\mathscr{H}$扫除 $(\omega'_x)_{x\in W}$，当 $\overline{W}\subset V$时有$\omega'\omega f=\omega f$在W上成立. 当f有界时，ωf是一个$\mathscr{H}$函数.

特别，在 CC 调和空间有： $\mu^V f$ 下半连续，$\mu^W(\mu^V f)=\mu^V f$；

当 f 有界时，$\omega^V f$ 是一个调和函数.

证明 先假定 f 有界且下半连续. 因$\{\omega g \mid g\in C(\partial V), g\le f\}$是由 V 上的 $\mathscr{H}$ 函数组成的上定向族，其上确界函数就是 ωf, 据上一定理知，ωf 是 $\mathscr{H}$ 函数. 当 f 是一般的有界函数时，ωf 是下定向族

$$\{\ \omega u \mid u\ge f, u\text{ 有界、下半连续 }\}$$

的下确界，由上一段证明知每个 ωu 是 V 上的 $\mathscr{H}$ 函数，故由上一定理知，ωf 为 V 上的 $\mathscr{H}$ 函数.

对一般的下有界函数 f, 因下式对每个 $x\in V$ 成立推出，ωf 为 V 上的下半连续函数：

$$\omega f(x)=\int^{*} f\,\mathrm{d}\omega_x=\lim_n\int^{*}\inf\{f,n\}\,\mathrm{d}\omega_x=\lim_n(\omega\inf\{f,n\})(x).\square$$

定理 4-6-3 设 $\mathscr{H}$ 为 X 上的调和簇且 X 上存在一个 $\mathscr{H}$ 扫除系. 又设 V 为开集，$\{\ h_i \mid i\in I\ \}$为 V 上的 $\mathscr{H}$ 函数组成的一个上定向族，若其上确界函数 h 在 V 连续，则 h 为 V 上的 $\mathscr{H}$ 函数.

证明 设$(\omega_x)_{x\in W}$ 是一个 $\mathscr{H}$ 扫除使得 $\overline{W}\subset V$, 则对任何 x 有（参看 § 2.7 关于 Radon 测度的广义 Riesz 表示定理），

$$h(x)=\sup_{i\in I} h_i(x)=\sup_{i\in I}\int h_i\,\mathrm{d}\omega_x=\int h\,\mathrm{d}\omega_x.$$

故 h 在 V 为 $\mathscr{H}$ 函数. □

2. $\mathscr{H}$ 正则集

定义 开集 V 称为 $\mathscr{H}$ 正则集，若∂V 上的任何连续函数 f 在 $\overline{V}$ 上都有唯一的延拓 f_1 使得它是 V 上的 $\mathscr{H}$ 函数，并且当 f 是正的时 f_1 也是正的.

对于 $\mathscr{H}$ 正则集 V, 及任意取定的 $x\in V$, 从 $C(\partial V)$到 $\boldsymbol{R}$ 的映射：$f\mapsto f_1(x)$ 是一个正线性泛函，从而定义了∂V 上的一个测度 ω_x^V，显然，测度族 $\omega^V:=(\omega_x^V)_{x\in V}$ 是 V 上的一个 $\mathscr{H}$ 扫除.

定理 4-6-4 (Brelot M) 设 $\mathscr{H}$ 是 X 上的调和簇，V 是一个 $\mathscr{H}$ 正则集，W 是 V 的一个开子集且 $\partial W \subset \partial V$. 那么 W 也是 $\mathscr{H}$ 正则集且对任意 $x \in W$ 有 $\omega_x^V = \omega_x^W$.于是当 X 是局部连通空间时，一个正则集的任一连通成分也是正则的. 如果 $\mathscr{H}$ 满足 Brelot 收敛性质（§4.2 公理 3）且 V 是连通的正则集，则对任意 $x \in W$, ω_x^V 的支柱就在 ∂V. □

定理 4-6-5 设 $(X, \mathscr{U})$ 是一个 CC 调和空间，$\mathscr{O}$ 是 X 的一个开覆盖，满足：对任意 $W \in \mathscr{O}$ 及 W 中任意两点 x 与 y，在 W 上都存在一个超调和函数 u 及一个严格正的调和函数 h 使得

$$\frac{u(x)}{h(x)} < \frac{u(y)}{h(y)},$$

则 X 有一个由正则集构成的基. □

定义 设 $\mathscr{H}$ 是局部紧 Hausdorff 空间 X 上的调和簇. 又设 X 是局部连通的. X 上的一个 $\mathscr{H}$ 扫除系 $(\{\omega_{ix} \mid x \in G_i\})_{i \in I}$ 在 X 的一个点 x 称为是椭圆的，如果 x 有一个邻域 U 使得对任何 $i \in I$，若 $x \in G_i \subset \overline{G_i} \subset U$，则 ω_{ix} 的支柱包含了 A 的闭包的边界，这里 A 是 G_i 的那个包含了 x 的连通分支. 若一个扫除系在 X 的每个点 x 都是椭圆的，则称该扫除系是椭圆的 .

一个调和空间 X 称为 椭圆的，若 X 有一个由相对紧可解集构成的基 $\mathscr{B}$ 使得扫除系 $(\{\omega_x^G \mid x \in G\})_{G \in \mathscr{B}}$ 是椭圆的，其中 ω_x^G 是 G 上的调和测度.（参见本节例 1 或例 2）.

定理 4-6-6 每一个 Brelot 调和空间是一个椭圆的 Bauer 调和空间.

注 (Constantinescu C, Cornea A[10]) 非 Brelot 调和空间的、椭圆的 Bauer 调和空间是存在的.

定理 4-6-7 设 X 是一个调和空间，则下面五个命题等价：

a) X 是一个椭圆调和空间；

b) 对 X 的任意一个由相对紧可解集组成的基 $\mathscr{B}$，扫除系 $(\{\omega_x^G \mid x\in G\})_{G\in\mathscr{B}}$ 都是椭圆的；

c) X 的任一取定的连通开集上的任一正的超调和函要么在一个稠密子集上取有限值，要么恒等于 ∞；

d) 存在一个由正则集构成的基而且在任一取定的连通开集上的正调和函数要么恒取严格正值，要么恒等于 0.

例 设 X 是 $\boldsymbol{R}^N$（N 为自然数）的一个开集，a_{ij}, b_i, c $(i,j = 1,2,\cdots, N)$ 是 X 上连续的实函数使得 $a_{ij} = a_{ji}$ 且矩阵 (a_{ij}) 在 X 的每一点是严格正定的. 对 X 的任意开集 V，用 $\mathscr{H}(V)$ 表示 V 上的这样的实连续函数 h 全体：h 局部地属于 B_2^p $(p > N)$（Sobolev 空间）且使得

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^N b_i\frac{\partial h}{\partial x_i}+c\,h=0$$

几乎处处成立. 于是 $(X, \mathscr{H})$ 是一个椭圆的 Bauer 空间. (参看 [10]ex. 4.2.8).

练习 请列出简表说明本章所介绍的各种调和空间之间的包含关系，并列出说明严格包含关系的例子.

3. 拟正则集与拟正则扫除

设 $\omega := (\omega_x)_{x\in V}$ 是 X 的开集 V 上的一个扫除，$\mathfrak{I}$ 是 V 上的收敛于 ∂V 上某一点 y 的一个滤子.

定义 称上述滤子 $\mathfrak{I}$ 关于扫除 ω 是正则的，若 ω 沿着滤子 $\mathfrak{I}$ 浑收敛于 ε_y，或等价地，对任何 $f\in \boldsymbol{K}(\partial V)$ 都有

$$\lim_{x,\mathfrak{I}} \omega f(x) = f(y)\,.$$

上式等价于，对任意实数 $\varepsilon > 0$，存在 y 的邻域 G 及 $\mathfrak{I}$ 的成员 A 使得 $A\subset G$ 且对任意 $x\in A$ 有

$$|\omega_x f - f(y)| < \varepsilon.$$

若 $\mathfrak{I}$ 不是正则的，就称为非正则的. 若 V 上收敛于 $y \in \partial V$ 的每个滤子都是正则的，则称 y 是正则的边界点.

定义 设 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一个超调和簇，X 的相对紧开子集 V 上的扫除 ω 称为（关于 $\mathscr{U}$）拟正则的，如果下面两条件满足：

1）对任何 $f \in C(\partial V)$，函数 ωf 是有界的 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 函数；

2）对每个 $x \in V$，存在 V 上的、正的 $\mathscr{U}$ 函数 u，使得 u 在 x 取有限值且沿着任何关于 ω 非正则的超滤子收敛于 ∞.

X 的相对紧开子集 V 称为（关于 $\mathscr{U}$）拟正则的，如果 V 上存在一个拟正则的扫除.

容易看出，对于 X 的相对紧开集 V，若 V 关于 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 正则，则它是关于 $\mathscr{U}$ 是拟正则的且 ω^V 是 V 上的正则扫除 (即不存在非正则滤子). 反之，若 V 关于 $\mathscr{U}$ 为可解的且 ω^V 不具有非正则的滤子，则 V 相关于 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 正则且 $\omega^V = \mu^V$.

定理 4-6-8 在调和空间$(X, \mathscr{U})$中，若 V 为正则集且为某个 MP 集的子集，则 V 也是 MP 集.

证明 设 ω 是 V 上的拟正则扫除. 据定义，对任一 $x \in X$ 存在这样一个 V 上的正超调和函数 u：u 在 x 取有限值且对每个 $z \in \partial V$ 有

$$\lim_{y \to z}(u(y) + \omega 1(y)) \geq 1.$$

因此 $\{y \in V \mid u(y) + \omega 1(y) \leq 2^{-1}\}$ 是 V 的紧子集. 据定理 4-1-1，V 是 MP 集. □

定理 4-6-9 在调和空间 $(X, \mathscr{U})$ 中，任何拟正则 MP 集 V 是可解的，而且调和测度族是 V 上唯一的正则扫除. 进一步，若 g 是 ∂V 上的一个下有界、下半连续的实函数使得 $\underline{H}_g^V$ 调和，则 g 是可解的.

证明 设 ω 是 V 上的拟正则扫除，那么，对任意 $x \in V$ 存

在 V 上的正超调和函数 u_x: 它在 x 上取有限值且沿着每个非正则超滤子集收敛于 ∞.

对任意 $f\in C(\partial V)$及实数 $\varepsilon>0$ 有

$$\omega f+\varepsilon u_x\in\overline{\mathscr{U}}_f^V,\quad \omega f-\varepsilon u_x\in\underline{\mathscr{U}}_f^V;$$

$$\omega f(x)-\varepsilon u_x(x)\le\underline{H}_f^V(x)+\ \overline{H}_f^V(x)\le\omega f(x)+\varepsilon u_x(x).$$

由 ε 与 x 的任意性推出

$$\omega f\le\underline{H}_f^V\le\overline{H}_f^V\le\omega f.$$

可见 V 是可解的且 $\omega_x=\mu_x^V$,$x\in V$.

设 g 如定理条件所述. 据定理 4-1-2, 对任意 $x\in V$ 有

$$\underline{H}_g^V(x)=\int^* g\,\mathrm{d}\mu^V.$$

故对任意 $x\in V$ 及任意 $\varepsilon>0$ 有 $\underline{H}_g^V+\varepsilon u_x\in\overline{\mathscr{U}}_g^V$. 从而

$$\overline{H}_g^V(x)\le\ \underline{H}_g^V(x)+\varepsilon u_x(x).$$

于是 $\overline{H}_g^V(x)=\underline{H}_g^V(x)$. 由题设, 它是调和的, 故 g 可解.□

注 由于上面两个定理, 在调和空间中仅考虑关于可解集相对于超调和簇 $\mathscr{U}$ 的拟正则扫除; 关于滤子的正则性, 仅考虑相对于 $\mathscr{U}$-调和测度 $\mu^V:=(\mu_x^V)_{x\in V}$ 的正则性.

4. 三类超调和函数

下面介绍由扫除定义与生成的三类超调和函数及它的之间的关系.

定义 设 $\Omega:=(\{\omega_{ix}\mid x\in V_i\})_{i\in I}$ 是 X 上的一个扫除系, $\omega_i:=(\omega_{ix})$. 设 G 是 X 的开集, g 是 G 上的一个下半连续、下有限的数值函数.

如果对每个 $i\in I$, 当$\overline{V}_i\subset G$ 时必有 $\omega_i g\le g$ 在每个 V_i成立, 则称 g 是一个 Ω 超调和函数; 如果对每个 $x\in X$及 x 的每

个邻域 U，都存在 $i\in I$，使得 $\overline{V}_i\subset G\cap U$ 且 $\omega_i g(x)\le g(x)$，则称 g 是一个 **Ω^* 超调和函数**. 如果 U 存在一个开覆盖族 $\boldsymbol{M}$ 使得对每个 $D\in\boldsymbol{M}$, $g|_D$ 都是 D 上的一个 Ω 超调和和函数，就称 g 是一个**局部的 Ω 超调和函数**.

如果对 X 的每个开集 G, 用 $\mathscr{V}(G)$ 表示 G 上的局部的 Ω 超调和函数全体，则 $\mathscr{V}$ 是 X 上的一个超调和簇，称之为**由 Ω 生成的超调和簇**.

显然，每个 Ω 超调和函数必为局部的 Ω 超调和函数，每个局部的 Ω 超调和函数必为 Ω^* 超调和函数. G 上的 Ω 超调和函数和函数与局部的 Ω 超调和函数分别构成凸锥.

定理 4-6-10 (Brelot-Bauer) 设 G 是 X 的开集使得对任意 $x\in G$ 及 X 的任意紧子集 K, 在 G 上存在一个局部的 Ω 超调和函数 g，使得 $g(x)$ 是有限的且 g 在 $K\cap G$ 的下确界是严格正的；若下面的两个条件之一满足:

a) G 上的 Ω 超调和函数全体能分辨 V 中的点;

b) G 是局部连通的，它的每个连通分支非紧且 Ω 在 G 的每一点都是椭圆的;

那么，G 上任何 Ω^* 超调和函数 u 满足极小值原理，即 u 若在 G 与 X 的某个紧集之交的余集上是正的且 u 在 G 的每个边界点的下极限是正的，则 u 是正的. 因此，若 $\mathscr{U}$ 是超调和函数簇且使得每个 $\mathscr{U}$ 函数都是 Ω 超调和函数，则 G 关于 $\mathscr{U}$ 是一个 MP 集.

注 在调和空间 $(X,\mathscr{U})$ 中，$\mathscr{U}$ 函数就是超调和函数.

第五章　上调和函数与位势

本章取定一个调和空间 $(X, \mathcal{U})$ 并设 $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$；谈及开集、紧集或其它未另作说明的集时，指的都是 X 的子集．如前约定，一个函数在某处(集或点)连续时，指的是实连续（又称有限连续）．

§5.1　上调和函数

定义　设 G 为开集，如果函数 $f \in \mathcal{U}(G)$ 且对任何一个其闭包含在 G 的相对紧可解集 V 有 $\mu^V f \in \mathcal{H}(V)$，则称 f 是 G 上的上调和函数 (在 G 为上调和的)．若 $-f$ 在 G 为上调和的，则称 f 在 G 为下调和的（是 G 上的下调和函数）．

G 上的上调和函数全体记作 $\mathcal{S}(G)$，于是，$-\mathcal{S}(G)$表示 G 上的下调和函数全体；当 $G = X$ 时，$\mathcal{S}(X)$ 简记为 $\mathcal{S}$．容易验证，$\mathcal{S}(G)$ 是一个凸锥．若 $f, g \in \mathcal{S}(G)$，则 $\inf\{f, g\} \in \mathcal{S}(G)$．

定理 5-1-1　设 $f \in \mathcal{S}(G)$，则集 $\{x \in G \mid u(x) \neq \infty\}$在 G 中稠密．

证明　用反证法．设 $f \in \mathcal{S}(G)$，但存在非空开集 $U \subset G$ 使得对 U 中任意的点 x 有 $f(x) = \infty$．由 § 4.1 正性公理及附注 2，可选一个相对紧的可解集 V 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ 且存在 $h \in \mathcal{H}(G)$使得 h 在 $\overline{V}$ 上为严格正的．于是对任意自然数 n 有，$f \geq n\,h$ 在 $\overline{V}$ 成立，因此 $\mu^V f \geq n\ h$ 在 $\overline{V}$ 成立．由此推出 $\mu^V f$ 在 V 上恒取 ∞ 的值．这说明 $\mu^V f$ 不属于 $\mathcal{H}(G)$，与 f 在 G 为上调和的假设矛盾.□

定理 5-1-2

1) 局部有界的超调和函数为上调函数；特别

$$\mathcal{U}(G)\cap C(G)\subset\mathcal{S}(G).$$

2) 若$f\in\mathcal{U}(G), g\in\mathcal{S}(G)$ 且$f\leq g$，则$f\in\mathcal{S}(G)$.

证明 设$f\in\mathcal{U}(G)$且局部有界. 对任一其闭包包含于G的相对紧可解集V，由有限覆盖定理知存在常数$M>0$，使得$|f|\leq M$在$\overline{V}$上成立，因上定向族 $\mathcal{F}:=\{\mu^V w\mid w\in C(\partial V)$且$w\leq f\}$ 在V为一致有界，由定理 4-4-2 知，$\mu^V f=\sup\mathcal{F}$在V调和. 这就证明了命题 1.

再设命题 2 的条件成立，考虑任一其闭包包含于G的相对紧可解集V及 $w\in C(\partial V)$ 使得在∂V上有$w\leq f$成立，因为

$$\mu^V w\leq\mu^V g\in\mathcal{H}(V).$$

可见上段定义的$\mathcal{F}$仍然局部一致上有界. 利用定理 4-4-2 仍可推出 $\mu^V f\in\mathcal{H}(V)$，故$f\in\mathcal{S}(G)$.□

注 5-1-3 若$(X,\mathcal{H})$是 Brelot 调和空间，则由引理 4-2-3、引理 4-4-1 及上述证明过程知，$f\in\mathcal{U}(G)$ 在G为上调和的当且仅当f在G的每个连通分支上不恒等于 ∞.

定理 5-1-4 设G为开集，V为相对紧的可解集且其闭包包含在G，$g\in\mathcal{U}(G)$，作G上的函数g_V如下：

$$g_V(x)=\begin{cases}g(x), & \text{当 } x\in G\setminus\overline{V}\\ \mu^V g(x), & \text{当 } x\in V\\ \min\{g(x),\ \liminf\limits_{y\to x,y\in V}\mu^V g(y)\}, & \text{当 } x\in\partial V\end{cases}$$

那么$g_V\leq g$且对任何$f\in-\mathcal{U}(G)$，若$f\leq g$，则$f\leq g_V$. 又，若g在G有下调和下属（即存在$w\in-\mathcal{S}(G)$，使得$w\leq g$），则$g_V\in\mathcal{U}(G)$. 因此，若$g\in\mathcal{S}(G)$ 且g有一个下调和下属，则$g_V\in\mathcal{S}(G)$.

证明 因在V上有 $\mu^V g\leq g$，由g_V的定义知 $\mu^V g\leq g$. 假设$f\in-\mathcal{U}(G)$ 且 $f\leq g$ 在G成立. 于是$f\leq\mu^V g$ 在V成立，由g_V的定义知在G上有$f\leq g_V$.

下面设 w 为 g 在 G 的一个下调和下属. 取定一个 $z \in \partial V$. 我们要证 $g_{\mathrm{v}}(z) > -\infty$, 从而可由定理 4-5-4 推出 $g_{\mathrm{v}} \in \mathcal{U}(G)$.

因为 w 上半连续, 不取 ∞ 值, 故局部上有界. 可选一个包含 z 的 MP 集 D 使得存在 $h \in \mathcal{H}(D)$ 满足 $w \le h$ 在 D 上成立. 取一个闭包包含在 D 的相对紧可解集 U 使得 $z \in U$. 定义函数 w_U 如下:

$$w_U(x) = \begin{cases} w(x), & x \in G \setminus \overline{U}, \\ \mu^U w(x), & x \in U, \\ \max\{w(x),\ \limsup\limits_{y \to x, y \in U} \mu^U w(y)\}, & x \in \partial U. \end{cases}$$

因在 U 上 $\mu^U w \le h$, 故在 D 上 $w_U \le h$, 从而对任意 $x \in \partial U$ 有, $w_U(x) < \infty$. 于是由定理 4-5-5 知, $w_U \in -\mathcal{U}(G)$. 利用本定理前面已证的结论, 由 $w \le g$ 推出 $w_U \le g_{\mathrm{v}}$. 因为 $w \in -\mathcal{S}(U)$, 故在 U 上 $w_U > -\infty$, 从而证得 $g_{\mathrm{v}}(z) > -\infty$. □

注 5-1-5 本定理是下面 Perron 法的基础. 下面定义的 Perron 集实际上就是第三章 § 3.7 饱和族概念的推广. 因此, 也称 g_{v} 为 g 在 V 的截断函数. 通常 g 在开集 G、U 的截断函数分别记作 g_G 与 g_U, 这里用 g_{v} 代替 g_V 只是为了使下标明显化而已.

定义 设 G 为开集. $\mathcal{U}(G)$的一个非空子族 $\mathcal{W}$ 若满足下面两条件, 则称为 G 上的 **Perron 集**:

1) $\mathcal{W}$ 是下定向族且有一个下调和下属;

2) G 中每个点 x 有一个其闭包包含在 G 的相对紧的、可解开邻域 V, 使得对任意 $g \in \mathcal{W}$ 有 $g_{\mathrm{v}} \in \mathcal{W}$ 且有某个 $g_0 \in \mathcal{W}$ 使得 $\mu^V g_0 \in \mathcal{H}(V)$.

定理 5-1-6 (Perron 定理) 设 $\mathcal{W}$ 是 G 上的一个 Perron 集, 则

$$\inf \mathcal{W} \in \mathcal{H}(G).$$

证明 假定 V 如上面定义中条件 b 所述, 显然

$$\mathcal{W}_{\mathrm{v}} := \{ g_{\mathrm{v}} \mid g \in \mathcal{W} \} \qquad (g_{\mathrm{v}} \text{ 的定义见定理 5-1-4})$$

也是一个下定向族且 $\inf \mathcal{W}_{\mathrm{v}} = \inf \mathcal{W}$. 若 $g \in \mathcal{W}$ 且 $g \le g_0$, 则 $g_{\mathrm{v}} \le \mu^V g_0$ 且 $g_{\mathrm{v}} \in \mathcal{H}(V)$, 从而 $\mathcal{W}_{\mathrm{v}1} := \{ g_{\mathrm{v}} \mid g \in \mathcal{W} \text{ 且 } g_{\mathrm{v}} \le \mu^V g_0 \} \subset \mathcal{H}(V)$ 是一个

非空下定向族且由于有一个下调和下属，所以局部一致下有界，由定理 4-4-2 知

$$\inf \mathscr{W} = \inf \mathscr{W}_{v1} \in \mathscr{H}(V).$$

因上述 V 全体覆盖了 G，故 $\inf \mathscr{W} \in \mathscr{H}(G)$. □

定义 设 g 在 X 为上调和且具有一个调和下属，$\boldsymbol{M}$ 是由一些相对紧可解集构成的、X 的开覆盖族. 对 $\boldsymbol{M}$ 的任一有限序列 $\{v_1,\cdots,v_n\}$，对应着一个上调和函数 $g_{v_1 v_2 \cdots v_n}$：当 $n=1$ 时，g_{v_1} 的定义见定理 5-1-4；当 $n \ge 2$ 时，令

$$g_{v_1 v_2} := (g_{v_1})_{v_2}, \cdots, g_{v_1 v_2 \cdots v_n} := (g_{v_1 v_2 \cdots v_{n-1}})_{v_n}.$$

把关于 $\boldsymbol{M}$ 的任意有限序列所对应的这种函数全体记作 $\mathscr{V}$. 易验证，$\mathscr{V}$ 是一个 Perron 集，称为由 g 关于 $\boldsymbol{M}$ **生成的 Perron 集**.

§5.2 位　势

1925 年，Riesz M 在经典位势论中引进了上调和函数的概念并给出了著名的分解定理. 从此之后，人们把上调和函数与位势一道研究. 前面已看到在调和空间中是先引进比上调和函数更一般的超调和函数，然后介绍调和函数与上调和函数. 而后，本节才把位势作为上调和函数的一种特殊情况来研究. 但这里的位势排除了 $\boldsymbol{R}^2$ 中对数位势的情形. 因为对数位势可能取负值，不易与 Newton 位势及 Green 位势作统一处理. 因此，调和空间的位势应看作是 $\boldsymbol{R}^N$ 中 Green 位势的推广.

定义 设 G 为调和空间 X 的开集，若 $p \in \mathscr{S}(G)$ 且满足下两条件，则称之为 G 上的位势.

1) $p \ge 0$　在 G;

2) 若 $h \in \mathscr{H}(G)$ 且 $h \le p$，则 $h \le 0$ 在 G 成立.

G 上的位势全体记作 $\mathscr{P}(G)$. 显然，若 $g \in \mathscr{U}_+(G)$ 且存在 $p \in$

$\mathcal{P}(G)$ 使得 $g \le p$, 则 $g \in \mathcal{P}(G)$. 若 $p, g \in \mathcal{P}(G)$, 则 $\inf\{p, g\} \in \mathcal{P}(G)$.

定理 5-2-1 (**Riesz** 分解定理) 设 $g \in \mathcal{S}(G)$ 在 G 有一个下调和下属, 则 g 有下面唯一的分解式:

$$u = h + p,$$

其中 $p \in \mathcal{P}(G)$; $h \in \mathcal{H}(G)$ 且为 g 的最大的下调和下属, 即对任何 $f \in -\mathcal{U}(G)$, 当 $f \le g$ 时必有 $f \le h$.

同时, h 也是 u 的最大调和下属.

证明 设 M 为 G 的一个开覆盖族, 其成员都是闭包包含于 G 的相对紧开集. 设 $\mathcal{V}$ 为由 g 关于 M 生成的 Perron 集. 由定理 5-1-6 知 $h := \inf \mathcal{V} \in \mathcal{H}(G)$. 显然 $h \le g$. 由定理 5-1-4, 对任意 $f \in -\mathcal{U}(G)$, 当 $f \le g$ 时有,

$$f \le g_{v_1 v_2 \cdots v_n}.$$

从而 $f \le h$. 故 h 为 g 的最大下调和下属.

令 $p := g - h$, 则 $p \in \mathcal{S}(G)$且 $p \ge 0$. $\forall\, w \in \mathcal{H}(G)$, 若 $w \le p$, 则 $h + w \le h + p = g$. 因 $h + w \in \mathcal{H}(G)$, 推出 $h + w \le h$, 从而 $w \le 0$, 因此由位势定义的条件知 $p \in \mathcal{P}(G)$.

若 g 还有另一种分解, 即存在 $h' \in \mathcal{H}(G), p' \in \mathcal{P}(G)$使得

$$g = p' + h'.$$

因 $p' \ge 0, p \ge 0$, 故得 $h' - h \le p$ 且 $h - h' \le p'$, 推出 $h' - h \le 0$ 且 $h - h' \le 0$, 故 $h = h'$, 从而 $p = p'$. 这证明分解是唯一的. □

推论 5-2-2 若 $p \in \mathcal{P}(G), f \in -\mathcal{U}(G)$且 $f \le p$, 则 $f \le 0$, 即位势的最大下调和下属是 0. □

推论 5-2-3 $\mathcal{P}(G)$是一个凸锥.

证明 设 $p, q \in \mathcal{P}(G)$, $\delta \ge 0$ 为实数. 显然 $\delta p \in \mathcal{P}(G)$. 因 $p + q \ge 0$, 假定 $h \in \mathcal{H}(G)$ 且 $h \le p + q$, 则 $h - p \le q$ 且 $h - p \in -\mathcal{S}(G)$, 由上一推论知 $h - p \le 0$, 即 $h \le p$, 于是 $h \le 0$. 这说明 $p + q \in \mathcal{P}(G)$. □

定理 5-2-4 设 $p_i \in \mathcal{P}(G), \forall\, i \in \mathbf{N}$, 且 $p := \sum_{i=1}^{\infty} p_i \in \mathcal{S}(G)$, 则

$p \in \mathcal{P}(G)$.

证明 设 $h \in \mathcal{H}(G)$ 且 $h \le p$. 对任意正整数 k 有

$$r_k := \sum_{i=k+1}^{\infty} p_i \in \mathcal{S}(G) \text{ 且 } u_k := \sum_{i=1}^{k} p_i \in \mathcal{P}(G).$$

因下调和函数 $h - r_k \le u_k$，由位势的性质（推论 5-2-2）推出 $h - r_k \le 0$, 故 $h \le r_k$.由假定，p 是上调和的. 它在 G 的一个稠密子集 A 上取有限值(定理 5-1-1)，从而当 k 趋于无穷时, r_k 在 A 上趋于 0, 故在 A 上 $h \le 0$. 但 h 在 G 连续, 故 $h \le 0$. 从而 $p \in \mathcal{P}(G)$. □

定理 5-2-5 设 $p \in \mathcal{P}(G)$ 且假定 存在一个紧集 K 使得 p 在 $G \setminus K$ 调和. 设 $g \in \mathcal{U}(G)$且在 G 上 $g \ge 0$，并对每个 $y \in \partial K$ 成立着

$$\liminf_{x \to y, x \in G \setminus K} [g(x) - p(x)] \ge 0,$$

则在 $G \setminus K$ 上有 $g \ge p$.

证明 考虑函数 w：

$$w = \begin{cases} 0, & \text{在}K\text{上}, \\ \min\{0, g - p\}, & \text{在}G \setminus K\text{上}. \end{cases}$$

由定理的假定推出, w 在 G 下半连续. 故由定理 4-5-2 知, $w \in \mathcal{U}(G)$. 显然 $w \ge -p$. 再由推论 5-2-2 知, 在 G 上有 $w \ge 0$, 即在 $G \setminus K$ 上有 $u \ge p$.□

§5.3 缩减函数

以下若未另加声明，用 $u \in \mathcal{U}$ 简记 $u \in \mathcal{U}(X)$, 即 u 是 X 上的超调和函数. 设 f 是 X 上的一个数值函数, 作 X 上的函数 Rf 如下：

$$Rf(x) := \inf\{ u(x) \mid u \in \mathcal{U}, u \ge f\}, \quad x \in X.$$

并称 Rf 为 f 的缩减函数.

容易验证缩减函数具有如下性质:

a) 单调性: 若 $f \le g$, 则 $Rf \le Rg$;

b) 下半可加性: $R(f+g) \le Rf + Rg$;

c) 正齐性: 对任意正实数α有 $R(\alpha f) = \alpha Rf$.

引理 5-3-1 设 V 是相对紧可解集, f 是 ∂V 上的下有界的数值函数, 则 $\mu^V f$ 在 V 为下半连续. 若 f 还是有界的, 则 $\mu^V f \in \mathscr{H}(V)$.

证明 由定理 4-6-2 直接推出. □

定理 5-3-2

i) 设 f 为 X 上任意下半连续、下有限的数值函数, 则 $Rf \in \mathscr{U}$.

ii) 在i) 的条件下, 若存在 f 的上调和上属 (即存在 $u \in \mathcal{S}(X)$ 使得 $f \le u$), 则 $Rf \in \mathcal{S}(X)$, 而且在 f 的连续点处 Rf 也连续; 又, 若 f 在某个开集 U 为下调和或者连续且严格小于 Rf, 则 Rf 在 U 调和.

证明 i) 作 X 上的函数 g:

$$g(x) = \liminf_{y \to x} Rf(y), \qquad x \in X.$$

那么, g 在 X 为下半连续、下有限且 $g \le Rf$. 设 V 是一个相对紧的可解集. 对任意 $u \in \mathscr{U}$, 当 $u \ge f$ 时必有 $u \ge g$, 所以在 V 上有 $\mu^V g \le \mu^V u \le u$, 从而在 V 上有

$$\mu^V g \le Rf.$$

因为 $\mu^V g$ 下半连续, 故$\mu^V g \le g$. 由 V 的任意性及公理 BC 知 g 是超调和的. 另一方面, 由 $Rf \ge f$ 及 f 的下半连续性知 $g \ge f$, 从而 $Rf \le g$, 推出 $Rf = g \in \mathscr{U}$.

ii) 设 f 在 X 有一个上调和上属 s, 于是 $Rf \le s$, 由定理 5-1-2 知, $Rf \in \mathcal{S}(X)$.

设 f 在 x 连续. 选取 x 的一个开邻域 U 使得存在 $h \in \mathscr{H}(U)$ 满足 $h(x) = 1$ (正性公理). 任取 $\varepsilon > 0$, 选一个其闭包包含于 U 的相对紧可解集 G, 使得 $x \in G$ 且在 $\overline{G}$ 上有:

$$f \le (f(x) + \varepsilon)h \quad 及 \quad Rf \ge (f(x) - \varepsilon)h.$$

于是$\mu^G(Rf) \ge (f(x) - \varepsilon)h$ 在 G 成立. 结果 Rf 在 G 的截断函数

$$(Rf)_G \ge (f(x) - \varepsilon)h$$

在 $\overline{G}$ 成立. 从而在 $\overline{G}$ 有

$$f \leq (f(x)+\varepsilon)\, h \leq (Rf)_G + 2\varepsilon h .$$

作 G 上的函数

$$u^*(y) = \begin{cases} Rf(y) \quad , & y \in X\setminus\overline{G}, \\ \min\{\, Rf(y), (Rf)_G(y)+2\varepsilon h(y)\} & y \in G, \\ \min\{\, Rf(y),\ \liminf\limits_{x\to y, x\in G} [\mu^G(Rf)(x) + 2\varepsilon h(x)], & y \in \partial G. \end{cases}$$

那么 $f \leq u^*$. 故由定理 4-5-5 知 $u^* \in \mathscr{U}$, 从而 $u^* \geq Rf$, 即在 G 上有

$$(Rf)_G + 2\varepsilon h \geq Rf.$$

因 Rf 是上调和的, 故$(Rf)_G(x) < \infty$; 由上式推出 $Rf(x) < \infty$. 进一步, 因$(Rf)_G$在 x 连续, 故

$$\limsup_{y\to x}\ Rf(y) \leq (Rf)_G(x) + 2\varepsilon \leq Rf(x) + \varepsilon .$$

由于 ε 是任意的且 Rf 下半连续, 上式表明 Rf 在 x 连续.

接下来, 设 f 在开集 U 为下调和. 对任意 $x \in U$, 取相对紧的可解集 V 使得 $x \in V$, $\overline{V} \subset U$. 因为 $f \leq Rf$, 由定理 5-1-4 知 $f \leq (Rf)_V$ 在 U 上成立, 从而 $Rf = (Rf)_V$ 在 V 成立, 可见 Rf 在 V 调和; 因 x 是 U 中任意的点, 故 Rf 在 U 调和.

最后, 设在开集 U 上 f 连续且 $f < Rf$. 对 U 的任一点 x, 取它的一个开邻域 G 使得存在 $h \in \mathscr{H}(G)$ 满足 $h(x) = 1$. 因 f 在 U 连续, Rf 下半连续, 故可找一相对紧可解集 V 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset G \cap U$, 且在 $\overline{V}$ 上成立 $f < ah < Rf$, 其中 a 是某个正实数. 于是 $f \leq (Rf)_V$. 与上一段同样道理可推出 $Rf = (Rf)_V$, 从而 Rf 在 V 调和, 进而在 U 调和. □

§5.4 S 调和空间与 P 调和空间

定义 一个调和空间 X 称为是 **S** 调和 (或相应地, **P** 调和) 空

间，若对 X 的每一点 x，存在 X 上的正的上调和函数(相应地，位势)，它在 x 点取严格正值. 调和空间 X 的一个开集称为 **S** 集 (相应地，**P** 集)，如果它作为一个子空间是 **S** 调和空间 (相应地，**P** 调和空间).

例 $\boldsymbol{R}^N$ $(N\geq 2)$关于经典的超调和函数簇 $\mathcal{U}_N$ 构成一个调和空间 $X=(\boldsymbol{R}^N, \mathcal{U}_N)$. 当 $N=2$ 时，X 为 **S** 调和空间但非 **P** 调和空间；当 $N\geq 3$ 时，X 为 **P** 调和空间.

显然，每个 **P** 调和空间必为 **S** 调和空间且 **S** 调和空间的任一开集是 **S** 集. 若 K 是 **S** 调和空间 X 的一个紧集，利用有限覆盖性质及上调和函数的下半连续性可推出，X 上存在一个正的上调和函数 g，使得 g 在 K 的一个开邻域上取严格正值，从而 $\inf_K g>0$；若 X 还是 **P** 调和空间，则上述 g 可改为位势.

定理 5-4-1 设 f 为 **S** 调和空间 X 上的、具紧支柱的、正的连续函数，则 Rf 是 X 上的一个正的上调和函数，它在 X 连续且在 f 的支柱外调和. 若将 **S** 调和空间的假设改为 **P** 调和空间，则 Rf 是具有相同性质的位势.

证明 由定理前的说明知，X 上必存在一个正的上调和函数 s (或位势 p) 使得 $f\leq s$ (或者 $f\leq p$)，再由定理 5-3-2 推出结论. □

推论 5-4-2 设 X 为 **S** 调和空间，u 为 X 上的正的超调和函数. 用 $\mathcal{V}$ 表示由所有在 X 连续且在一个紧集的余集上为调和，并在 X 上满足 $s\leq u$ 的、正的上调和函数 s 所组成的族，则 $\mathcal{V}$ 是一个上定向集且以 u 为上确界函数. 若 X 具有可数基，则 $\mathcal{V}$ 中有单调增的函数列收敛于 u.

若 X 为 **P** 调和空间，可把上述 "上调和函数" 改为 "位势"，仍有同样结论.

证明 设 $v, w\in\mathcal{V}$，则 $f:=\sup\{v, w\}\leq u$, f 连续且在一个紧集外为下调和. 因 $f\leq v+w\in\mathcal{S}$，故由定理 5-3-2 知，$Rf\in\mathcal{V}$. 又因为

$Rf \geq v$ 且 $Rf \geq w$，故 $\mathcal{V}$ 是上定向集.

因 u 下半连续，故存在一族 $\{f_i \mid i \in I\} \subset \mathbf{K}^+(X)$ 使得

$$u = \sup\{f_i \mid i \in I\}.$$

由定理 5-4-1 知，每个 $Rf_i \in \mathcal{V}$，从而

$$u = \sup\{f_i \mid i \in I\} \leq \sup\{Rf_i \mid i \in I\} \leq \sup\{w \mid w \in \mathcal{V}\} \leq u,$$

这就说明 u 是 $\mathcal{V}$ 的上确界函数. 当 X 具有可数基时，据定理 1-4-6 知，我们可以选择上述 $\{f_i \mid i \in I\}$ 为一个单调增加列使之收敛于 u. 于是，$\{Rf_i \mid i \in I\}$ 便是 $\mathcal{V}$ 中一个单调增加列且收敛于 u.□

注 5-4-3 (1) 推论 5-4-2 非常重要，使用频率很高. 因为它把一般的正超调和函数的问题转化为特殊的上调和函数或位势来处理.

(2) 在经典位势论中，也有类似的转化：对 $\mathbf{R}^N$ 上的任何开集 G 上的任何上调和函数 u 及任一其闭包包含在 G 的相对紧开集 V，在 V 上有单调增加的上调和函数列 $\{u_i\}$ 收敛于 u 且每个 u_i 在 V 具有二阶连续的偏导数（参看 § 8.1).

定理 5-4-4 设 X 是调和空间，则下面四个命题等价:

1) X 是 $\mathbf{P}$ 调和空间;

2) $\mathcal{P}_c := \{p \mid p$ 为 X 上连续位势且在 X 的某个紧集之外调和$\}$ 能分辨 X 的点（函数族分辨点的定义见 § 4.1）;

3) X 上正的上调和函数全体 $\mathcal{S}^+$ 能分辨 X 的点;

4) 对任何相对紧的可解集 V 及任意 $x \in V$，在 X 上存在连续的正上调和函数 s 使得 $\mu_x^V s(x) < s(x)$.

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 设 $x, y \in X, x \neq y$, p 是 X 上的一个位势，它在 x, y 的值是严格正的. 由上一推论，不妨假定 p 在 x, y 取有限值. 用 $\mathcal{B}$ 表示那些其闭包不包含两点集 $\{x, y\}$ 的相对紧可解集全体. 显然 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个开覆盖. 由 Riesz 分解定理（定理 5-2-1）知，由 p 关于 $\mathcal{B}$ 生成的 Perron 集的下确界恒等于 0. 故 $\mathcal{B}$ 中存在有限个 $V_i, i = 1,2,\cdots,n$，使得

$$p_{v_1\cdots v_n}(x) < p_{v_1\cdots v_{n-1}}(x) \text{ 且 } p_{v_1\cdots v_{n-1}}(y) = p(y);$$

或 $p_{v_1\cdots v_n}(y) < p_{v_1\cdots v_{n-1}}(y)$ 且

$$p_{v_1\cdots v_{n-1}}(x) = p(x).$$

在第一种情形中，$\overline{V_n}$ 包含了 x 但不包含 y，从而

$$p_{v_1\cdots v_{n-1}}(y) = p_{v_1\cdots v_n}(y);$$

在第二种情形中，类似可推出

$$p_{v_1\cdots v_{n-1}}(x) = p_{v_1\cdots v_n}(x).$$

因此总有

$$p(x)\, p_{v_1\cdots v_n}(y) \neq p(y)\, p_{v_1\cdots v_n}(x).$$

再次利用上推论可推出命题 2)成立.

2) ⇒3) 显然.

3) ⇒4) 首先由于 $\mathcal{S}^+$具有分辨性，推出 X 是一个 **S** 调和空间. 若 μ_x^V 的支柱是空集，则任何一个在 x 取严格正值的上调和函数可满足要求. 现设 $y \in \mathrm{supp}(\mu_x^V)$，$f, g$ 是两个正的上调和函数使得

$$f(x)\,g(y) < f(y)\,g(x).$$

于是 $f(y) > 0$ 且 $g(x) > 0$. 不妨设 $f(x) > 0$，否则可用 $f_1 := f + g$ 代替 f，得到

$$f_1(x)\,g(y) < f_1(y)\,g(x) \text{ 且 } f_1(x) > 0.$$

由推论 5-4-2，可假定 g 是连续的，f 只要乘上一个适当的实数就可得到一个同样性的函数且与 g 在 x 的值相等. 不妨仍记这个函数为 f. 由上式推出 $g(y) < f(y)$. 注意到 y 在 μ_x^V 的支柱上，推出

$$\mu^V(\inf\{f, g\})(x) < \mu^V f(x) \le f(x) = \inf\{f, g\}(x).$$

4)⇒1) 由 Risez 分解定理，知对 X 上的正上调和函数 s 有，$s = h + p$，其中 p 为位势，$h \ge 0$ 为 s 的最大调和下属. 对于满足命题 4 条件的 s 有，$s(x) > \mu^V s(x) \ge h(x)$，因此 $p(x) > 0$. 从而推出 X 是 **P** 调和空间.□

推论 5-4-5 **S** 调和空间的每个 **P** 集都是 MP 集.□

定理 5-4-6 **P** 调和空间 X 的任何非空开集是一个 **P** 集；从而也是 MP 集.

证明 设 G 为 X 的非空开集. 对 G 中任意 x，取 x 的一个相对紧开邻域 V 使得 V 是可解集且其闭包包含于 G. 因 X 是 **P** 调和空间，据定理 5-4-4 知，对任意 $x \in G$，存在 X 上的正上调和函数 s 使得 $\mu^G s(x) < s(x)$. 那么，$s|_G$ 是 G 上的正上调和函数. 在子调和空间 $(G, \mathcal{U}|_G)$ 上应用定理 5-4-4 之 4)⇒1)，可证得 G 为 **P** 集.□

定理 5-4-7 设 G 为 MP 集，V 为非空的相对紧开集且其闭包包含于 G. 若存在一个在 V 调和且在 V 的闭包连续的函数 h 使得 h 在 V 上为严格正的，则 V 是一个 **P** 集.

证明 假定定理条件成立但 V 不是 **P** 集. 那么存在 $y \in V$ 使得 V 上的每个位势在 y 取值为 0. 令

$$\mathcal{F} := \{ h \in \mathcal{H}(V) \mid h \geq 0,\ h \text{ 有界且 } h(y) = 1\}$$

由定理条件知 $\mathcal{F}$ 非空. 若 $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$，则 $\min\{h_1, h_2\}$ 在 V 为上调和函数. 由 Risez 分解定理知存在 V 上的调和函数 h 及位势 p 使得

$$\min\{h_1, h_2\} = h + p$$

因 $p(y) = 0$，故 $h(y) = h_1(y) = h_2(y) = 1$，从而 $h \in \mathcal{F}$. 显然 $h \leq \min\{h_1, h_2\}$. 这说明 $\mathcal{F}$ 是一个下定向集，据定理 4-4-2，$w := \inf \mathcal{F}$ 在 V 调和. 显然 $w \in \mathcal{F}$，即 w 是 $\mathcal{F}$ 中的最小元.

令

$$f(x) = \begin{cases} w(x), & x \in V; \\ 0, & x \in G \setminus \overline{V}; \\ \limsup\limits_{y \to x, y \in V} w(y), & x \in \partial V. \end{cases}$$

则 f 在 G 上半连续，$f \geq 0$ 且有界.

设 D 为相对紧的可解集，其闭包包含于 G. 那么对任何 $s \in \overline{\mathcal{U}}_f^D$，令

$$g=\begin{cases} w, & 在 V\setminus D, \\ \inf(s,w), & 在 V\cap D, \end{cases}$$

据定理4-5-2，g在V为上调和. 考虑g的Riesz分解$g=h'+p'$，因g为正的，最大下调和下属h'也是正的. 因$g\le w$且有界，故$h'\le w$且有界. 因$p'(y)=0$，得$h'(y)=g(y)=1$，从而$h'\in \mathcal{F}$，表明$h'=w$. 因而在$V\cap D$上有$w\le s$. 因s是f的上函数族中的任意函数，故

$$w\le \mu^D f$$

在$V\cap D$成立. 从而$f\le \mu^D f$在D成立. 由V的任意性推出f在G为下调和函数且在G的边界取0值，据极小值原理知，在G上有$f\le 0$. 于是$w\equiv 0$，与$w(y)=1$矛盾. □

推论 5-4-8 调和空间X中每一点有一个开邻域是**P**集.

证明 因X有一个由可解集(必为MP集)构成的基，再由正性公理及上一定理立即得出结论.□

注 5-4-9 由定理5-4-4及上一推论知，每个调和空间都满足公理S(见§4.3 Bauer调和空间的定义). 因此，一个调和空间若有一个由正则集构成的基，则它是Bauer调和空间. 特别，Brelot调和空间必为Bauer调和空间.□

定理 5-4-10（强极小值原理） 若G是调和空间的**P**集，则下面形式的极小值原理成立(参见§4.1):

若g在G超调和且有紧集K使得在$G\setminus K$上$g\ge 0$，则在G上也有$g\ge 0$.

证明 设K为G的紧子集且满足命题的条件. 对任一$x\in K$，取一个闭包包含于G的相对紧可解集V_x使得$x\in V_x$. 由定理5-4-4，在G上存在连续的正上调和函数s使得$\mu^{V_x}s(x)<s(x)$. 据Risez分解定理知存在连续的位势p_x使得$\mu^{V_x}p_x(x)<p_x(x)$. 因它们在x连续，故存在x的开邻域$W_x\subset V_x$使得$\mu^{V_x}p_x(x)<p_x(y)$对

任意 $y \in W_x$ 成立. 选取 K 中有限个点 x 使得它们对应的 W_x 的并集包含了 K, 把它们对应的这有限个 p_x 的和记作 p, 则位势 p 在 K 上是严格正的.

现假定 K 中有某个点 y 使得 $g(y) < 0$. 那么

$$\alpha := \sup_K(-g/p) > 0.$$

因 $-g/p$ 在 K 为上半连续, 故存在 $z \in K$, 使得

$$\alpha p(z) + g(z) = 0.$$

设 z 被含于上面那有限个 x 中的某一个所对应的 W_x, 并记其对应的 V_x 为 V, 注意到在 G 上 $\alpha p + g$ 为正的, 则有

$$0 = \alpha p(z) + g(z) > \alpha \mu^V p(z) + \mu^V g(z) = \mu^V(\alpha p + g)(z) \geq 0.$$

导出矛盾. 因此 g 在 G 为正的.□

推论 5-4-11 设 p 为 **P** 集 G 上的位势, u 为 G 上的正上调和函数. 若存在紧集 K, 使得在 $G \setminus K$ 上有 $u \leq p$, 则 u 也是 G 上的位势.

证明 设 h 为 G 上的调和函数且 $h \leq u$, 则在 $G \setminus K$ 上有 $p - h \geq 0$, 由定理知在 G 上有 $p - h \geq 0$. 因 p 是位势, 故在 G 上有 $h \leq 0$, 这说明 u 为位势.□

定理 5-4-12 设 G 是 **P** 集, 则任何一个其闭包包含于 G 的开集 U 是一个 MP 集.

证明 设 g 在 U 为超调和且有紧集 K 使得在 $U \setminus K$ 上 $g \geq 0$ 且对任意 $z \in \partial U$ 有

$$\liminf_{x \to z, x \in U} g(x) \geq 0.$$

令

$$g^* = \begin{cases} \min\{g, 0\}, & \text{在} \quad U \\ 0, & \text{在} \quad G \setminus U \end{cases}$$

由定理 4-5-2 知, $g^* \in \mathscr{U}(G)$ 且在 $G \setminus (\overline{U} \cap K)$ 上有 $g^* \geq 0$. 因 $\overline{U} \cap K$ 是紧的, 由定理 5-4-10 推出 g^* 在 G 为正的. 故 g 在 U 是正的. 从

而得 U 是 MP 集. □

定理 5-4-13 (Brelot M-Herve R M) 设 X 为 **P** 调和空间, f 是 X 上的正的连续函数且具有紧支柱 K, 那么对任意实数 $\varepsilon > 0$, X 上存在两个连续的位势 p, q 使得

1) p 与 q 皆在 $X \setminus K$ 调和;

2) $p-q$ 具有紧的支柱且 $0 \le p-q \le f \le p-q+\varepsilon$.

证明 令 $L:=\{x \in X \mid f(x) \ge \varepsilon/3\}$, 并用 $\mathcal{F}$ 表示 L 上的这样的连续函数 g 全体: 存在两个连续的位势 p', q' 使得 $g = p' + q'$. 显然, $\mathcal{F}$ 是 $C(L)$的实的向量子空间.

若 p, q 是连续位势, 则 $\inf\{p, q\}$也是连续位势且由

$$\sup\{p-q, 0\} = p - \inf\{p, q\},$$

知, $\mathcal{F}$ 是 $C(L)$的一个子向量格. 由定理 5-4-4 之 2)知, $\mathcal{F}$ 能分辨 L 中的点, 于是据 Stone-Weierstras 定理(§ 1.4) 知, 存在两个连续的位势 u, v 使得在 L 上成立

$$|(f-2\varepsilon/3) - (u-v)| < \varepsilon/3.$$

作函数 u_1, v_1 如下:

$$u_1 = \begin{cases} u, & 在L, \\ \inf\{u, v\}, & 在X \setminus L; \end{cases} \qquad v_1 = \inf\{u_1, v\}.$$

因 f 在 ∂L 的值为 $\varepsilon/3$, 故在 ∂L 上 $u \le v$. 因 u, v 连续知 u_1, v_1 也连续, 由定理 4-5-2 推出 $u_1 \in \mathcal{U}$. 但 $u_1 \le u$, 可知 u_1 也是位势, 从而 v_1 也是连续位势. 又, 在 $X \setminus L$ 上有 $u_1 = v_1$; 在 L 上

$$u_1 - v_1 = u - \inf\{u, v\} = \max\{0, u-v\}.$$

因在 L 上, $f - \varepsilon \le u - v \le f$, 从而

$$0 \le u_1 - v_1 \le f \le u_1 - v_1 + \varepsilon. \tag{4.1}$$

选一个 $g \in \mathcal{K}^+(X)$ 使得 $0 \le g \le 1$, g 在 L 的一个邻域取值为 1 且 g 的支柱 $S(g) \subset S(f)$. 令 $p := R(g \cdot u_1)$, $q := R(g \cdot v_1)$ (参见 § 5.3 缩减函数的定义).

于是 p, q 都是连续的位势(见定理 5-4-1)且在 $S(f)$之外为调

和,并有 $p \ge q$； $g \cdot u_1 \le p \le u_1$； $g \cdot v_1 \le q \le v_1$，因此在 U 上有 $p = u_1$，$q = v_1$，从而在 $U \setminus L$ 上 $p = q$. 令

$$p' := \begin{cases} p & , \text{在} \quad L \\ q & , \text{在} \quad X \setminus L \end{cases},$$

则 p' 是位势且 $p' \ge g \cdot u_1$，从而 $p' \ge p$. 这说明在 $U \setminus L$ 上 $p = q$. 另一方面，因在 L 上 $p = u_1, q = v_1$, (4.1)式表明在 L 上有

$$0 \le p - q < f < p - q + \varepsilon,$$

即 p, q 满足定理要求.□

定理 5-4-14 设 u 是调和空间 $(X, \mathscr{U})$ 上的一个下半连续、下有限的数值函数. 如果对 X 的每个点 x 及 x 的每个邻域 G，都存在一个相对紧的可解集 U 使得 $x \in U \subset \overline{U} \subset G$ 且满足

$$\mu^U u(x) \le u(x),$$

则 u 是 X 上的超调和函数. 因此，若 $\mathscr{B}$ 是由 X 的相对紧可解集组成的一个基，则扫除系 $((\mu_x^U)_{x \in U})_{U \in \mathscr{B}}$ 生成超调和函数簇 $\mathscr{U}$ (生成的定义参看 § 4.6).

证明 由 Brelot-Bauer 定理（定理 4-6-10）推出. □

定理 5-4-15 (Wiener-Bauer) a) 调和空间中每个有限连续位势关于任意 MP 集可解.

b) **P** 调和空间中每个开集 U 都是可解集.

证明 a) 利用 Evans 函数证明之；b)定理 5-4-6 知 U 是 MP 集；再由 a) 及定理 4-4-13 推出结论. □

定理 5-4-16 任一调和空间的相对紧可解集可解集全体构成 X 的一个拓扑基；进一步，该空间的拟正则可解集全体构成 X 的一个拓扑基.

证明 由推论 5-4-8, 定理 5-4-15 及 4-6-9 推出. □

请读者把以上三个定理的详细证明过程写出来，这对进一步了解空间的结构，掌握位势论的基本证明方法大有好处.

§5.5 调和空间上的上调和延拓

本节首先介绍 Herve R-M 意义下的上调和延拓. 它不同于通常意义下的调和延拓以及第七章的位势延拓(参见 §7.3). 随后介绍的是作者本人根据 Herve 的思路, 发展 Anandam V[1]在 $\boldsymbol{R}^2$ 给出的另一种下调和延拓形式所得到的一个定理及其推论([61]).

定理 5-5-1 (Herve R-M) 设 X 为 **P** 调和空间, G 为开集, 其边界 ∂G 是紧的, 那么, 对 $\overline{G}$ 的任一开邻域 U 上定义的上调和函数 u, 存在 X 上的上调和函数 g 和连续的位势 p 使得

1) $g=u+p$ 在 G 成立;

2) p 在 $G\cup(X\setminus\overline{U})$ 调和;

3) $g=p$ 在 $X\setminus\overline{U}$.

若 U 为相对紧的, 则 g 是一个位势.

证明 设 G_1, G_2 是两个开集使得

$$\overline{G}\subset G_1\subset\overline{G_1}\subset G_2\subset\overline{G_2}\subset U$$

且 $\overline{G_2}\setminus G_1$ 是紧的. 又设 W 是一个相对紧开集使得

$$\overline{G_2}\setminus G_1\subset W\subset\overline{W}\subset U\setminus\overline{G}.$$

定义 U 上的函数 f 使得

$$f=\begin{cases} u, & 在\quad U\setminus\overline{\mathrm{W}} \\ \inf_{\overline{W}} u, & 在\quad \overline{\mathrm{W}} \end{cases}$$

据定理 5-4-2, 在子调和空间 U 中考虑的缩减函数 Rf 是上调和的且在 W 上连续. 对任意 $\varepsilon>0$, 作 X 上的一个连续函数 h 使得 h 的支柱在 W 且 h 在 ∂G_1 上取 $Rf+\varepsilon$ 值, 在 ∂G_2 上取 $Rf-\varepsilon$ 值. 据定理 5-4-13, 存在 X 上的连续位势 p, q, 使得 p, q 在 $X\setminus\overline{W}$ 调和且相等并在 X 上满足

$$|h-(q-p)|<\varepsilon.$$

令

$$g=\begin{cases} q & 在\quad X\setminus G_2; \\ \inf\{q, Rf+p\} \quad , & 在\quad G_2\setminus G_1; \\ Rf+p, & 在\quad G_1. \end{cases}$$

因为 $Rf+p<q$ 在 ∂G_1, $q<Rf+p$ 在 ∂G_2, 且在 $G_1\setminus(\overline{W}\cup\overline{G})$ 上 $Rf=u$ 成立. 故函数 g 为上调和的, 因 $Rf=u$ 在 G 成立, 故 $g=u+p$ 在 G 上成立. 易知，条件 2)、3)也成立.

再设 U 且为相对紧集. 因 X 为 $\mathbf{P}$ 调和空间， g 在 $X\setminus G_2$, 从而在 $X\setminus\overline{U}$ 取正值, 据定理 5-4-10(极小值原理)知 $g\geq 0$. 设 $h\in\mathcal{H}(X)$ 且 $h\leq g$, 那么 $p-h$ 在 $X\setminus\overline{U}$ 为正的；由强极小值原理推出 $p-h\geq 0$, 因 p 为位势, 故 $h\leq 0$, 这说明 g 为位势. □

定理 5-5-2 设 $X=(X,\mathcal{U})$为椭圆调和空间, K 为紧集, u 为 $X\setminus K$ 上的上调和函数. 若 K 有一个正则邻域 W 使得存在一个相对紧可解集 G, 满足 $\partial W\subset G\subset\overline{G}\subset X\setminus K$, 则对 X 上任何一个在 $W\setminus\overline{G}$ 的每个连通分支不调和的上调和函数 v, 存在 X 上的一个上调和函数 s 及一个正的实常数α 使得

$$s(x)=u(x)+\alpha v(x), \qquad x\in X\setminus(\overline{W}\cup\overline{G}).$$

证明 假定条件成立, $\mu^G u$ 在 G 调和且 $\mu^G u\leq u$. 在子空间 $X\setminus K$ 中定义上调和函数 u_G 如定理 5-1-4, 类似地在 X 上定义 v_G, 它也在 G 调和, 在 X 为上调和. 由假定 v_G 在 $W\setminus\overline{G}$ 的每个连通分支不调和. 因 X是椭圆调和空间, 据定理4-6-7，关于正则集 W上以 $v_G|_{\partial W}$为边界值的调和函数$\mu^W v_G$有，

$$v_G(y)>(\mu^W v_G)(y), \qquad y\in W.$$

从而$v_G-\mu^W v_G$ 在紧集 $\partial G\cap W$上取到严格正的极小值. 由下半连续性, u_G 在$\partial G\cap W$ 也取到有限的极小值. 故存在正的实常数 $\alpha\geq 0$ 使得在$\partial G\cap W$上有

$$\alpha(v_G-\mu^W v_G)\geq\mu^W v_G-u_G.$$

另一方面, 由于 u_G 与 v_G 都在 $G\supset\partial W$ 连续且 W 为正则集,

故 $\mu^W u_G$ 与 $\mu^W v_G$ 都可连续延拓到$\overline{W}$, 因此, 对 $W\cap G$ 上的上调和函数

$$f := \alpha v_G + u_G - \mu^W(\alpha v_G + u_G),$$

关于 $W \cap G$ 的每一个边界点 x, 当 y 从 $W \cap G$ 趋于 x 时都有 $\liminf f(y) \ge 0$. 因为 $W\cap G$ 为 MP 集, 故在 $W\cap G$ 上有 $f\ge 0$. 在 $X\setminus K$ 上令 $g := \alpha v_G + u_G$, 则在 $W\cap G$ 上有

$$g = \alpha v_G + u_G \ge \mu^W(\alpha v_G + u_G) = \mu^W g \tag{5.1}$$

由 u_G 及 v_G 的定义知 g 在 $G\supset \partial W$ 调和; 由上一段讨论知 $\mu^W g$ 在 W 调和且可连续延拓到∂W. 再作 X 上的函数 s, 使得 s 在 $X\setminus W$ 等于 g 而在 W 上等于 $\mu^W g$.

于是, 在 $X\setminus(\overline{W}\cup\overline{G})$上,

$$s = \alpha v_G + u_G = \alpha v + u.$$

可以证明, s 是 X 上的上调和函数. 故 s 即为所求.□

在椭圆的 **P** 调和空间 X 中, 每个紧集总有正则邻域, 因此上一定理条件可以作修改, 并有进一步结果:

推论 5-5-3 设 X 为椭圆的 **P** 调和空间, K 为紧集, W 为 K 的一个邻域, u 为 $X\setminus K$ 上的上调和函数, 那么对 $\overline{W}$ 的任何一个邻域 U, 对 X 上的任何一个上调和函数 v, 若 v 在 K 的某个邻域 W_1 ($W_1 \subset \overline{W_1} \subset W$) 的每个连通分支不调和, 则存在 X 上的一个上调和函数 s 和一个正的实常数α, 使得在 $X\setminus\overline{U}$ 上有 $s = u + \alpha v$. □

推论 5-5-4 ([22]) 设 $X = R^N$ $(N\ge 2)$, K 为 X 的紧子集, V 为 K 的一个邻域, $V_1,\cdots,V_m$ 为 V 的那些与 K 有相交的连通分支, $x_i\in V_i$, $i=1,\cdots,m$. 设 u 为 $X\setminus K$ 上的上调和函数, 那么存在 X 上的一个上调和函数 s 及一个正的实常数α, 使得在 $X\setminus\overline{V}$ 上有

$$s = u + \alpha v,$$

其中 $v = \sum_{i=1}^m \log\dfrac{2}{|x-x_i|}$, 当 $N=2$; $v = \sum_{i=1}^m \dfrac{1}{|x-x_i|^{N-2}}$, 当 $N\ge 3$.

第六章 超调和函数的扫除、广义权与容量

为方便计，我们对记号的简化再做如下说明与补充.

一个非空集 X 上的函数列$\{f_n\}$，若当 $n\to\infty$时其极限函数存在，常简记之为 $\lim_n f_n$；同时，$\liminf_n f_n$ 与 $\limsup_n f_n$ 分别代表函数列的下、上极限，而省去下标趋于∞的说明. 类似地，$\cup_n$ 表示 $\bigcup_{n=1}^{\infty}$，$\cap_n$ 表示 $\bigcap_{n=1}^{\infty}$. 正如§1.4 说明的那样，在拓扑空间 X 上的一个函数 f 的下半连续正则化 $\hat{f}$ 是 X 上的这样一个函数：

$$\hat{f}(x)=\liminf_{y\to x,y\in X} f(y)$$
$$=\sup_U(\inf\{f(y)\mid y\in U\}),\qquad x\in X.$$

其中 U 取遍 X 的所有开邻域. 进一步 $\hat{}\lim_n f_n$ 表示函数列$\{f_n\}$的极限函数 $\lim_n f_n$ (当存在时)的下半连续正则化; $\hat{}\inf\mathfrak{I}$ 与 $\hat{}\inf_n\{g_n\}$分别表示一族函数 $\mathfrak{I}$ 与一列函数$\{g_n\}$的下确界函数的下半连续正则化. 把上述 n 换成 i 或 j 等时，意义类似.

本章以下均设(X, $\mathcal{U}$)是一个(CC)调和空间，为了记号简便，如未另加声明，用 $\mathcal{U}$ 代表 $\mathcal{U}(X)$，即 X 上的超调和函数全体；$\mathcal{U}$ 中的正函数全体，即 X 上正的超调和函数全体记作 $\mathcal{U}_+$. 我们已知道，$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}_+$ 都是凸锥. 在 $\mathcal{U}$ 中引进两种次序：

(1)自然次序“$\leq$”：对 $\mathcal{U}$ 中任意元素 f 与 g，$f\leq g$ （等价于 $g\geq f$ ）当且仅当 $f(x)\leq g(x)$对所有 $x\in X$ 成立；这时称：关于自然次序 f 为 g 的下属，g 为 f 的上属.

(2)特殊次序“$\prec$”：对 $\mathcal{U}$ 中任意元素 f 与 g，$f\prec g$（ 等价于 $g\succ f$ ）当且仅当存在 $h\in\mathcal{U}_+$ 使得 $f+h=g$. 上、下属的概念可

类似定义.

对$f, g \in \mathscr{U}$及函数族 $\mathfrak{I} := \{f_i \mid i \in I\} \subset \mathscr{U}$, 分别用

$$\wedge \mathfrak{I}, \wedge_{i \in I} f_i \text{ 或 } \wedge\{f_i\}, f \wedge g \quad \text{及}$$
$$\vee \mathfrak{I}, \vee_{i \in I} f_i \text{ 或 } \vee\{f_i\}, f \vee g$$

表示按自然次序, 函数族 $\mathfrak{I}$ 或$\{f, g\}$在$\mathscr{U}$中的最大下属与最小上属,如果它们存在的话. 把上述 $\wedge$, $\vee$ 分别改作$\wedge_t$,$\vee_t$, 则表示关于特殊次序的最大下属与最小上属.

下面用到次序时, 如未加声明则都是指自然次序.

§ 6.1 调和空间的细拓扑

定义 X 上的、使得 X 的每个开子集 U 上的超调和函数都在 U 连续的最粗拓扑称为细拓扑.

注 1 在定义调和簇$\mathscr{U}$时, 我们只要求$\mathscr{U}(U)$中的元素(即 U 上的超调和函数)是(关于原来的拓扑)下半连续的, 因此, 细拓扑比原来拓扑细.

为了区分细拓扑下的开集、邻域、连续等等拓扑概念, 我们都把有关的术语的前面添上一个"细"字, 例如细开集、细邻域、细连续等.

注 2 数值函数 f 在 U 或其中某点细连续指的是作为从 U 到$[-\infty, \infty]$的映射关于细拓扑连续, 不要求函数值在该处有限. 但未加"细"字的"连续函数", 仍和以前一样, 指"连续的实函数"或等价地, "有限连续函数".

容易验证, X 上的细拓扑, 就是包含所有具有如下形式的集合的最粗拓扑(即这种集全体是细拓扑的一个子基):

$$(U, f, \alpha) := \{x \in U \mid f(x) < \alpha\},$$

其中 U 是开集, f 是 U 上的超调和函数, α 是实数.

定理 6-1-1 $G\subset X$为x的细邻域的充要条件是 (1) G为x的一个邻域(依原拓扑) 或(2) x有一个开邻域U及定义在U上的一个超调和函数f使得

$$c:=\liminf_{y\to x,y\notin G}f(y)>d:=f(x) \tag{1.1}$$

证明 充分性. (1)设G是x的一个邻域, 则G覆盖了x的一个开邻域, 因开集必为细开集, 故G为x的细邻域.

(2) 设x有开邻域U及U上的超调和函数f满是(1.1)式, 则存在实数α使得

$$c>\alpha>d,$$

且x有一个开邻域$W\subset U$使得在$W\setminus G$上有$f\geq\alpha$. 因此

$$x\in(W,f,\alpha)\subset G.$$

因(W,f,α)是细开集, 故G为x的细邻域.

必要性. 设G是x的细邻域但不是x的邻域. 那么存在有限个子基成员(V_i,f_i,α_i), $i=1,2,\cdots,n$, 使得

$$x\in\cap_{i=1}^{n}(V_i,f_i,\alpha_i)\subset G$$

那么,$f:=\sum_{i=1}^{n}f_i$就是定义在开集$U:=\cap_{i=1}^{n}V_i$上的超调和函数而且每个(V_i,f_i,α_i)也是x的细邻域, 且其中至少有一个不是通常邻域. 这时, 可设$\boldsymbol{F}$是$U\setminus G$上的一个收敛于x的超滤子使得

$$\lim_{\boldsymbol{F}}f=\liminf_{y\to x,y\notin G}f(y),$$

于是至少有一个j: $1\leq j\leq n$使得

$$U\setminus(V_j,f_j,\alpha_j)\in\boldsymbol{F}$$

从而

$$\lim_{\boldsymbol{F}}f=\sum_{i=1}^{n}\lim_{\boldsymbol{F}}f_i\geq\sum_{i=1}^{n}f_i(x)+\alpha_j-f_j(x)>f(x). \qquad\square$$

定理 6-1-2 X的每一点具有一个细邻域基（不要求每个成员为细开邻域）使得其中每个成员是原来拓扑下的紧集.

证明 设$x\in X$, G是x的一个细邻域, 如果$x\notin\partial G$(原拓扑下的边界), 则G是x的一个通常邻域, 因X原来的拓扑是局部

紧的，可立即得出结论. 下面设 $x \in \partial G$. 据上一定理，存在 x 的一个邻域及该邻域上的超调和函数 f 及一个实数 α 使得

$$\liminf_{y \to x, y \notin G} f(y) > \alpha > f(x) \tag{1.2}$$

用 B 表示 x 的一个紧邻域使得 f 在 B 上有定义且使得在 $B \setminus G$ 上有 $f > \alpha$ (据(1.2) 式知 B 存在). 令

$$K := \{y \in B \mid f(y) \leq \alpha\},$$

则 K 为原拓扑下的紧集, $K \subset G$ 且 K 包含 x 的一个细邻域

$$\{ y \in B \mid f(y) < \alpha \}. \qquad \square$$

定理 6-1-3 X 关于细拓扑是一个 Baire 空间.

证明 设$\{G_n\}$是一列细开集，每个G_n在X为细稠密. 又设G是一个细开集. 据上一定理，可用归纳法找出 X 的一列紧集$\{K_n\}$使得每个 K_{n+1} 包含于 K_n 的细内部且 $K_n \subset G \cap G_n$, $n \in \mathbf{N}$. 于是

$$\varnothing \neq \cap_n K_n \subset G \cap (\cap_n G_n). \qquad \square$$

下面用Π 表示 $x \in X$ 的可解邻域全体组成的集（它是一个收敛于 x 的滤子），以反包含为序 Π 是一个定向集.

定理 6-1-4 设 K 是 $x \in X$ 的一个（在原拓扑下的）紧的细邻域. 那么 $\boldsymbol{R}_+ := [0, \infty)$上的网

$$(\mu_x^V(K) \mid V \in \Pi) \text{ 与 } (\mu_x^V(X \setminus K) \mid V \in \Pi)$$

分别收敛于 1 与 0. 从而，X 在细拓扑下无弧立点.

证明 设 h 是定义在 x 的一个相对紧开邻域 G 上的正调和函数且 $h(x) = 1$(见 § 4.1 正性公理）. 若 K 是 X 在原拓扑下的邻域，这结论显然成立.

下设 K 不是 x 的通常邻域. 据定理 6-1-1, x 有一个开邻域 U 使得 U 上有一个超调和函数 f 对某个实数 β 满足

$$\liminf_{y \to x, y \notin K} f(y) > \beta > f(x).$$

于是可选上述 $W \in \Pi$使得 $W \subset G \cap U$ 且在 $W \setminus K$ 上有 $f \geq \beta$. 注意到

$\mu_x^V f \le f(x)$及 h 的定义，可推出，对任意实数 $\alpha < f(x)$ 有

$$f(x)-\alpha \ge \limsup_{V,\Pi} \int (f-\alpha h)\,\mathrm{d}\mu_x^V,$$

$$\ge (\beta-\alpha) \limsup_{V,\Pi} \int_{X\setminus K} h\,\mathrm{d}\mu_x^V, \quad (\overline{V} \subset W)$$

因 α 是任意的，故 $\lim\limits_{V,\Pi} \int_{X\setminus K} h\,\mathrm{d}\mu_x^V = 0$. 另一方面，对任意 $V \in \Pi$ 且当 $\overline{V} \subset W$ 时有

$$(\inf_V h)\,\mu_x^V(K) \le \int h\,\mathrm{d}\mu_x^V = 1 \le (\sup_V h)\,\mu_x^V(K) + \int_{X\setminus K} h\,\mathrm{d}\mu_x^V,$$

$$(\inf_V h)\,\mu_x^V(X\setminus K) \le \int_{X\setminus K} h\,\mathrm{d}\mu_x^V.$$

因此

$$\limsup_{V,\Pi} \mu_x^V(K) \le 1 \le \liminf_{V,\Pi} \mu_x^V(K),$$

$$0 \le \limsup_{V,\Pi} \mu_x^V(X\setminus K) \le 0. \qquad \square$$

定义 设 $\mathcal{B}$ 是 X 的由一些相对紧可解集构成的一个基. 称 X 上的数值函数 f 为 $\mathcal{B}$-近乎超调和的, 如果 f 是局部下有界的且对每个 $V \in \mathcal{B}$ 都有 $\mu^V f \le f$ 成立.

显然，每个 $f \in \mathcal{U}$ 是下半连续的 $\mathcal{B}$-近乎超调和函数.

定理 6-1-5 设 f 是 $\mathcal{B}$-近乎超调和的, 则 f 关于原拓扑的下半连续正则化 $\hat{f}$ 与关于细拓扑的下半连续正则化一致, 而且

$$\hat{f} \in \mathcal{U}.$$

证明 设 $V \in \mathcal{B}$. 据定理 4-6-2，$\mu^V f$ 是下半连续的，从而 $\mu^V \hat{f} \le \mu^V f \le \hat{f}$.同理 $\mu^V \hat{f}$ 也是下半连续的，据定理 5-4-14，有 $\hat{f} \in \mathcal{U}$.

记 f 关于细拓扑的下半连续正则化为 $\tilde{f}$. 对 $x \in X$，由于 x 的(通常)邻域必为细邻域，故有，

$$\tilde{f}(x) \ge \hat{f}(x).$$

反之，令 $\mathbf{Q}:=\{V\in\mathscr{B}\mid x\in V\}$，那么 $\mathbf{Q}$ 关于反包含关系成定向集. 对任意实数 $\alpha<\tilde{f}(x)$，据定理 6-1-2，存在 x 的一个紧的细邻域 G 使得在 G 上有 $f>\alpha$. 于是，由定理 6-1-4 得，

$$\hat{f}(x)\geq\lim_{V,\mathbf{Q}}\int^{*}f\,\mathrm{d}\mu_x^V$$
$$\geq a\lim_{V,\mathbf{Q}}\mu_x^V(G)+\lim_{V,\mathbf{Q}}(\inf_V f)\,\mu_x^V(X\setminus G)\geq\alpha\ .$$

因 α 是任意的，故 $\hat{f}(x)\geq\tilde{f}(x)$. □

定理 6-1-6 对任意 $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$，记 $g:=\inf\{u(x)\mid u\in\mathscr{V}\}$，若 $\wedge\mathscr{V}$ 存在，则 $\mathscr{V}$ 在 $\mathscr{U}$ 的最大下属 $\wedge\mathscr{V}=\hat{g}$ 且集 $E:=\{x\in X\mid\hat{g}(x)<g(x)\}$ 在 X 无处稠密.

证明 因为 $g\geq f:=\wedge\mathscr{V}\in\mathscr{U}$，易验证 g 是 $\mathscr{B}$-近乎超调和函数. 由定理 6-1-5，$\hat{g}\in\mathscr{U}$. 于是由 g 的定义知 $\wedge\mathscr{V}=\hat{g}$. 注意到 $\mathscr{U}$ 的元素，包括 f，都是细连续的，对每个 $n\in\mathbf{N}$，令

$$E_n:=\{x\in X\mid f(x)\leq\inf(n,g(x)-1/n)\}$$
$$=\bigcap_u\{x\in X\mid f(x)\leq\inf(n,u(x)-1/n)\},$$

其中 $\bigcap_u$ 表示对所有 $u\in\mathscr{V}$ 所对应的集合取交，那么 E_n 是细闭的. 我们只要证明 E_n 是细无处稠密的，就可据定理 6-1-3 推出 $E=\cup_n E_n$ 也是无处稠密的. 为此取定一个 $y\in E_n$，那么 $f(y)\leq n$ 而且存在 y 的一个细邻域 V，使得对任意 $x\in V$ 有

$$f(y)-1/(2n)<f(x).$$

因此对每个 $x\in V\cap E_n$ 有 $g(x)-1/n\geq f(x)>f(y)-1/(2n)$，即

$$g(x)>f(y)+1/(2n).$$

这表明 y 不是 E_n 的细内点. 否则，$V\cap E_n$ 将是 y 的一个细邻域，而 g 在细邻域中的下半连续正则化就是 f，由此导出

$$f(y)\geq f(y)+1/(2n).$$

矛盾. 这说明 E_n 无细内点，即无处稠密. □

推论 6-1-7 (a) 设 f 是 X 上的一个细下半连续、局部下有界

的数值函数，则 $Rf := \inf\{u \mid u \in \mathscr{U}, u \geq f\} \in \mathscr{U}$.

(b) 设 $\mathscr{V}, \mathscr{W} \subset \mathscr{U}$ 且 $\wedge\mathscr{V}$ 与 $\wedge\mathscr{W}$ 存在，记

$$\mathscr{V} + \mathscr{W} := \{v + w \mid v \in \mathscr{V}, w \in \mathscr{W}\},$$

则 $\wedge(\mathscr{V} + \mathscr{W}) = \wedge\mathscr{V} + \wedge\mathscr{W}$.

(c) 设 $\{\mathscr{V}_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个子集列使得对每个 $n \in \mathbf{N}$, $\wedge\mathscr{V}_n$ 存在；又设 $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$. 令 $f_n := \inf\{u \mid u \in \mathscr{V}_n\}$, $f := \inf\{u \mid u \in \mathscr{V}\}$. 若 $\{f_n\}$ 单调增加收敛于 f, 则 $\lim_n(\wedge\mathscr{V}_n) = \wedge\mathscr{V}$.

证明 由定理 6-1-3 及本定理直接推出. □

定理 6-1-8 设调和空间 $(X, \mathscr{U})$ 中装备了细拓扑，则 X 上的超调和函数凸维 $\mathscr{U}$ 满足

(1)**下半连续正则化公理**：关于自然次序, $\mathscr{U}$ 是下定向集且对 $\mathscr{U}$ 的任意非空子集 $\mathscr{W}$, 当 $\mathscr{W}$ 在 $\mathscr{U}$ 有下属时，则

$$\hat{}\inf\{f \mid f \in \mathscr{W}\} \in \mathscr{U},$$

从而，$\wedge\mathscr{W} = \hat{}\inf\{f \mid f \in \mathscr{W}\}$.

(2)**上定向集公理**：关于自然次序, $\mathscr{U}$ 中任何非空上定向子集的上确界函数必在 $\mathscr{U}$ 中.

(3)**自然分解公理**：若 $u, v_1, v_2 \in \mathscr{U}_+$ 满足 $u \leq v_1 + v_2$, 则存在 $u_1, u_2 \in \mathscr{U}_+$ 使得 $u = u_1 + u_2$ 且 $u_1 \leq v_1$, $u_2 \leq v_2$.

证明 (1)显然, $\mathscr{U}$ 是下定向集. 余者由定理 6-1-6 推出.

(2)设 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的非空上定向子族. 由于 $f_2 := \sup\{f \mid f \in \mathscr{W}\}$ 是下半连续的下有限的. 由完备化公理(见 § 4.1)或定理 5-4-14 知

$$\vee\mathscr{W} = f_2 \in \mathscr{U}.$$

(3)设 $u, v \in \mathscr{U}_+$, 令

$$f(x) = \begin{cases} \sup\{u(x) - v(x), 0\}, & \text{当} v(x) < +\infty \\ 0, & \text{其它} x \end{cases}$$

因 f 是细下半连续的，故 $Rf \in \mathscr{U}_+$ (见推论 6-1-7(a)). 设 V 是一个拟正则的 MP 集 (见 § 4.6), $g \in C(\partial V)$ 且在 ∂V 上 $g \leq u$. 选取

$x \in V$及V上的正超调和函数u_0，它在x取有限值且沿着V上的任何非正则超滤子趋于∞. 任取$\varepsilon \in (0,1)$,定义X上的函数u^*使得它在$X \backslash V$上取Rf的值而在V上等于

$$\inf\{Rf, \mu^V(Rf) + u - \mu^V g + \varepsilon u_0\}.$$

由命题 4-5-4 知, $u^* \in \mathcal{U}_+$, 于是在V上有

$$\mu^V g \le \mu^V u \le \mu^V v + \mu^V(Rf) \le v + \mu^V(Rf) \ ,$$

$$u \le v + \mu^V(Rf) + u - \mu^V g \ .$$

从而在X上有$u \le v + u^*$, 进而$f \le u^*$, $Rf \le u^*$, 故在V上有

$$Rf(x) \le \mu^V(Rf)(x) + u(x) - \mu^V g(x) + \varepsilon u_0(x).$$

由ε, x及g的任意性推出在V上有

$$Rf + \mu^V u \le \mu^V(Rf) + u \ .$$

用f_1表示X上的函数, 它在Rf取有限值处的值为$u - Rf$, 其它处的值为∞. 由上述不等式知, 对任何拟正则集V有,

$$\mu^V f_1 \le f$$

在V上成立. 因为拟正则集全体构成X的一个基(见定理 5-4-16.)且由$f_1 \ge 0$知, f_1的细下半连续正则化$\hat{f}_1 \in \mathcal{U}_+$(定理 6-1-5). 因为

$$u = Rf + f_1,$$

由u及Rf的细连续性推出

$$u = Rf + \hat{f}_1 \ , \quad Rf \prec u \ . \tag{1.3}$$

设$u \le v_1 + v_2 \in \mathcal{U}_+$, 用$v_1$代替上面的$v$,相应的$f$记作$f_0$仍同样推出有$u = Rf_0 + w$, 其中$w \in \mathcal{U}_+$, $Rf_0 \in \mathcal{U}_+$, 而且$Rf_0 \le v_2$. 又因为显然有

$$u \le v_1 + Rf_0$$

故得

$$u = \inf(v_1 + Rf_0, w + Rf_0) = \inf(v_1, w) + Rf_0$$

那么$u_1 := \inf\{v_1, w\}$, $u_2 := Rf_0$即为所求. □.

§ 6.2　正超调和函数的扫除

以下取定一个调和空间$(X, \mathcal{U})$，仍用$\mathcal{U}_+$表示X上正的超调和函数全体.

定义　设$u \in \mathcal{U}_+$，f为X上的函数，它在E上取值为u，而在$X \setminus E$上取值0．令

$$R_u^E := Rf$$

(参见 § 5.3)并称之为u在E上的**缩减函数**(reduit)，把它的下半连续正则化记作$\hat{R}_u^A$，称为u在E上的**扫除**(balayage)，或**扫除函数**(balayaged function)．

显然，$R_u^E = u$在E上成立；而且由下半连续正则化公理立即得出$\hat{R}_u^E \in \mathcal{U}_+$．特当$E$为细开集时，由定理 6-1-5 有，$\hat{R}_u^E = R_u^E$．

由定义立即推出，对X的任意子集E, F；任意$u, v \in \mathcal{U}_+$

(1)若$E \subset F, u \le v$则 $R_u^E \le R_v^F$；

(2)$R_{u+v}^E \le R_u^E + R_v^E$，　$R_u^{E \cup F} \le R_u^E + R_u^F$．

引理 6-2-1　(a)设$E \subset X$, $u \in \mathcal{U}_+$且u在E上只取实数值，记$\mathcal{G} := \{G \mid G$为$E$的细邻域且$u$在$G$上取实数值$\}$．则

$$R_u^E = \inf_G R_u^G := \inf\{R_u^G \mid G \in \mathcal{G}\}.$$

(b) 设$E \subset X$, $u \in \mathcal{U}_+$且u在E的一个邻域V'连续．若存在$w \in \mathcal{U}_+$使得 $w < \infty$ 且在V'上有$w > 0$成立，则

$$R_u^E = \inf_V R_u^V := \inf\{R_u^V \mid V\text{为包含}E\text{的开集}\};$$

$$\hat{R}_u^E = \hat{}\inf_V \hat{R}_u^V := \hat{}\inf\{\hat{R}_u^V \mid V\text{为包含}E\text{的开集}\}.$$

证明　(a) 设$g \in \mathcal{U}_+$且在E上有$g \ge u$．任取实数$\alpha > 1$．令

$$F := \{x \in X \mid u(x) < \alpha g(x)\} \cup \{x \in X \mid u(x) = 0\}.$$

因为 u 与 g 皆在 X 上细连续，所以上式右边第一个集是细开集，第二个集 $A:=\{x\in X\,|\,u(x)=0\}$ 也是细开集．事实上，由于

$$\{nu\,|\,n\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{U}_+$$

是上定向集，其最小上属 $f\in\mathscr{U}_+$(见 § 6.1 上定向公理)且 f 在 A 上取值为 0 而在 $X\setminus A$ 取值为∞．由 f 的细连续性推出 A 为细开集．因此 $F\in\mathscr{G}$，即 F 为 E 的细邻域且 u 在 F 上取有限值. 从而

$$\inf_G R_u^G\le\alpha g$$

由 α 与 g 的任意性推出

$$\inf_G R_u^G\le R_u^E\ .$$

反向不等式是显然的．

(b) 设 $g\in\mathscr{U}_+$且在 E 上有 $g\ge u$．那么，对任意实数$\varepsilon>0$,

$$U:=\{x\in V'\,|\,(g+\varepsilon w)(x)>u(x)\}$$

是一个包含 E 的开集．因为 $g+\varepsilon w\ge R_u^U$，故

$$g+\varepsilon w\ge\inf_V R_u^V\ .$$

由 g 与ε的任意性推出结论(b)第一式，第二式也因之得证.□

注　(1)若把定理中“u 在 E 仅取实数值”，即“u 在 E 的值是有限”这一条件删去，定理不再成立．

(2)显然，在命题 a)的条件中，若将 $\mathscr{G}$ 换成 $\mathscr{G}'$ 结论仍然成立:

$$\mathscr{G}':=\{G\,|\,G\text{ 为 }E\text{ 的细邻域}\}.$$

(3)要使 b)中的第二式成立，不必要求 $w<\infty$在 X 上处处成立，只须在其中一个稠密子集上成立.

定理 6-2-2　设 $f,g\in\mathscr{U}_+$, $E\subset X$, 则

$$R_{f+g}^E=R_f^E+R_g^E\quad,\quad\hat{R}_{f+g}^E=\hat{R}_f^E+\hat{R}_g^E.$$

证明　若已证明第一个等式，则可从 X 关于细拓扑是 Baire 空间(定理 6-1-3) 推出第二个等式．

先设 E 为细开集且 f,g 皆在 E 上取有限值. 注意到

$$R_{f+g}^E \le R_f^E + R_g^E.$$

这时上式三个缩减函数分别等于 $\hat{R}_{f+g}^E$，$\hat{R}_f^E$，$\hat{R}_g^E$，且为 $\mathscr{U}_+$中元素，利用自然分解公理 (定理 6-1-7) 知存在$f_1, g_1 \in \mathscr{U}_+$，使得

$$R_{f+g}^E = f_1 + g_1, \text{ 其中 } g_1 \le R_g^E,\ \ f_1 \le R_f^E.$$

因在 E 上有 $R_{f+g}^E = f + g$，故在 E 上有 $f = f_1, g = g_1$. 从而

$$R_f^E \le f_1,\quad R_g^E \le g_1,$$

$$R_f^E + R_g^E \le f_1 + g_1 = R_{f+g}^E,$$

即 $R_f^E + R_g^E = R_{f+g}^E$.

下面考虑 E 为 X 的任一子集. 设 F 为 E 的子集，使得 $f+g$ 在 F 上取有限值. 设 $x \in X$. 若 R_{f+g}^E 在 x 取无限值，则结论显然成立. 下面设 R_{f+g}^E 在 x 取有限值，又设 $h \in \mathscr{U}_+$使得 $h(x)$为有限值且在 E 上有 $h \ge f+g$. 对任意实数$\varepsilon > 0$ 及任意 $u \in \mathscr{U}_+$，当 u 在 F 上满足 $u \ge f$ 时，在 E 有

$$u + \varepsilon h \ge f$$

成立. 因此

$$u + \varepsilon h \ge R_f^E.$$

由ε及 u 的任意性知

$$R_f^F(x) \ge R_f^E(x).$$

同理可证

$$R_g^F(x) \ge R_g^E(x).$$

利用上一引理之 a)，据上一段讨论知

$$R_{f+g}^F = R_f^F + R_g^F.$$

从而

$$R_{f+g}^E(x) \ge R_{f+g}^F(x) = R_f^F(x) + R_g^F(x) \ge R_f^E(x) + R_f^E(x).$$

故

$$R_{f+g}^{E} \geq R_{f}^{E}+R_{g}^{E}.$$

反向不等式显然成立 . □

由缩减函数与扫除函数的定义，我们已知道，对 X 的任意子集 E、F 及 $f\in \mathcal{U}_{+}$，有

$$R_{f}^{E\cup F} \leq R_{f}^{E}+R_{f}^{F},$$

$$\hat{R}_{f}^{E\cup F} \leq \hat{R}_{f}^{E}+\hat{R}_{f}^{F}.$$

下面的的定理通过在上面两个不等式左边分别插入关于交集的缩减函数与扫除函数将它们精确化了 . 若要求 f 是上调和的，则插入适当的缩减函数与扫除函数可以精确化为等式（见定理 6-2-12）. 这些结果很有用，定理 6-2-3 将说明拟容量的凸性，定理 6-2-12 在研究扫除测度时发挥作用（见第九章）.

定理 6-2-3 设 $f\in \mathcal{U}_{+}, E, F\subset X$, 则

$$R_{f}^{E\cup F}+R_{f}^{E\cap F} \leq R_{f}^{E}+R_{f}^{F},$$

$$\hat{R}_{f}^{E\cup F}+\hat{R}_{f}^{E\cap F} \leq \hat{R}_{f}^{E}+\hat{R}_{f}^{F}.$$

证明 只须证明第一式，因第二式可从第一式及 Baire 拓扑的性质推出 .

先假定 E, F 为细开集 . 令

$$u:=R_{f}^{E\cup F}, v:=R_{f}^{E\cap F}$$

则

$$u=R_{u}^{E\cup F}, v=R_{v}^{E\cap F}$$

且在 $E\cup F$ 有

$$u+v\leq R_{f}^{E}+R_{f}^{F}.$$

故由上一定理得

$$R_{f}^{E\cup F}+R_{f}^{E\cap F}=u+v\leq R_{u}^{E\cup F}+R_{v}^{E\cup F}=R_{u+v}^{E\cup F}\leq R_{f}^{E}+R_{f}^{F}.$$

下面设 E, F 是任意的且用 C, D 分别表示 E 与 F 上的那些使

得 f 在其上取有限值的点构成的子集. 设 $x \in X$ 使得 $R_f^E(x)+R_f^F(x)$为有限, 则 $R_f^{E\cup F}(x)$与 $R_f^{E\cap F}(x)$皆有限. 又设 $g \in \mathscr{U}_+$使得在 $E\cup F$ 上有 $f\le g$ 且 $g(x)$有限 .

对任意实数$\varepsilon>0$ 及任何 $h\in\mathscr{U}_+$, 当在 $C\cup D$ 上有 $h\ge f$时, 则在 $E\cup F$ 上 $h+\varepsilon g\ge f$ 成立 . 因此

$$h(x)+\varepsilon g(x)\ge R_f^{E\cup F}(x).$$

由于ε及 h 的任意性推出

$$R_f^{C\cup D}(x)\ge R_f^{E\cup F}(x).$$

类似地有

$$R_f^{C\cap D}(x)\ge R_f^{E\cap F}(x).$$

从而由上段结果及引理 6-2-1 之 a), 借助于包含 C, D 的细开集可推出,

$$\begin{aligned}R_f^E(x)+R_f^F(x)\ge R_f^C(x)+R_f^D(x) &\ge R_f^{C\cup D}(x)+R_f^{C\cap D}\\ &\ge R_f^{E\cup F}(x)+R_f^{E\cap F}(x). \ \Box\end{aligned}$$

下面将给出一个很有用的单调增加列逼近定理. 为此, 先证下面引理:

引理 6-2-4 对任何一个单调增的、X 的子集列$\{A_n\}$及在 $A:=\cup_n A_n$ 上取有限值的$f\in\mathscr{U}_+$, 有

$$\sup_n R_f^{A_n}=R_f^A, \tag{2.1}$$

这里取上确界时让 n 取遍所有自然数, 以下同此 .

证明 因为 $\sup_n R_f^{A_n}\le R_f^A$ 显然成立, 只须就满足

$$\sup_n R_f^{A_n}(x)<\infty$$

的点 $x\in X$ 证明(2.1)成立 . 为此, 设实数 $\varepsilon>0$, 据引理 6-2-1, 对每个 $n\in\mathbf{N}$, 存在细开集 $G_n\supset A_n$ 使得

$$R_f^{G_n}(x)< R_f^{A_n}(x)+2^{-n}\varepsilon.$$

那么，按下式定义的、单调增的细开集列$\{W_n\}$:

$$W_n := G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$$

对每个$n \in \mathbf{N}$满足

$$R_f^{W_n}(x) < R_f^{A_n}(x) + (1 - 2^{-n})\,\varepsilon\,. \tag{2.2}$$

下面用归纳法验证之. 当$n = 1$时，(2.2)显然成立．一般地，若(2.2)对某个$n \in \mathbf{N}$成立，则可推出(2.2)对$n+1$也成立．事实上，据定理6-2-3，

$$\begin{aligned} R_f^{W_{n+1}}(x) + R_f^{W_n \cap G_{n+1}}(x) &\le R_f^{W_n}(x) + R_f^{G_{n+1}}(x) \\ &\le R_f^{A_n}(x) + (1 - 2^{-n})\,\varepsilon + R_f^{A_{n+1}}(x) + 2^{-n-1}\,\varepsilon\,, \end{aligned}$$

其中，$A_n \subset G_n \subset W_n$且$A_n \subset A_{n+1} \subset G_{n+1}$，所以$R_f^{A_n}(x) \le R_f^{W_n \cap G_{n+1}}(x)$，从而

$$R_f^{W_{n+1}}(x) \le R_f^{A_{n+1}}(x) + (1 - 2^{-n-1})\,\varepsilon\,.$$

这说明(2.2)成立．令$g := \sup_n R_f^{W_n}$，那么$g \in \mathcal{U}_+$，且在

$$\cup_n W_n = \cup_n G_n \supset A$$

上有$g = f$，于是$R_f^A \le g$；特别，

$$R_f^A(x) \le g(x) \le \sup_n R_f^{A_n}(x) + \varepsilon\,.$$

再由ε的任意性知(2.1)成立．

定理 6-2-5 设$f \in \mathcal{U}_+$, $A \subset X$，$\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是X上一个单调增的正的数值函数列，其中每个g_n在$X \setminus A$取值为0且对每个$x \in A$有$f(x) = \sup_n g_n(x)$．则

$$\sup_n Rg_n = R_f^A\,, \tag{2.3}$$

$$\sup_n \hat{R} g_n = \hat{R}_f^A\,. \tag{2.4}$$

特别，当$\{g_n\}$为$\mathcal{U}_+$中单调增且收敛于f的函数列，$\{A_n\}$为单调增的、X的子集列使得$A = \cup_n A_n$时，有

$$\lim_{n\to\infty} R_{g_n}^{A_n} = R_f^A\,, \quad \lim_{n\to\infty} \hat{R}_{g_n}^{A_n} = \hat{R}_f^A\,.$$

证明 下面只证明(2.3)式，因(2.4)可据定理 6-1-5 由(2.3)推出．为此，取定 X 的一个点 x，我们要证

$$\sup_n Rg_n(x) \geq R_f^A(x) . \tag{2.5}$$

下面假定对每个 $n \in \mathbf{N}$ 满足 $Rg_n(x) < \infty$．（否则，上式显然成立.）

a）先假定 f 在 A 上仅取∞值．这时，如果对每个 $n \in \mathbf{N}$ 满足 $Rg_n(x) = 0$，那么所要结论已成立．事实上，对任意实数 $\varepsilon > 0$，可选取单调增的函数列 $\{u_n\} \subset \mathcal{U}_+$ 使得在 A 上，$u_n \geq g_n$，且

$$u_n(x) < (1 - 2^{-n})\,\varepsilon, \quad n \in \mathbf{N},$$

那么 $u := \sup_n u_n \in \mathcal{U}_+$，在 A 上 $f \leq u$，而且 $u(x) \leq \varepsilon$．从而，

$$R_f^A(x) = 0 \leq \sup_n Rg_n(x).$$

因此，可假定存在某个 $k \in \mathbf{N}$ 使得

$$0 < Rg_k(x) < \infty.$$

选定一个 $w \in \mathcal{U}_+$ 使得 $w(x) < \infty$ 且在 A 上有 $g_k \leq w$. 任意取实数 $\alpha > 0$. 令

$$B_n := \{\, y \in A \mid g_n(y) > \alpha\, w(y) \,\},\ n \in \mathbf{N}; \qquad B := \cup_n B_n.$$

显然，w 在 B 上仅取有限值而在 $A \setminus B$ 上恒取∞值. 因为 $w(x) < \infty$，

$$R_w^{A \setminus B}(x) \leq \varepsilon\, w(x)$$

对任意实数 ε 成立，故 $R_w^{A \setminus B}(x) = 0$. 从而

$$Rg_k(x) \leq R_w^A(x) \leq R_w^B(x) + R_w^{A \setminus B}(x) = R_w^B(x).$$

由上一引理得

$$\sup_n Rg_n(x) \geq \alpha\ \sup_n R_w^{B_n}(x) = \alpha\ R_w^B(x) \geq \alpha\ Rg_k(x).$$

由 α 的任意性知 $\sup_n Rg_n(x) = \infty \geq R_f^A(x)$. 即(2.5)成立．

b）下证(2.5)对一般的 f 成立. 设 $0 < \alpha < 1$，令

$$E_n := \{y \in A \mid f(y) < g_n(y)\} \cup \{\, y \in A \mid f(y) = 0\}, \quad E := \cup_n E_n .$$

由上一引理

$$\sup_n Rg_n(x) \geq \alpha \sup_n R_f^{E_n}(x) = \alpha\ R_f^E\ (x).$$

从而

$$\sup_n Rg_n(x) \geq R_f^E(x).$$

因为f在$A\setminus E$只取∞值，故由a）的证明知$R_f^{A\setminus E}(x)=0$或∞. 当$R_f^{A\setminus E}(x)=0$时，

$$R_f^A(x) \leq R_f^E(x) + R_f^{A\setminus E}(x) = R_f^E(x) \leq \sup_n Rg_n(x);$$

当$R_f^{A\setminus E}(x)=\infty$时，由a）的结论得

$$\sup_n Rg_n(x) \geq R_f^{A\setminus E}(x) = \infty \geq R_f^A(x).$$

总之，(2.5)成立．其余结论是(2.3), (2.4)的直接推论．□

下面考虑关于正上调和函数的扫除．

定理 6-2-6 设u是调和空间X上的一个正上调和函数, E是X的子集. 则R_u^E在$X\setminus\overline{E}$上是调和的，在$X\setminus\overline{E}$及E的细内部有$R_u^E=\hat{R}_u^E$．

证明 设$\mathscr{W}$是X上这样的超调和函数g全体：g在E上优于u, 即$g\geq u$. 对任何一个其闭包包含于$X\setminus\overline{E}$的相对紧开集V, 截断函数$g_V\geq u_V\geq 0$(参看定理5-1-4），从而g_V仍在$\mathscr{W}$中，故$\mathscr{W}$是$X\setminus\overline{A}$上的一个Perron集, 据定理5-1-6知, $R_u^E=\inf\mathscr{W}$在$X\setminus\overline{E}$调和．

因为在E上$u=R_u^E$且u在E的细内部为细连续，由定理6-1-5知第二个结论也成立．□

推论 6-2-7 如果p是X上的一个位势，则

$$\wedge\{R_p^{X\setminus K} \mid K \text{为} X \text{的紧子集}\}=0;$$

若p在它取0值的点都连续，令$G:=\{x\in X \mid p(x)>0\}$， 则

$$\wedge\{R_p^{X\setminus K} \mid K \text{为} G \text{的紧子集}\}=0.$$

证明 第一个结论由定理直接推出．又由定理4-5-2可得出，p在G上的限制也是位势．于是由第一个结论推出第二个

结论. □

定理 6-2-8 设 u 是调和空间 X 上的一个正上调和函数且 u 在 X 的子集 E 上取的值都是有限的. 又设 K 是 $X\setminus E$ 的 G_δ 型子集. 那么对任何严格正的实数 ε, 存在一个细开集 G 包含了 E 并在 K 上满足

$$R_u^G \le R_u^E + \varepsilon \ .$$

证明 先考虑 $\overline{E} \cap K = \varnothing$ 的情况，由引理 6-2-1 及定理 6-2-6 立即得到结论. 对一般的情况，因 K 为 G_δ 型集，可找到 E 的一个单调增加的子集列 $\{E_n\}$ 使得 E 就是这些子集的并, 且每个 E_n 的闭包与 K 不相交 . 于是可找到一个单调增加细开集列 $\{G_n\}$ 使得每个 $E_n \subset G_n$ 且在 K 上有

$$R_u^{G_n} \le \hat{R}_u^{E_n} + (1-2^{-n})\varepsilon \ .$$

那么 $G := \cup_n G_n$ 满足定理的要求 . □

定理 6-2-9 (Boboc-Constantinescu-Cornea 定理） 设 u 是调和空间 X 上的一个正上调和函数且 $E \subset X$. 那么, 对任意 G_δ 型紧子集 $K \subset X\setminus E$ 和任意严格正的实数 ε, 存在 X 上的一个正上调和函数 g, 它在 E 上取 u 的值且在 K 上小于 $\hat{R}_u^E + \varepsilon$. 特别, 在 K 上有

$$R_u^E = \hat{R}_u^E \quad .$$

注 由此, 当 X 的每个单点集都是 G_δ 型集时, 上式在 $X\setminus E$ 上处处成立 . 特当 X 具有可数基时, 由推论 5-4-2 及定理 6-2-5, 可加强为, 对任何正超调和函数 u, 上式在 $X\setminus E$ 上处处成立 .

证明 将 K 表示成一个单调减的开集列 $\{V_n\}$ 之交. 令 $E_n := X\setminus V_n$. 据定理 6-2-6, $\hat{R}_u^{E_n}$ 在 K 上有限连续, 故存在一个由严格正的实数构成的列 $\{a_n\}$, 使得对每个 $n \in \mathbf{N}$, 在 K 上都成立着

$$a_n \hat{R}_u^{E_n} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \ .$$

另一方面，据上一定理，存在包含集$\{x\in E\mid u(x)<\infty\}$的细开集$G$使得在$K$上有

$$R_u^G\le \hat{R}_u^E+\varepsilon/2 .$$

那么

$$g:=\inf\{u,\ \ R_u^G+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\hat{R}_u^{E_n}\}$$

即为所求. □

下面两个命题是经典位势论中相应结论的直接推广

引理 6-2-10 若V是调和空间X上的一个 MP 集，则对于X上任意的正超调和函数u，在V上成立着

$$R_u^{X\setminus V}=\overline{H}_u^V .$$

证明 设$v\in\overline{\mathcal{U}}_u^V$. 定义$X$上的函数$g$使得它在$X\setminus V$上等于$u$, 而在$V$上等于$\inf\{u, v\}$, 则由定理 4-5-2 推出$g\in\mathcal{U}_+$. 因为$g$在$X\setminus V$上优于$u$, 故$R_u^{X\setminus V}\le v$. 由$V$的任意性得出$R_u^{X\setminus V}\le\overline{H}_u^V$. 反向不等式是显然的. □

定理 6-2-11 设X是 **P** 调和空间，那么X上任意一个正上调和函数u在X的任意紧集K上的扫除是一个位势.

证明 利用定理 6-2-6 及上一引理推出，$\hat{R}_u^K$在K的一个紧邻域之外为某个位势p所控制，故为位势 (推论 5-4-11). □

定理 6-2-12 设 $E, F\subset X$, f是X上的正上调和函数，令

$$A:=\{x\in E\mid f(x)<\infty\},\quad B=:\{x\in F\mid f(x)<\infty\},$$

$R_f^{A,B}:=\inf\{R_{(V,W;f)}^{V\cup W}\mid V, W$分别是包含$A, B$的细开集$\}$,

其中$(V,W;f):=R_f^V\wedge R_f^W$. 则

$$R_f^{A\cup B}+R_f^{A,B}=R_f^A+R_f^B, \tag{2.6}$$

$$\hat{R}_f^{E\cup F}+\hat{R}_f^{E,F}=\hat{R}_f^E+\hat{R}_f^F, \tag{2.7}$$

若g是X上的正上调和函数使得$g\le f$, 则$\hat{R}_g^{E,F}\le\hat{R}_f^{E,F}$.

证明 先证明第一式．令 V, W 分别为包含 A, B 的细开集．注意到 $(V,W;f)\in\mathcal{U}_+$, 那么，在 $V\cup W$ 上

$$f+(V,W;f)=R_f^V+R_f^W;$$

同时考虑关于等式两边的函数在 $V\cup W$ 上的缩减函数，由定理 6-2-2 得出

$$R_f^{V\cup W}+R_{(V,W;f)}^{V\cup W}=R_f^V+R_f^W,$$

再由定理 6-2-1 推出(2.6).

因为 f 为上调和，它在 X 的一个稠密子集上取有限值，故 $\hat{R}_f^A=\hat{R}_f^E$, $\hat{R}_f^B=\hat{R}_f^F$, 余类似．由定理 6-1-5 知 (2.7) 成立．

下面考虑 X 上的正上调和函数 g 使得 $g\le f$; V 与 W 假设如前．任取实数 $\varepsilon>0$, 令

$$G:=\{x\in X\mid g(x)<\varepsilon f(x)\},\quad V':=V\cup G,\ W':=W\cup G.$$

显然 V', W' 分别是包含 $\{x\in E\mid g(x)<\infty\}$ 与 $\{x\in F\mid g(x)<\infty\}$ 的细开集．于是

$$(V',W';g)\le(V,W;g)+\varepsilon f.$$

$$R_g^{E,F}\le R_{(V',W';g)}^{V'\cup W'}\le R_{(V,W;g)}^{V\cup W\cup G}+\varepsilon f\le R_{(V,W;g)}^{V\cup W}+2\varepsilon f\le R_{(V,W;f)}^{V\cup W}+2\varepsilon f.$$

因为 V, W 是任意的，故

$$\hat{R}_g^{E,F}\le\hat{R}_f^{E,F}+2\varepsilon f.$$

因为 f 上调和，在 X 的一个稠密子集上取有限值，而 $\varepsilon>0$ 可任意小，故本定理的最后的结论成立．□

§6.3 广义容量与拟容量

本世纪 50 年代由 Choquet G 提出的容量理论发展并包括了经典位势论中的 Newton 容量及 Green 容量等重要内容，并因

Choquet 证明了容量的凸性及在相当一般的条件下，K-解析集的可定容性而获得广泛应用．Choquet 容量是定义在一个集的幂集上，取值于 $R_+ := [0, \infty)$ 的、满足三个容量条件的映射．把值域 R_+ 改为由满足某种条件的正函数构成的凸锥，并把所谓容量三条件作适当修改，就得到了形形式式的广义容量．为了便于与调和空间上的扫除联系，我们只考虑如下情形，即作为值域的函数凸锥就是调和空间 X 上的超调和函数全体 $\mathcal{U}$ 的正子锥 $\mathcal{U}_+$ 或一个与 $\mathcal{U}_+$ 密切关联的正函数凸锥 $\mathcal{W}_+$．若未加说明，下面谈到的容量皆指这种广义容量．

1. 容量与拟容量

定义 设 Y 是一个局部紧的 Hausdorff 空间，映射 $\gamma: 2^Y \to \mathcal{U}_+$ 若满足下面条件(c1),(c2)，则称为是 Y 上的一个**拟容量**；若 γ 满足(c1),(c2)′，则称为**弱拟容量**：

(c1) 对任意 A、B，若 $A \subset B \subset Y$，则 $\gamma(A) \le \gamma(B)$;

(c2) 对任意一个单调增的、Y 的子集列 $\{A_n\}$ 有

$$\lim_n \gamma(A_n) = \gamma(\cup_n A_n) \tag{3.1}$$

(c2)′ (3.1) 仅对任意的单调增的、Y 的相对紧子集列 $\{A_n\}$ 成立．

若□为拟容量且满足下面(c3)，则称之为**容量**:

(c3) 对任意单调减的、Y 的紧集列 $\{K_n\}$ 有

$$\lim_n \gamma(K_n) = \gamma(\cap_n K_n).$$

定义 从 2^Y 到一个由正函数构成的凸锥的映射 γ 若满足:

(c4) 对任意 $A, B \subset Y$ 有

$$\gamma(A \cup B) + \gamma(A \cap B) \le \gamma(A) + \gamma(B),$$

则称 γ **是凸的**、或 γ **满足凸性**．

γ若对 Y 的任何子集 A 满足

(c5) $\gamma(A) = \hat{}\inf\{\gamma(W) \mid W$ 是 A 的开邻域$\}$,

则称 γ是**右连续的**;

若(c5)仅对 Y 中的紧集 A 成立, 则称 γ是**紧右连续的**.

定义 设 γ是 Y 上的容量、拟容量或弱拟容量. Y 的一个子集 A 称为关于 γ **可定容**, 指的是下面 (c6) 条件成立:

(c6) $\gamma(A) = \sup\{\gamma(K) \mid K$ 为 A 的紧子集$\}$.

定义映射$\gamma^*: 2^Y \to \mathcal{U}_+$ 如下

(c7) $\gamma^*(A) = \hat{}\inf\{\gamma(W) \mid W$ 是 A 的开邻域$\}$.

称γ^*为 γ导出的**外容量**.

若对 Y 的任意紧子集 K 有$\gamma^*(K) = \gamma(K)$, 则称 γ是**正则的**.

显然, 若上一定义中的映射 γ 若为容量, 则 γ是紧右连续的等价于γ是正则的.

注 若上述γ的值域改成一个满足下面条件的、由 X 上的正函数构成的凸锥 $\mathcal{W}_+$:

(1)$\{u \mid$ 存在$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_+$ 使得 $u = \inf\mathcal{V}\} \subset \mathcal{W}_+$;

(2)**上定向集公理**: 关于自然次序, $\mathcal{W}_+$ 中任何非空上定向子集$\mathcal{V}$ 的上确界函数 $\sup\mathcal{V}$ 必在 $\mathcal{W}_+$ 中;

(3)**下定向集公理**: 关于自然次序, $\mathcal{W}_+$ 中任何非空下定向子集子集$\mathcal{V}$ 的下确界函数 $\inf\mathcal{V} \in \mathcal{W}_+$.

则上面所述各种定义仍然有效, 只是条件(c3),(c5),(c7)中的下半连续化的符号必须去掉. 今后若考虑映射取值于 $\mathcal{W}_+$ 时都自动按此处理. 不过, 若未加声明, 我们考虑的都是从 2^Y 到 $\mathcal{U}_+$的映射.

定理 6-3-1 若 $\gamma: 2^Y \to \mathcal{U}_+$ 是凸的拟容量, 则 γ导出的外容量 γ^* 是凸的容量.

证明 (1)先证 γ^* 是一个拟容量.

设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基, 它的成员都是相对紧的可解集. 对

任意 $A \subset Y$，易验证

$$g := \inf\{\ \gamma(W) \mid W \text{ 是 } A \text{ 的开邻域}\}$$

是一个 $\mathscr{B}$-近乎超调和函数，据定理 6-1-5 知，$\gamma^*(A) = \hat{g} \in \mathscr{U}_+$. 显然 γ^* 满足单调性条件(c1). 为验证条件(c2)，现设 Y 的子集列 $\{A_n\}$是单调增加的. 记 $A_0 := \cup_n A_n$. 那么

$$\lim_n(\inf\{\ \gamma(W_n) \mid W_n \text{ 是 } A_n \text{ 的开邻域}\})$$
$$= \inf\{\ \gamma(W_0) \mid W_0 \text{ 是 } A_0 \text{ 的开邻域}\}$$

下面验证之．为方便起见，把上式简记为

$$\lim_n(\inf \gamma(W_n)) = \inf \gamma(W_0) \tag{3.1}$$

对任意$x \in X$及X的子集B，用 $\gamma(B)(x)$简记$(\ \gamma(B))(x)$．据条件(c1)显然有

$$\lim_n (\ \inf \gamma(W_n)(x)) \le \inf \gamma(W_0)(x) \quad .$$

为证反向不等式，不妨设上式右边取有限值．任意取定一个实数 $\varepsilon > 0$．因 γ 是凸的，对每个 $n \in \mathbf{N}$，我们可采用归纳法来选取 A_n 的一个开邻域 G_n，使得集列$\{\ G_n\}$是单调增加的且

$$\gamma(G_n)(x) \le \inf\ \ \gamma(W_n)(x) + \sum_{i=1}^{n}\ \ 2^{-i}\varepsilon\ .$$

令 $G := \cup_n G_n$，则 $G \supset A_0$，且

$$\begin{aligned}\inf \gamma(W_0)(x) &\le \gamma(G)(x)\\ &= \lim_n [\gamma(G_n)(x)]\\ &\le \lim_n [(\inf \gamma(W_n))(x)] + \varepsilon .\end{aligned}$$

因ε与 x 是任意的，得(3.1)式．

因 $\mathscr{U}$满足据上定向公理，故 $\lim_n (\hat{}\inf \gamma(W_n)) \in \mathscr{U}_+$．又因为 $\inf \gamma(W_n)$是 $\mathscr{B}$-近乎超调和函数且 X 关于细拓扑是 Baire 空间，由(3.1)式推出

$$\lim_n(\hat{}\inf \gamma(W_n)) = \hat{}\inf \gamma(W_0)$$

即证得 $\lim_n \gamma^*(A_n) = \gamma^*(A_0)$．即$\gamma^*$ 满足条件(c2)．

(2)再证γ^*满足条件(c3)，从而γ^*为容量．为此考虑单调减

的、Y的紧子集列$\{K_n\}$，令 $K := \cap_n K_n$，由单调性知

$$\lim_n \gamma^*(K_n) \geq \gamma^*(K),$$

从而

$$^\wedge\lim_n \gamma^*(K_n) \geq \gamma^*(K).$$

另一方面，对K的任一开邻域V，存在$m \in \mathbf{N}$使得$V \supset K_m$，从而

$$\lim_n \gamma^*(K_n) \leq \gamma(V),$$

由

$$\lim_n \gamma^*(K_n) \leq \inf\{\ \gamma(V) \mid K \subset V, V \text{为开集}\}$$

推出

$$^\wedge\lim_n \gamma^*(K_n) \leq \gamma^*(K),$$

即 (c3) 成立 .

最后，由 γ 的凸性及外容量的定义可推出 γ^* 的凸性 . □

推论 6-3-2 若 γ 是紧右连续的拟容量，则 γ是一个容量 .

证明 因 γ 是拟容量，故满足条件(c1)、(c2)．因 γ 是紧右连续的，可以用 γ 代替 γ^* 重复上一定理证明的第(2)步而证得 γ 满足(c3)．□

定义 设Y'是一个拓扑空间，$F \subset Y'$．如果存在可数个紧集$\{K_{ij} \mid i, j \in \mathbf{N}\}$ 使得 $F = \cap_i \cup_j K_{ij}$，就称 F 是一个 $\mathbf{K}_{\sigma\delta}$ 型集 .

局部紧 Hausdorff 空间 Y的一个子集 A 称为 **K-解析集**，如果存在一个局部紧空间 Y' 的一个$\mathrm{K}_{\sigma\delta}$ 型子集 F及一个从 Y' 到Y的连续映射 ψ，使得 $A = \psi(Y')$.

例 在一个具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间中，每个 Borel 集都是 K-解析集 .

引理 6-3-3 设Y', Y都是局部紧 Hausdorff 空间，γ是 Y上一个拟容量 . 若f 是从Y' 到Y的一个映射，则映射$\Gamma: B \mapsto \gamma(f(B))$是 Y' 上的一个拟容量．若f是连续的，γ 是 Y上一个弱拟容量，则映射 Γ 是 Y' 上的一个弱拟容量；并且，Y' 的子集 B 关于Γ

可定容蕴涵着 $f(B)$ 关于 γ 可定容 .

证明 设 γ 是 Y 上一个拟容量. 由 γ 满足(c1)条件直接推出 Γ 也满足条件(c1). 若 Y' 的子集列 $\{B_n\}$ 单调增加, 则由于 γ 满足条件(c2), 有

$$\begin{aligned}\lim_n \Gamma(B_n) &= \lim_n \gamma(f(B_n)) \\ &= \gamma(\cup_n f(B_n)) = \gamma(f(\cup_n B_n)) \\ &= \Gamma(\cup_n B_n),\end{aligned}$$

即 Γ 满足(c2), 从而 Γ 为 Y' 上的拟容量 .

设 f 连续, γ 是 Y 上的弱拟容量. 注意到紧集连续象仍为紧集, 可类似证明 Γ 为弱拟容量. 当 B 关于 Γ 可定容时, 则

$$\begin{aligned}\gamma(f(B)) = \Gamma(B) &= \sup_K \Gamma(K) \\ &= \sup_K \gamma(f(K)) \le \sup_C \gamma(C) \\ &\le \gamma(f(B)),\end{aligned}$$

其中 K 取遍 B 的所有紧子集, C 取遍 $f(B)$ 的所有紧子集. 因此 $f(B)$ 关于 γ 可定容 . □

注 尽管拟容量本身与拓扑无关, 但为了与容量、弱拟容量统一处理, 所以定理假定 Y 是拓扑空间 .

定理 6-3-4 设 Γ: $2^{Y'} \to \mathcal{U}_+$ 是局部紧 Hausdorff 空间 Y' 上的紧右连续的弱拟容量, 则每个 $K_{\sigma\delta}$ 型集 F 是关于 Γ 可定容的.

证明 设 $F := \cap_i \cup_j K_{ij}$,不妨设对每个取定的 i, $\{K_{ij}\}_{j\in\mathbf{N}}$ 是单调增的紧集列. 我们要证, 对任意 $z \in Y'$ 有下式成立:

$$\Gamma(F)(z) = \sup\{\Gamma(C)(z) \mid C \text{ 是 } F \text{ 的紧子集}\} \tag{3.2}$$

若 $\Gamma(F)(z) = 0$, 上式自然成立. 因此, 下面取定一个满足 $\Gamma(F)(z) > 0$ 的 $z \in Y'$. 对任意实数 $\alpha: 0 < \alpha < \Gamma(F)(z)$, 可用归纳法选取一个自然数列 $\{j_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 使得相应的集合列 $\{K_{i\,j_i}\}_{i\in\mathbf{N}}$ 满足: 对任意 $m \in \mathbf{N}$ 有

$$\Gamma(F \cap (\textstyle\bigcap_{i=1}^m K_{i\,j_i}))(z) > \alpha . \tag{3.3}$$

事实上，当 $i=1$ 时有 $F\subset(\cup_j K_{ij})$，因 $\{K_{1j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ 单调增，由条件(c2)有

$$\Gamma(F)=\Gamma(\cup_j(F\cap K_{1j}))=\lim_j \Gamma(F\cap K_{1j})$$

故存在 j_1 使得 $\Gamma(F\cap K_{1j_1})(z)>\alpha$．现假定已对所有 $i<m$ 选好 $\{j_i\}: j_1<j_2<\cdots<j_{m-1}$，使得

$$\Gamma(F\cap(\bigcap_{i=1}^{m-1} K_{i j_i}))(z)>\alpha. \tag{3.4}$$

因为 $\{F\cap K_{mj}\cap(\bigcap_{i=1}^{m-1} K_{i j_i})\}_{j\in\mathbf{N}}$ 是单调增的相对紧子集列，其并集为 $F\cap(\bigcap_{i=1}^{m-1} K_{i j_i})$，由条件 (c2)′ 及(3.4)式知存在 j_m 使得 $j_m>j_{m-1}$ 且(3.3)式成立．

记 $C:=\cap_i K_{i j_i}$，显然 $C\subset F$．因 Y' 是 Hausdorff 空间，所以 C 为紧集．类似定理 6-3-1 后半段的证明知，对 C 的任一开邻域 G，必存在正整数 m 使得 $\bigcap_{i=1}^{m} K_{i j_i}\subset G$．因 Γ 是紧右连续的，由(3.3)式得

$$\Gamma(C)(z)=\inf_G \Gamma(G)(z)\geq \inf_m(\Gamma(\bigcap_{i=1}^{m} K_{i j_i}))(z)$$

$$\geq \inf_m(\Gamma(F\cap(\bigcap_{i=1}^{m} K_{i j_i}))(z)\geq\alpha.$$

因为 α 是任意的，所以(3.2)成立．□

定理 6-3-5 设 Y 是局部紧 Hausdorff 空间，γ 是 Y 上的一个紧右连续的弱拟容量，则 Y 的每个 K-解析子集是可定容的．

证明 设 $A\subset Y$ 是 K-解析集，设 Y' 是局部紧 Hausdorff 空间，F 为 Y' 中 $K_{\sigma\delta}$ 型集，$f: Y'\to Y$ 是连续映射使得 $f(F)=A$．

由引理 6-3-3，从 $2^{Y'}$ 到 $\mathscr{U}_+$ 的映射 $\Gamma: B\mapsto\gamma(f(B))$ 是 Y' 上的弱拟容量．下证 Γ 是紧右连续的．设 C 为 Y' 的紧子集，V 是 $f(C)$ 的任一开邻域．因映射 f 连续，故 $f(C)$ 是 Y 的紧子集，$f^{-1}(V)$ 是 C 在 Y' 中的开邻域．由 γ 的紧右连续性及 Γ 的定义知

$$\Gamma(C)=\gamma(f(C))=\inf_V \gamma(V)$$

$$= \inf_V \ \gamma(f^{-1}(V))$$
$$\geq \inf_G \ \Gamma(G) \geq \Gamma(C)$$

其中下确界分别取遍$f(C)$的所有开邻域V及C的所有开邻域G.于是$\Gamma(C) = \inf_G \ \Gamma(G)$, 即$\Gamma$是紧右连续的 .

据定理 6-3-4 知, F关于Γ 可定容. 由于f连续; 由引理 6-3-3 知$A = f(F)$关于γ 可定容. □

注 (1)一个(弱)拟容量若不满足紧右连续的条件,则 K-解析集未必可定容 . 在下一小节我们将看到这样的例子.

(2)在上段的各定理中, 用更为一般的函数锥, 例如 $\mathscr{W}_+$代替$\mathscr{U}_+$ 来考虑(弱)拟容量, 仍可得到类似的结果.

将定理 6-3-4 的证明过程略作修改, 可得下面关于容量的定理, 请读者练习写出证明或参见文献[10] .

定理 6-3-6 在局部紧 Hausdorff 空间, 任一 $K_{\sigma\delta}$ 型集关于任意容量是可定容的; 任一 K-解析集是可定容的. □

推论 6-3-7 一个局部紧 Hausdorff 空间若具有可数基, 则每一个 Borel 集可定容.

证明 因为在这样的空间中, 每一个 Borel 集都是 K-解析集, 所以可由定理直接推得. □

2. 扫除定义的容量

以下谈及的连续函数皆是连续的实值函数.

定理 6-3-8 设$(X, \mathscr{U})$为调和空间, $u \in \mathscr{U}_+$. 那么

(1) 从 2^X到 $\mathscr{W}_+$的映射ϕ_1: $E \mapsto R_u^E$ 与从 2^X 到 $\mathscr{U}_+$的映射ϕ: $E \mapsto \hat{R}_u^E$ 都是 X 上的凸拟容量 .

(2) 若 u 在 X 上连续且对 X 的任一紧子集 K, 都存在一个 $w \in \mathscr{U}_+$ 使得 $w < \infty$ 且在 K 的某个邻域 U 上有 $w > 0$ 成立, 则 ϕ_1

和 ϕ 都是 X 上的正则凸容量. 因此, 对任何 K-解析集 A 有:

$$\phi(A)=\sup\{\phi(K)\mid K\text{ 为 }A\text{ 的紧子集}\},\text{ 即}$$

$$\hat{R}_u^A=\sup\{\hat{R}_u^K\mid K\text{ 为 }A\text{ 的紧子集}\}. \tag{3.5}$$

$$\phi_1(A)=\sup\{\phi_1(K)\mid K\text{ 为 }A\text{ 的紧子集}\},\text{ 即}$$

$$R_u^A=\sup\{R_u^K\mid K\text{ 为 }A\text{ 的紧子集}\}. \tag{3.6}$$

(3)当考虑 X 上的细拓扑时, 如果 u 仅取有限值, 则 ϕ_1 和 ϕ 都是 X 上的正则凸容量 .

注　例如在 **S** 调和空间, 上述(2)中的 w 存在 .

证明　由缩减函数及扫除的定义知, ϕ_1, ϕ 都满足条件(c1); 由定理 6-2-3 及 6-2-5 知 ϕ_1, ϕ 是 X 上的凸的拟容量. 即(1)成立.

再由定理 6-2-1 之 b)知, ϕ_1, ϕ 是紧右连续的, 据推论 6-3-2 知, ϕ_1 和 ϕ 都是 X 上的正则凸容量 . 由定理 6-3-5 及其附注推出(3.5),(3.6)成立. 即(2)成立.

由引理 6-2-1 之 a)知, 关于细拓扑, ϕ_1, ϕ 是右连续的, 当然是紧右连续的 . 其余类似(2)的证明, 可推出(3). □

下面考察 **S** 调和空间与 **P** 调和空间上的情况.

定理 6-3-9　设$(X,\mathcal{U})$是一个 **S** 调和空间, $u\in\mathcal{U}_+$ 是连续的实函数, 则扫除与缩减

$$\phi: E\mapsto \hat{R}_u^E;\quad \phi_1: E\mapsto R_u^E$$

分别定义的、X 上的凸拟容量都是正则容量 .

证明　由定理 6-3-8 之(1)知 ϕ, ϕ_1 是凸拟容量. 下证其正则性, 即对 X 的任一紧子集 K 成立

$$R_u^K=\inf\{R_u^G\mid G\text{ 是的开邻域}\}, \tag{3.7}$$

$$\hat{R}_u^K=\wedge\,\hat{R}_u^G:=\hat{\inf}\{\hat{R}_u^G\mid G\text{ 是的开邻域}\}. \tag{3.7$'$}$$

因$(X,\mathcal{U})$是 **S** 调和空间, 对 X 的任一紧子集 K, 必有一个连续正上调和函数 w 使得 w 在 K 的一个邻域上处处取严格正值(见§5.4). 据引理 6-2-1 之 b)有(3.7)式成立, 从而(3.7)$'$也成立.

再由推论 6-3-2 知结论成立. □

定理 6-3-10 设$(X, \mathscr{U})$是 S 调和空间, s 是 X 上任意的正上调和函数. 若 s 可以表示成一族连续的正上调和函数之和, 则映射 ϕ: $E \mapsto \hat{R}_s^E$ 是 X 上的正则凸容量.

证明 设 $s := \sum_{i\in I} s_i$, 其中每个 s_i 都是连续的正上调和函数. 对任意取定的紧集 K, 由定理 6-3-9,

$$\hat{R}_{s_i}^K = \wedge \hat{R}_{s_i}^U := \wedge\inf\{ \hat{R}_{s_i}^U \mid U \text{是包含} K \text{的开集}\}.$$

设 J 是 I 的有限子集, 那么

$$\hat{R}_s^K \le \wedge \hat{R}_s^U \le \sum_{i\in J} \wedge \hat{R}_{s_i}^U + \sum_{i\in I\setminus J} s_i$$
$$= \sum_{i\in J} \hat{R}_{s_i}^K + \sum_{i\in I\setminus J} s_i \le \hat{R}_s^K + \sum_{i\in I\setminus J} s_i$$

因 J 是任意的且上调和函数 s 在 X 上几乎处处有限, 当 s 在 $x\in X$ 取有限值时, 通过适当选取 J 可让 $\sum_{i\in I\setminus J} s_i(x)$任意小. 从而推出 $\hat{R}_s^K = \wedge \hat{R}_s^U$. 于是, ϕ 是紧右连续的、凸的拟容量. 再由推论 6-3-2 知, ϕ 是容量; 凸性与正则性是显然的. □

定理 6-3-11 设$(X, \mathscr{U})$是 P 调和空间, p 是 X 上的一个位势, 则映射φ: $E \mapsto \hat{R}_p^E$ 是 X 上的正则的凸容量的充要条件是: 在 $\mathscr{U}$ 的特殊序"$\prec$"下, p 是位势族

$$W_p := \{ q \mid q \prec p,\ q \text{为} X \text{上的连续实值位势}\}$$

的最小上属 .

证明 充分性 . 因 p 是 W_p 族在特殊序"$\prec$"下的最小上属, 可以证明(cf.[10]), p 是一族实值连续位势$\{ p_i \mid i\in I \}$之和, 即 $p = \sum_i p_i$. 因$(X, \mathscr{U})$是 P 调和空间, 从而是 S 调和空间. 由上一定理知, φ: $E \mapsto \hat{R}_p^E$ 是 X 上的正则的凸容量.

必要性可由 Constantinescu-Cornea 定理([10]Th.8.3.1)推出.□

注 对于非 S-调和空间的调和空间$(X, \mathscr{U})$, 上述用扫除或缩

减定义的拟容量未必为容量，也未必正则．

例　设 $X=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$，在 X 中考虑 $\boldsymbol{R}^3$ 的诱导拓扑，则 X 是局部紧的 Hausdorff 空间．设 f 为 $\boldsymbol{R}$ 上的函数：

$$f(z)=\begin{cases}-\ln z, & 0<z\le e^{-1}\\ 1, & \text{其余}\end{cases}$$

构造 X 上的一个调和簇 $\mathscr{H}$ 如下：对 X 的任意开子集 G，$\mathscr{H}(G)$ 是 G 上满足下述条件的连续实值函数 h 全体：h 使得

$$D:=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid \text{存在 } z\le 0,\text{ 使得}(x,y,z)\in G\}\text{及}$$

$$D':=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid \text{存在 } z>0,\text{ 使得}(x,y,z)\in G\}$$

上的函数

$$(x,y)\mapsto f(z)\,h(x,y,z)$$

是 $\boldsymbol{R}^2$ 上 Laplace 方程的一个解．可以验证 $(X,\mathscr{H})$ 是一个 Bauer 调和空间(c.f.[10])，这个空间上任意正上调和函数 s 具有如下形式

$$s(x,y,z)=\begin{cases}0, & \text{当}(x,y,z)\in X, z\le 0\\ \dfrac{a}{f(z)}, & \text{当}(x,y,z)\in X, z>0\end{cases}$$

其中 $a\ge 0$ 为任意实常数．可见，X 上的每个正上调和函数都是调和函数．注意到 $(0,0,0)\in X$，但是不存在一个正上调和函数 s，满足 $s(0,0,0)>0$，所以 $(X,\mathscr{H})$ 不是 **S** 调和空间．

我们看到，对 X 上的任一正上调和函数 $s\ne 0$，拟容量

$$\phi:\ A\mapsto \hat{R}_s^A \quad\text{与}\quad \phi_1: E\mapsto R_u^E$$

都不是正则的．事实上，对于紧集 $K:=\{(0,0,0)\}$，由缩减函数的定义及 s 的表达式知 $R_s^K=0$，从而 $\hat{R}_s^K=R_s^K=0$．另一方面，对 K 的任意开邻域 G，都有 $\hat{R}_s^G=R_s^G=s\ne 0$．故

$$\hat{R}_s^K\ne \wedge\{\hat{R}_s^G \mid G\text{ 为 }K\text{ 的开邻域}\},$$

即 ϕ 不正则.

这例子也说明了，ϕ 与 ϕ_1 不是容量．事实上，可取 X 的一列

单调减小的、相对紧的开集$\{G_n\}$使得

$$G_{n+1}\subset\overline{G_n}\subset G_n,\ n\in\mathbf{N};\quad K:=\{(0,0,0)\}=\cap_n G_n.$$

据上段所述，$\phi(\overline{G_n})=\phi_1(\overline{G_n})=s\neq 0$，$\phi(K)=\phi_1(K)=0$. 即$\phi$与$\phi_1$不满足(c3). □

关于容量正则性的概念是高琪仁引入的([19]、[17])，拟容量的概念是作者([50],[60])引入的. 本节上述定理是高或作者从不同角度发展 Constantinescu-Cornea 等人的广义容量理论的结果.

3. 关于 Choquet 容量的附注

本节此前所述的容量都是广义容量，当我们考虑的正超调和函数全体构成的凸锥 $\mathcal{U}_+$ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 时，即每一个正超调和函数都是正的常值函数时，若从 2^X 到 $\boldsymbol{R}_+$的映射Γ同时满足条件(c1)、(c2)和(c3)，则Γ就是 Choquet 原来意义下的容量，只是(c3)中的下半连续正则化不再必要而已．我们知道（可参看第十章），经典的 Newton 容量、Green 容量及略加改造的对数容量都是 Choquet 容量. 下面将要证明，若对X的做某些限制，并让A对应于$\phi_1(A)$关于一个测度的上积分，得到的映射是一个右连续的、正则的 Choquet 容量．

定理 6-3-12 (Bliedtner J-Hansen W)　设X是一个具有可数基的 **P** 调和空间，A、E是X的一个子集，u是X上的、有限连续的正超调和函数且关于X上的一个测度 μ可积，那么

a) 若A是 Borel 集，则

$$\int R_u^A\,\mathrm{d}\mu=\inf\{\int R_u^U\,\mathrm{d}\mu\mid U\text{是包含}A\text{的开集}\},\tag{3.8}$$

$$\int R_u^A\,\mathrm{d}\mu=\sup\{\int R_u^K\,\mathrm{d}\mu\mid K\text{为}A\text{的紧子集}\};\tag{3.9}$$

b) 映射 $E\mapsto\int^{\bullet} R_u^E\,\mathrm{d}\mu$ 是X上凸的 Choquet 容量.

证明　a)定义Γ: $2^X\to\boldsymbol{R}_+$ 为

$$\Gamma(E) = \inf\{\int R_u^U \, d\mu \mid U \text{是包含 } E \text{ 的开集}\}. \tag{3.10}$$

我们断言，Γ 是 X 上的一个凸容量. 首先，注意到，对开集 U,

$$\Gamma(U) = \int R_u^U \, d\mu.$$

对紧集 K，因为 X 具可数基，有一列单调减的开集列$\{U_n\}$使得 $\cap_n U_n = K$. 因 X 是 **P** 调和空间，由定理 6-3-9 知，

$$R_u^K = \inf_n R_u^{U_n};$$

利用 Lebesgue 单调收敛定理推出，

$$\Gamma(K) = \int R_u^K \, d\mu.$$

显然 Γ 满足条件(c1). 为证 Γ 满足(c2)，任意取定一个单调增的、X 的子集列$\{E_n\}$，令 $E := \cup_n E_n$. 任取实数$\varepsilon > 0$，由(3.10)，对任意 $n \in \mathbf{N}$，存在开集 V_n 使得 $E_n \subset V_n$ 且

$$\int R_u^{V_n} \, d\mu < \Gamma(E_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

定义 $U_n := V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$，那么类似引理 6-2-4 中(2.2)式的证明过程，可得，

$$\int R_u^{U_n} \, d\mu < \Gamma(E_n) + (1 - 2^{-n})\varepsilon.$$

因此 $U := \cup_n U_n$ 是包含 E 的开集且满足

$$\int R_u^U \, d\mu = \sup_n \int R_u^{U_n} \, d\mu \le \sup_n \Gamma(E_n) + \varepsilon.$$

从而 $\Gamma(E) = \sup_n \Gamma(E_n)$. 即 (c2)成立. 结合定义式(3.10)，得出 Γ 是右连续拟容量.

再证Γ具有凸性. 为此，考虑 X 的任意子集 E 与 F，设 V、W 是分别包含 E、F 的开集，那么

$$E \cap F \subset V \cap W, \quad E \cup F \subset V \cup W.$$

因为注意到 ϕ_1 具有凸性（定理 6-3-8 或 6-2-3）,即

$$R_u^{V \cup W} + R_u^{V \cap W} \le R_u^V + R_u^W,$$

推出

$$\int R_u^{V \cup W} \, d\mu + \int R_u^{V \cap W} \, d\mu \le \int R_u^V \, d\mu + \int R_u^W \, d\mu.$$

故由 Γ 的定义得

$$\Gamma(E\cap F)+\Gamma(E\cup F)\le\Gamma(E)+\Gamma(F).$$

这就说明Γ具有凸性，从而由推论 6-3-2 推出Γ是凸容量. 据定理 6-3-6 及其推论，任何 K 解析集，包括 Borel 集都是可定容的，即

$$\begin{aligned}\Gamma(A)&=\sup\{\,\Gamma(K)\mid K\text{ 为 }A\text{ 的紧子集}\}\\&=\sup\{\textstyle\int R_u^K\,\mathrm{d}\mu\mid K\text{ 为 }A\text{ 的紧子集}\}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\Gamma(A)&\le\textstyle\int_* R_u^A\,\mathrm{d}\mu\le\int^* R_u^A\,\mathrm{d}\mu\\&\le\inf\{\textstyle\int R_u^U\,\mathrm{d}\mu\mid U\text{ 是包含 }A\text{ 的开集}\}=\Gamma(A).\end{aligned}$$

这说明(3.8)，(3.9)成立 .

b) 由定理 6-3-9 推出. □

§6.4 广义权与广义拟拓扑

经典权函数及在位势论的应用可见诸于 Brelot M、Choquet G 及 Fuglede B 的专著(c.f.[9],[12]). 权的研究是为了推广容量及细拓扑相关联的研究内容. 由上一节我们已看到现代位势论研究把从 2^Y 到一个凸锥的映射定义成广义容量, 因此广义权也作相应的推广.

1. 广义权

设 Ω 是一个集, $\mathcal{F}$ 是由 Ω 上一些正的实值函数组成的凸锥, 它满足上定向公理, 即 $\mathcal{F}$ 的任意上定向子集的最小上属属于 $\mathcal{F}$ (参见定理 5.1.5). 设(Y,τ)是一个 Hausdorff 空间, 在 Y 上还有一个比 τ 细的拓扑τ^f, 称为细拓扑. 凡涉及细拓扑的概念, 均加上细字,

以区别于原来的拓扑τ. Y的一个子集E关于τ的闭包与细闭包分别记作$\overline{E}$与$\widetilde{E}$.

定义 映射 $\mathrm{w}: 2^Y \to \mathscr{F}$若满足下述条件则称为$Y$上的一个广义权映射, 简称广义权.

(1) 单调性, 即对$A \subset B \subset Y$有$\mathrm{w}(A) \le \mathrm{w}(B)$;

(2) 空集 $\varnothing$ 在 w 下的象是Y上恒取0值的函数, 记作o.

一个广义权 w 称为次可加的, 如果对任意$A, B \subset Y$有

$$\mathrm{w}(A \cup B) \le \mathrm{w}(B) + \mathrm{w}(A);$$

w 称为可数次可加的, 如果对Y的任意子集列$\{A_n\}$有

$$\mathrm{w}(\cup_n A_n) \le \sum_n \mathrm{w}(A_n).$$

定义 对Y上的广义权 w, 集合$A \subset Y$称为一个 **w-拟开集**, 如果存在一个实值函数$u \in \mathscr{F}$使得对于任意给定的正数ε, 存在一个开集G满足$A \subset G$且$\mathrm{w}(G \setminus A) \le \varepsilon u$; 若$B \subset Y$的余集$Y \setminus B$是w-拟开集, 则称$B$是一个w-拟闭集. 特别, 当上述函数$u$有界时, 则称$A$为强w-拟开集, 而它的余集为强w-拟闭集.

定义 设Y'是Hausdorff空间, 从Y到Y'的一个映射f称为w-拟连续的, 如果存在一个实值函数$u \in \mathscr{F}$, 使得对任意给定的实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个集$A \subset Y$, 使得$\mathrm{w}(A) \le \varepsilon u$ 且$f|_{Y \setminus A}$是连续的, 即f限制于A的余集上是连续的. 特别当上述u有界时, 称f为强w-拟连续的.

当$Y' = [-\infty, \infty]$时, 若将上面f限制于A的余集上是"连续的"改为"上(或下)半连续", 则称f为拟上(或下)半连续的. 若要求u有界, 同样得到加"强"的概念.

定义 设 w 是Y上的广义权. 若对Y的任意子集E, 都有$\mathrm{w}(\widetilde{E}) = \mathrm{w}(E)$成立, 则称 w 是一个细广义权.

定义 对Y上的广义权 w, 若每一个细开集都是 w-拟开集(相应地, 强 w-拟开集), 则说 w 满足广义 Choquet 性质(相应地,

广义强 Choquet 性质).

将上述$\mathcal{F}$改为由 Y 上所有正的常值函数(包括∞)构成的凸锥,即 $\mathcal{F}\equiv[0,\infty]$, 就得到经典的权的概念.

下面取定 Y 及 Y 上的一个广义权 w, 所有述语都省去 "w-" 这一前缀.

定理 6-4-1 若 A 是 Y 的一个拟开(相应地拟闭)集, 则特征函数 1_A 是拟下(相应地上)半连续函数.

证明 设 A 是拟开集, 于是存在 $u\in\mathcal{F}$ 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset A$ 满足 $\mathrm{w}(G\setminus A)\leq\varepsilon u$. 因为 1_G 是下半连续的且在 $Y\setminus(G\setminus A)$ 上,

$$(1_A)|_{Y\setminus(G\setminus A)}=1_G$$

成立, 故 1_A 为拟下半连续. □

引理 6-4-2 若广义权 w 满足广义 Choquet 性质(相应地, 广义强 Choquet 性质)的充要条件是, 对于任意集合 $E\subset Y$, 存在实值函数(相应地, 有界函数) $u\in\mathcal{F}$, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 都存在开集 G 满足: $Y\setminus\widetilde{E}\subset G$ 且 $\mathrm{w}(G\cap E)\leq\varepsilon u$.

证明 必要性. 对任意集合 $E\subset Y$, 因为 $Y\setminus\widetilde{E}$ 是细开集, 从而为拟开集, 故存在(有界)实函数 $u\in\mathcal{F}$ 使得对任意 $\varepsilon>0$, 有开集 $G\supset Y\setminus\widetilde{E}$ 且 $\mathrm{w}(G\setminus(Y\setminus\widetilde{E}))\leq\varepsilon u$. 又因为 $G\cap E\subset G\setminus(Y\setminus\widetilde{E})$, 故

$$\mathrm{w}(G\cap E)<\varepsilon u.$$

充分性. 设 E 是细开集, 故 $Y\setminus E$ 为细闭集. 据条件假定, 存在(有界)实值函数 $u\in\mathcal{F}$ 使得对任意 $\varepsilon>0$ 有开集 G 满足

$$E\subset G\ \text{且}\ \mathrm{w}(G\cap(Y\setminus E))\leq\varepsilon u,$$

即 $\mathrm{w}(G\setminus E)\leq\varepsilon u$. 这说明 E 是拟开集. □

定理 6-4-3 设 w 是细广义权, Y' 是一个 Hausdorff 空间. 若映射 $f\colon Y\to Y'$ 是拟连续的, 则 f 拟处处细连续(即存在 $A\subset Y$ 使得 f

在 $Y\setminus A$ 细连续且 $\mathrm{w}(A)=0.$).

证明 因 f 是拟连续的, 故存在实函数 $u\in\mathcal{F}$, 使得对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都有 Y 的子集 A_n 满足: $\mathrm{w}(A_n)\le\dfrac{1}{n}u$ 且 $u|_{Y\setminus A_n}$ 连续. 因 w 是细广义权, 故

$$\mathrm{w}(\widetilde{A}_n)=\mathrm{w}(A_n)\le\frac{1}{n}u,$$

记 $A:=\cap_n\widetilde{A}_n$, 则对任意 $x\in\Omega$,

$$\mathrm{w}(A)(x)\le\mathrm{w}(\widetilde{A}_n)(x)\le\frac{1}{n}u(x),$$

因 $u(x)$有限而 n 任意, 知 $\mathrm{w}(A)(x)=0$.

现证 f 在 $Y\setminus A$ 细连续. 设 $z\in Y\setminus A$, 那么存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得 $z\notin\widetilde{A}_m$. 因为 f 在 $Y\setminus\widetilde{A}_m$ 的限制 f_1 是连续的 (关于原来拓扑在 $Y\setminus\widetilde{A}_m$ 的诱导拓扑), 而 $Y\setminus\widetilde{A}_m$ 是细开集, 故 f 在 z 为细连续. 又因 $\mathrm{w}(A)=0$, 故 f 在 Y 拟处处细连续. □

定理 6-4-4 设 w 是细的广义权且满足可数次可加性及广义强 Choquet 性质; 又设 Y' 是具有可数基的 Hausdorff 空间, 则映射 $f:Y\to Y'$ 为强拟连续的充分必要条件是 f 为拟处处细连续.

证明 充分性. 首先, 假定 f 为细连续. 设 $\{G_n'\}$ 是 Y' 的一个基, 于是每一个 $f^{-1}(G_n')$ 是 Y 里的细开集, 从而是强拟开集 (见广义强 Choquet 性质的定义). 由引理 6-4-1, 存在有界函数 $u_n\in\mathcal{F}$ 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G_n\supset f^{-1}(G_n')$ 且

$$\mathrm{w}(G_n\setminus f^{-1}(G_n'))\le 2^{-n}\varepsilon u_n,\quad n\in\mathbf{N}.$$

由 ε 的任意性, 不妨设 $0\le u_n\le 1$. 记

$$A:=\cup_n(G_n\setminus f^{-1}(G_n')),$$

则

$$\mathrm{w}(A)\le\textstyle\sum_n\mathrm{w}(G_n\setminus f^{-1}(G_n'))\le\sum_n 2^{-n}\varepsilon u_n=\varepsilon u,$$

其中

$$u := \sum_n 2^{-n} u_n \in \mathcal{F} \text{ 且 } 0 \le u \le 1.$$

因为$f^{-1}(G_n')\cap(Y\setminus A) = G_n\cap(Y\setminus A)$, 故每个$f^{-1}(G_n')\cap(Y\setminus A)$都是$Y\setminus A$上的相对开集, $n\in\mathbf{N}$, 故$f|_{Y\setminus A}$连续, 从而f是强拟连续的.

再考虑f是拟处处细连续的情形, 这时存在$E\subset Y$使得$\mathrm{w}(E) = 0$且f在$Y\setminus E$细连续, 当然有$f|_{Y\setminus E}$细连续. 由上面证明知, 关于$Y\setminus E$上的相对拓扑, $f|_{Y\setminus E}$是强拟连续的; 因$\mathrm{w}(E) = 0$, 由次可加性, 知f在Y上是强拟连续的.

必要性由上一定理推出. □

注　这个定理也可推广到上(下)半连续的情况去.

2. 细拓扑与拟拓扑

下面利用广义权来研究细拓扑与拟拓扑结构.

定义　Y上一个广义权 w 称为**右连续的**, 如果对任意$A\subset Y$, $\mathrm{w}(A) = \inf_G \mathrm{w}(G)$, 此处$G$取遍$A$的所有开邻域;

w 称为**强右连续的**, 若对任意$A\subset Y$, 存在有界函数$u\in\mathcal{F}$满足: 对任意$\varepsilon>0$存在A的一个开邻域G使得

$$\mathrm{w}(G) \le \mathrm{w}(A) + \varepsilon u.$$

显然, 强右连续蕴涵了右连续, 且当$\mathcal{F}\equiv(0,\infty]$时, 即当 w 是经典权时, 这两个概念等价.

定理 6-4-5　设广义权 w 满足广义 Choquet 性质, 则Y的任意细闭子集是一个F_σ集与一个零 w-数集之并; 若 w 还满足强右连续性, 则任意细 Borel 集是一个 Borel 集与一个零 w-权集之并.

证明　设广义权 w 满足广义 Choquet 性质. 于是细闭集$E\subset Y$是拟闭集, 于是存在实值函数$u\in\mathcal{F}$, 使得对任意正整数n, 存在闭集$F_n\subset E$满足$\mathrm{w}(E\setminus F_n)\le \frac{1}{n}u$. 记$E_0 = E\setminus(\cup_n F_n)$, 则

$$E = \cup_n (F_n \cup E);$$

而且对任意 $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathsf{w}(E_0) \le \mathsf{w}(E \setminus F_n) \le \frac{1}{n} u,$$

由此推出 $\mathsf{w}(E_0) = 0$. 第一个命题得证.

下证第二个命题. 由定义, 细 Borel 集全体是包含所有细闭集的最小 σ 代数. 另一方面, 由一个 Borel 集与一个零 w-权集之并全体 $\mathcal{E}$ 也构成一个 σ 代数. 事实上, 它显然对可数交的运算封闭. 下面考虑余集的情形. 设 B 是 Borel 集, E 是零权集, 即 $\mathsf{w}(E) = 0$. 因 w 为强右连续的, 故存在有界实值函数 $u \in \mathcal{F}$, 使得对任意正整数 n, 存在 E 的开邻域 G_n 满足

$$\mathsf{w}(G_n) \le \mathsf{w}(E) + \frac{1}{n} u = \frac{1}{n} u.$$

令 $G: = \cap_n G_n$, 则 $G \supset E$ 且 $\mathsf{w}(G) = 0$. 又 $B \cup E$ 的余集

$$Y \setminus (B \cup E) = (Y \setminus (B \cup G)) \cup (G \setminus (E \cup B)),$$

其中 $\mathsf{w}(G \setminus (E \cup B)) = 0$. 这说明 $B \cup E$ 的余集仍是 Borel 集与一个零权集之并. 可见 $\mathcal{E}$ 也是一个σ 代数. 由第一个命题知任意细闭集属于 $\mathcal{E}$, 从而 $\mathcal{E}$ 包含了所有细 Borel 集. □

定理 6-4-6 设 w 是次可加的广义权, 则有限个拟开集之并仍为拟开集; 若 w 是可数次可加的, 则可数个强拟开集之并仍是强拟开集.

证明 两个命题的证明类似且第一个较简, 故只证第二个命题. 设$\{A_n\}$是一列强拟开集. 于是, 对每个 $n \in \mathbf{N}$, 存在有界函数 $u_n \in \mathcal{F}$ 满足: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 A_n 的开邻域 G_n 使得

$$\mathsf{w}(G_n \setminus A_n) \le 2^{-n} \varepsilon u_n$$

(不失一般性可设 $0 \le u_n \le 1$),

令 $G := \cup_n G_n$, $A := \cup_n A_n$, 那么 $G \setminus A \subset \cup_n (G_n \setminus A_n)$, 从而

$$\mathsf{w}(G \setminus A) \le \textstyle\sum_n \mathsf{w}(G_n \setminus A_n) \le \varepsilon u,$$

其中 $u := \sum_n 2^{-n} u_n \in \mathcal{F}$ 且有界, 故这可数个开集$\{A_n\}$之并 A 是强拟

开集. □

定理 6-4-7 设 w 是细广义权, 则任意拟开集是一个细开集与一个零权集之并.

证明 设 G 是一个拟开集, G 的细内部记作 G^{0f}, 只需证明 $w(G \setminus G^{0f}) = 0$ 即可. 因为 G 是拟开集, 故特征函数 1_G 是拟下半连续的; 又因为 w 是细的, 不难验证, 1_G 是拟处处细下半连续的, 即存在 $E \subset Y$ 使得 $w(E) = 0$ 且 $1_G|_{G \setminus E}$ 是细下半连续的. 当 $y \in G \setminus G^{0f}$ 时 $1_G(y) = 1$, 此时 $y \notin G^{0f}$, 故 1_G 在 y 点的细下极限值等于 0. 这说明 y 不是 1_G 的细下半连续点, 从而 $x \in E$, 推出 $G \setminus G^{0f} \subset E$, 故 $w(G \setminus G^{0f}) = 0$. □

定理 6-4-8 设 w 是满足广义 Choquet 性质的细广义权, 则对 Y 的任意子集 E, 存在一个实值函数 $u \in \mathcal{F}$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, E 可表示为 $E = E_1 \cup E_2$, 其中 $w(\widetilde{E}_1) \le w(E)$ 而 $w(E_2) \le \varepsilon u$.

证明 由广义 Choquet 性质, E 的细闭包 $\widetilde{E}$ 是拟闭集, 故存在实值函数 $u \in \mathcal{F}$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset \widetilde{E}$ 满足 $w(\widetilde{E} \setminus F) \le \varepsilon u$. 又因为 w 是细的, 故

$$w(F) \le w(\widetilde{E}) = w(E).$$

只须取 $E_1 = E \cap F$, $E_2 = E \setminus F$, 则 $E = E_1 \cup E_2$ 且

$$w(\widetilde{E}_1) \le w(F) \le w(E),$$

$$w(E_2) = w(E \setminus F) \le w(\widetilde{E} \setminus F) \le \varepsilon u. \qquad \square$$

定义 称一个相对紧集 $E \subset Y$ 为**几乎开闭集**, 若 E 的边界 ∂E 是零权集, 即 $w(\partial E) = w(\overline{E} \setminus E^0) = 0$, 其中 E^0 是 E 的内部.

定理 6-4-9 设 w 是次可加、强右连续的, 则每个几乎开闭集既是拟开集又是拟闭集.

证明 首先证明零权集既是拟开集又是拟闭集. 设 $A \subset Y$ 使得 $w(A) = 0$. 由强右连续性, 存在实值函数 $u \in \mathcal{F}$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 A 的开邻域 G 满足 $w(G) \le w(A) + \varepsilon u$. 因此

$$\mathrm{w}(G \setminus A) \le \varepsilon u,$$

所以A是拟开集. 又对任意闭集$F \subset A$, 显然$\mathrm{w}(A \setminus F) = 0$, 所以$A$也是拟闭集.

现设E是一个几乎开闭集, 因

$$E = E^0 \cup (E \cap \partial E) \text{且 } \mathrm{w}(E \cap \partial E) = 0,$$

由定理 6-4-6 推出, E是拟开集. 又

$$E = \overline{E} \cap (Y \setminus (\partial E \setminus E)) \text{且 } \mathrm{w}(\partial E \setminus E) = 0,$$

所以$Y \setminus (\partial E \setminus E)$既是拟开集又是拟闭集. 仍由定理 6-4-6 推出E是拟闭集. □

推论 6-4-10 设 w 是次可加、强右连续的广义权, 则每个几乎开闭集E的特征函数1_E是拟连续函数.

3. 可权集与其它推广

类似于容量与广义容量的可定容集概念, 可以定义可权集.

定义 设$\mathrm{w}: 2^Y \to \mathcal{F}$为$Y$上广义权, Y的子集E称为 w 可权集, 若

$$\mathrm{w}(E) = \sup\{\mathrm{w}(K) \mid K \text{是} E \text{的紧子集}\}.$$

引理 6-4-11 若映射$g: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$满足$g(0) = 0$且对任意$u, v \in \mathcal{F}$, $u \ge v \Rightarrow g(u) \ge g(v)$, 那么当 w 是$Y$上的广义权时, 复合映射$g \circ \mathrm{w}$也是$Y$上的广义权.

设Y'是局部紧 Hausdorff 空间, w 是Y上的广义权, f是Y'到Y的映射. 对Y'的任意子集E, 令$\mathrm{w}'(E) := \mathrm{w}(f(E))$, 则$\mathrm{w}'$是$Y'$上的广义权.

证明不难, 留给读者. □

定理 6-4-12 设Y, Y'是局部紧 Hausdorff 空间, w 是Y上的广义权, f是从Y'到Y的连续映射. 若Y'的子集E是w'可权

集，则 $f(E)$ 是 w 可权集.

证明类似定理 6-3-3. 留给读者. □

定义 广义权 w 称为 **C-单调的**, 如果对任意单调增的、Y 的相对紧子集列 $\{E_n\}$ 成立 $\lim_n \mathrm{w}(E_n) = \mathrm{w}(\cup_n E_n)$.

由此，一个 C-单调的广义权 w 就是一个满足 $\mathrm{w}(\varnothing) = 0$ 的弱拟容量.

我们注意到这样的事实: 若 X 为调和空间, X 的子集为可解集, 那么 D 的边界 ∂D 上任一具紧支柱的连续函数 f, 对应着 D 上一个 Dirichlet 解 Hf. 当 $y \in D$ 取定,

$$f \mapsto Hf(y)$$

定义了 ∂D 上具有紧支柱的连续函数族 $\boldsymbol{K}(\partial D)$ 上的一个正线性泛函，而 $f \mapsto Hf$ 则定义了从 $\boldsymbol{K}(\partial D)$ 到 $\boldsymbol{C}(D)$ 的一个正线性映射. 利用这种映射, 我们可以定义广义权并研究容量. 有兴趣的读者可参看[59].

此外，还可以定义并研究内权，外权，复广义权等. 可参见[16]、[45]、[21]等.

第七章　可去集与瘦性

本章将研究以极集为中心的几种可去集，包括半极集与 FO 集. 这里“可去”的意思是可以忽略不计的意思. 极集与半极集的概念是 Brelot M 首先引进的，在经典位势论中，这两种集都等价于外容量为 0 的集；当一个性质至多除了一个极集外成立，称该性质**似乎处处**(quasi-everywhere)**成立**(见第十一章).

半极集是用瘦性来定义的，而瘦性又与细拓扑紧密关联且可用于描绘非正则边界点的特征.

调和函数与上调和函数可延拓到某种极集上. 而 FO 集是用于研究位势的延拓的.

本章仍用 $(X,\mathcal{U})$ 表示调和空间. 设 $E\subset G\subset X$ 且 G 为 X 的开集. 对于 G 上的正超调和函数 g，用 ${}^G R_g^E$ 与 ${}^G \hat{R}_g^E$ 分别表示 g 在 E 上关于子调和空间 G 的缩减函数与扫除. 当 $G=X$ 时，左上标 G 省去如前.

§7.1　极　集

定义　X 的子集 E 称为是**极集**，如果存在 X 的一个开覆盖族 $\boldsymbol{M}$ 使得对每个 $G\in\boldsymbol{M}$ 有正超调和函数 g，它在 $G\cap E$ 上为严格正的且满足

$$
{}^G \hat{R}_g^{E\cap G}=0\,. \tag{1.1}
$$

根据定理 6-1-8 及定理 6-2-5 可推出，上式可改成 ${}^{G}\hat{R}_{\infty}^{E\cap G}=0$.

显然，极集的任何子集仍是极集；若 E 是 X 的极集，V 是 X 的开集，那么 $V\cap E$ 在子空间 V 中也是极集.

定理 7-1-1 设 g 是 X 上的超调和函数且在 X 的一个稠密子集 A 上取有限值，则集 $E:=\{x\in X\,|\,g(x)=\infty\}$ 是极集. 因此 X 上的上调和函数至多在一个极集上不取有限值.

证明 对于任意相对紧的可解集 U，任意一个在 ∂U 上被 u 所控制（即满足 $f\le u$）的 $f\in C(\partial U)$，及任意实数 $\varepsilon>0$，在 U 上有下式成立：

$$ {}^{U}\hat{R}_{\infty}^{E\cap U}\le\varepsilon\,(g-\mu^{U}f). $$

因 ε 是任意的，g 在一个稠密子集 A 上取有限值，故在 A 上有

$$ {}^{U}R_{\infty}^{E\cap U}=0, $$

取下极限后就得到下半正则化

$$ {}^{U}\hat{R}_{\infty}^{E\cap U}=0. $$

这说明 E 是极集. 因 X 上的上调和函数满足定理条件（见定理 5-1-1），应用上述结果立即得到余下结论. □

定理 7-1-2 (Bauer H) 设 A 为 X 的一个 K-解析集，若 A 的所有紧子集皆是极集，则 A 也是极集.

证明 设 G 是一个 σ 紧的开集使得在 G 上存在一个严格正的有限连续的位势 p. G 显然是 K-解析集，$G\cap A$ 也是 K-解析集. 据定理 6-3-6，$G\cap A$ 关于任何容量可定容，由 § 6.3 的(3.5)式得

$$ \hat{R}_{p}^{A\cap G}=\sup\{\,\hat{R}_{p}^{K}\,|\,K\text{ 为 }A\cap G\text{ 的紧子集}\}=0\,; $$

由于这样的开集 G 全体是 X 的一个覆盖，所以 A 是极集. □

下一定理及注研究了极集与它的细闭包的关系.

定理 7-1-3 一个极集的细闭包是极集而且在 X 的细拓扑下无处稠密. 当 X 具有可数基时，每个极集是细闭集.

证明 设 E 为极集，据定义存在一个开覆盖族 $\boldsymbol{M}$，使得对

每个 $U\in\boldsymbol{M}$ 有 ${}^U\hat{R}_\infty^{E\cap U}=0$. 注意到缩减函数是细上半连续的，故

$$D:=\{x\in U\,|\,{}^U\hat{R}_\infty^{E\cap U}(x)=\infty\}$$

是 U 的细闭子集且包含了 $U\cap E$. D 在 U 是无处稠密的，这因为下半连续正则化 ${}^U\hat{R}_\infty^{E\cap U}=0$. 设 F 为 E 的细闭包， 则易知 $U\cap F\subset D$, 因此推出 $U\cap F$ 无处稠密，从而 F 无处稠密. 注意到对每个正超调和函数 u, 若 u 在 $U\cap E$ 上取 ∞ 值，则有 $u\geq{}^UR_\infty^{E\cap U}$, 故 $u|_D=\infty$. 由 u 的细连续性知, u 在 $U\cap F$ 上取 ∞ 值. 因为 u 是任意的，所以

$${}^UR_\infty^{F\cap U}\leq{}^UR_\infty^{D}\leq{}^UR_\infty^{E\cap U},$$

从而 ${}^U\hat{R}_\infty^{F\cap U}=0$. 由 U 的任意性知 F 为极集.

下设 X 具有可数基. 于是每个单点集是 G_δ 型集. 假定 E 不是细闭集,则 E 有一个细聚点 $z\in X\setminus E$. 设 $G\in\boldsymbol{M}$ 使得 $x\in G$. 据定理 5-4-16 知，z 有一个相对紧的可解邻域 V, 其闭包包含于 G, 且 V 的闭包的某个邻域上存在一个正调和函数 h, 使得 h 在 V 的闭包上处处大于 $\varepsilon>0$. 因 E 是极集，可推出 ${}^V\hat{R}_h^{E\cap V}=0$. 又由于 $\{z\}$ 是 $X\setminus E$ 的 G_δ 型子集，据定理 6-2-9 有

$${}^VR_h^{E\cap V}(z)={}^V\hat{R}_h^{E\cap V}(z)=0. \tag{1.2}$$

另一方面，由于 ${}^VR_h^{E\cap V}$ 为细上半连续，故

$$B:=\{x\in V\,|\,{}^VR_h^{E\cap V}(x)\geq\varepsilon\}$$

是 V 的相对细闭集，包含了 $V\cap E$ 在 V 的相对细闭包，从而包含了 E 在 V 中的细聚点 z, 故 ${}^VR_h^{E\cap V}(z)\geq\varepsilon$ ，这与(1.2)矛盾. □

注 7-1-4 并非每个极集都是细闭集(见练习 7-4-9 之 5).

定理 7-1-5 设 E 是调和空间 X 的一个极集，则 X 上的每个位势 p 在 E 上的扫除恒为 0，即

$$\hat{R}_p^E=0.$$

证明 先考虑 E 的闭包包含于 X 的某一个开集 W 中使得

$${}^W\hat{R}_\infty^E=0. \tag{1.3}$$

设 u 与 v 为 X 上的正超调和函数使得

$$u|_E \geq p|_E,$$

$$v|_{X\setminus W} \geq u|_{X\setminus W}.$$

又设 f 为 W 上的正超调和函数且在 E 上取∞值. 定义 X 上的函数 g, 使它在 $X\setminus W$ 上取 u 的值, 而在 W 上的值为 $\inf\{u, v+f\}$, 则由定理 4-5-2 知，g 是超调和的. 因为 $g|_E \geq p|_E$, 故在 W 上有

$$\hat{R}_p^E \leq g \leq v+f.$$

由 f 的任意性知在 W 上有

$$\hat{R}_p^E \leq {}^W\hat{R}_\infty^E + v.$$

据(1.3)式推出在 W 上有

$$\hat{R}_p^E \leq v.$$

由 u 与 v 的假定知上式在 $X\setminus W$ 上也成立.

又因为 v 是任意的，故

$$\hat{R}_p^E \leq \hat{R}_u^{X\setminus W} \leq u, \qquad \hat{R}_p^E \leq \wedge_u \hat{R}_u^{X\setminus W} \leq \wedge_u u = \hat{R}_p^E.$$

由于

$$\{\hat{R}_u^{X\setminus W}|_W \mid u \text{ 为超调和且 } u \geq p \text{ 在 } E \text{ 上成立}\}$$

是一个 Perron 集（见 § 5.1），故 $\hat{R}_p^E$ 在 W 调和，另一方面，据定理 6-2-6，$\hat{R}_p^E$ 在 $X\setminus\overline{E}$ 调和，从而在 X 调和. 于是作为位势 p 的调和下属 $\hat{R}_p^E$ 恒等于 0.

下面考虑一般的情形. 设 K 是 X 的紧集. 于是存在有限个 X 的开集 $\{W_i\}_{i\in I}$ 及有限个紧集 $\{K_i\}_{i\in I}$ 使得对每个 $i\in I$ 有

$$K_i \subset W_i,$$

且

$$K = \cup_i K_i, \qquad {}^{W_i}\hat{R}_\infty^{E\cap W_i} = 0.$$

据第一段的证明知

$$\hat{R}_p^{E\cap K} \leq \sum_{i\in I} \hat{R}_p^{E\cap K_i} = 0.$$

故

$$\hat{R}_p^E \le \hat{R}_p^{E\cap K} + \hat{R}_p^{E\setminus K} = \hat{R}_p^{E\setminus K}, \qquad \hat{R}_p^E = \hat{R}_p^{E\setminus K}.$$

再次由定理 6-2-6 知，在 K 的内部 $\hat{R}_p^E$ 调和. 因 K 是任意的，而 X 有一个相对紧可解集构成的拓扑基（定理 5-4-16），所以 $\hat{R}_p^E$ 在 X 调和. 然后，由 $\hat{R}_p^E$ 是 p 的调和下属，推出其值恒等于 0. □

推论 7-1-6 设 A, B 是调和空间 X 的子集使得$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 是极集，则对 X 上的任意位势 p 有

$$\hat{R}_p^A = \hat{R}_p^B.$$

证明 因 $A\setminus B$ 与 $B\setminus A$ 都是极集，由定理及下面的公式：

$$\hat{R}_p^A \le \hat{R}_p^B + \hat{R}_p^{A\setminus B} = \hat{R}_p^B;$$

$$\hat{R}_p^B \le \hat{R}_p^A + \hat{R}_p^{B\setminus A} = \hat{R}_p^A;$$

知结论成立. □

推论 7-1-7 设 X 是一个 **P** 调和空间，E 是 X 的极集且包含在一个σ 紧集之中，即存在一个紧集增加列$\{K_i\}$使得

$$E \subset \cup_{i=1}^{\infty} K_i.$$

则

$$\hat{R}_\infty^E = 0.$$

证明 据 **P** 调和空间的定义推出，存在一列单调增加的、X 的位势列$\{p_i\}$使得每个 p_i 在 K_i 上取严格正值 $i=1,2,\cdots$，从而由定理 6-2-5 得

$$\hat{R}_\infty^E = \lim_i \hat{R}_{i p_i}^E = 0. \qquad \square$$

注 在定理条件中若不假定 E 为某个σ紧集的子集，则结论不再成立(参见例 7-4-9 之 5).

推论 7-1-8 可数个极集之并仍为极集.

证明 设$\{E_i\}$是调和空间 X 上的一列极集， 令

$$E := \cup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

对 X 的每个 σ 紧的 **P** 集 W，我们有

$$^{W}\hat{R}_{\infty}^{E\cap W}=\lim_{j}{}^{W}\hat{R}_{\infty}^{B_j\cap W}\le\lim_{j}\sum_{i\le j}{}^{W}\hat{R}_{\infty}^{E_i\cap W}=0.$$

其中 $B_j:=\cup_{i=1}^{j}E_i$. 再据推论 5-4-8 知，X 有一个由 **P** 集组成的覆盖族$\{W\}$，故定理成立. □

由下一定理我们看到极集关于“任意”调和测度是零测集.

定理 7-1-9 设 X 是 **P** 调和空间，E 是 X 的极集，则对 X 的任意相对紧的开集 G 及任意 $x\in G$，都有

$$\mu_x^G(E)=0.$$

证明 设 v 是 X 上的正超调和函数且在 $E\cap\partial G$ 上取∞值. 据超调和函数的定义

$$\mu_x^G(E)\le\mu_x^G v\le v(x).$$

由 v 的任意性，且 $E\cap\partial G$ 包含于紧集∂G，据推论 7-1-7 知

$$\mu_x^G(E)\le\hat{R}_{\infty}^{E\cap G}(x)=0.\ \square$$

下面的定理与推论说明闭极集关于超调和函数的可去性.

定理 7-1-10 (Brelot M) 设 F 是调和空间 X 的闭的极集，u 在 $X\setminus F$ 是超调和函数. 造 X 上的一个函数 u^* 使之在 $X\setminus F$ 上等于 u 而在任意点 $y\in F$, $u(y)$的值等于 $\liminf\limits_{x\to y}u(x)>-\infty$, 则 u^* 是 X 上的超调和的函数.

证明 设 V 是相对紧可解集且为 σ 紧 **P** 集. 又设 $f\in C(\partial V)$, 且在 ∂V 上 $f\le u^*$成立. 设 w 是 V 上的超调和函数，它在 $F\cap V$ 上取∞ 值. 在 V 上作一个函数 g 使得它在 $V\setminus F$ 上取值等于 $u+w$, 而在 $F\cap V$ 上取∞值. 据定理 4-5-2， g 是超调和的. 因 g 属于 $\overline{\mathscr{U}}_f^V$，故

$$\mu^V f\le u+w$$

在 $V\setminus F$ 成立. 由 w 与 f 的任意性得

$$\mu^V u^*\le u$$

在 $V\setminus F$ 成立（推论 7-1-6）. 由 u^* 的定义知在 V 上也有上式成

立. 因为 V 是任意的, 故 u^* 为超调和函数(定理 5-4-14).□

推论 7-1-11 设 F 是 X 的一个闭的极集, h 是 $X \setminus F$ 上的调和函数且满足: 对 F 中任一点 y 有

$$\limsup_{x \to y} |h(x)| < \infty.$$

则 h 可以延拓成为 X 上的调和函数. 这个延拓是唯一的.

注 这结论在经典位势论的情形由 Bouligand 证得.

证明 用 h_1, h_2 分别表示 X 上这样的函数: 它们在 $X \setminus F$ 上等于 h 而对 F 上任一点 y, $h_1(y), h_2(y)$ 分别等于

$$\liminf_{x \to y} h(x) \qquad \text{与} \qquad \limsup_{x \to y} h(x).$$

由上一定理知, h_1 和 $-h_2$ 在 X 上都是超调和函数. 设 V 是一个 **P** 集的相对紧开子集.

$$\mu^V h_1 \le h_1 \le h_2 \le \mu^V h_2$$

在 V 上成立. 因在 $\partial V \setminus F$ 上有 $h_1 = h_2$, 而 $\partial V \cap F$ 是极集, 从而为 μ^V 零测集, 故由定理 7-1-9 得知, 在 V 上有

$$\mu^V h_1 = \mu^V h_2,$$

从而 $h_1 = h_2$ 且 h_1 在 V 调和. 因调和空间有一个由 **P** 集构成的覆盖(推论 5-4-8), 故在 X 上 h_1 恒等于 h_2 且调和. □

§7.2 瘦性与半极集

在调和空间中引入半极集的概念是为了推广经典位势论中有关极集的部分相应的性质, 这些性质已经不再能用极集来直接描绘.

定义 设 E 是调和空间 X 的一个子集, 如果空间中某一点 x 存在两个开邻域 V 和 G 使得 $V \subset G$ 且在 G 上有一个正的超调和函数 g 满足

$$^{G}\hat{R}_{g}^{E\cap V}(x) < g(x),$$

就说 E 在点 x **瘦**.

显然，当上述情况成立时，则对 x 的任意两个邻域 W 与 U，当它们满足 $U \subset W \subset G$ 且 $U \subset V$ 时有

$$^{W}\hat{R}_{g}^{E\cap U}(x) < g(x).$$

一般地，若 $x \in X \setminus \bar{E}$，则 E 在 x 瘦；据扫除与细拓扑的定义，一个细开集不会在它的任一细内点瘦. 若 E 在 x 瘦，则 E 的任意子集也在 x 瘦. 因此，我们只须注重于判断 E 在 E 的边界上那些不是 E 的细内点的点是否瘦.

定义 X 的一个子集 E 称为是**完全瘦的**，如果 E 在 X 中的任何一点都瘦. 如果 X 的子集 F 可表示成可数个完全瘦的集的并，则称 F 是一个**半极集**.

显然，一个完全瘦集的子集也是完全瘦的；极集是完全瘦的. 但是，完全瘦集并非必定为极集，本章后面的练习 7-4-8 说明，即使在 Brelot 空间，也可能存在非极集的完全瘦集；这当然也说明了，在调和空间，半极集与极集是不同的概念.

引理 7-2-1 设 A、B 是调和空间 X 的两个子集，u 是 X 上的正超调和函数且在 $x \in X$ 满足

$$\hat{R}_{u}^{A}(x) < u(x) \qquad 且 \qquad \hat{R}_{u}^{B}(x) < u(x),$$

则 X 上存在一个正的超调和函数 v 使得

$$\hat{R}_{v}^{A\cup B}(x) < v(x)$$

证明 令 $w := \hat{R}_{u}^{A} \wedge \hat{R}_{u}^{B}$. 任取 X 上两个正的超调和函数 f 与 g 使得在 A 上 f 优于 u （即 $f \geq u$） 且在 B 上 g 优于 u. 那么在 $A \cup B$ 上有 $u + w \leq f + g$. 于是由定理 6-2-2 得

$$\hat{R}_{u}^{A\cup B} + \hat{R}_{w}^{A\cup B} \leq f + g.$$

由 f 与 g 的任意性知

$$\hat{R}_u^{A\cup B}(x)+\hat{R}_w^{A\cup B}(x)\le\hat{R}_u^A(x)+\hat{R}_u^B(x). \tag{2.1}$$

那么，u 与 w 中至少有一个可作为结论所需要的 v. 否则将得出

$$\hat{R}_u^{A\cup B}(x)=u(x)\quad 且\quad \hat{R}_w^{A\cup B}(x)=w(x).$$

因此由(2.1)式推出

$$\begin{aligned}u(x)+w(x)&\le\hat{R}_u^A(x)+\hat{R}_u^B(x)\\&\le\sup\{\hat{R}_u^A(x),\hat{R}_u^B(x)\}+\inf\{\hat{R}_u^A(x),\ \hat{R}_u^B(x)\}\\&<u(x)+w(x).\end{aligned}$$

矛盾. □

定理 7-2-2 设 E 是 **P** 调和空间 X 的一个子集，x 是 E 中的点. 那么，下面三个命题等价：

a) E 在 x 瘦;

b) 对 X 上任何正的超调和函数 u，如果 u 在 X 连续（有限）且 $u(x)>0$，则 x 有一个邻域 V 满足

$$\hat{R}_u^{E\cap V}(x)<u(x); \tag{2.2}$$

c) X 上存在一个在某个紧集之外调和的、在全空间取有限值的连续位势 p 使得 $\hat{R}_p^E(x)<p(x)$.

证明 a)⇒ b). 据瘦性的定义，存在 x 的两个开邻域 V 与 G 得 $V\subset G$ 且在 G 上有一个正的超调和函数 g 满足

$${}^GR_g^{E\cap V}(x)<g(x).$$

设 D 是 X 的一个其闭包包含在 G 的相对紧开邻域，根据定理 5-4-4, X 上存在一个取有限值的连续上调和函数 v 使得

$$\mu^D v(x)<v(x).$$

选取正实数 α 使得

$$\alpha\,{}^GR_g^{E\cap V}(x)<v(x)-\mu^D v(x)<\alpha g(x).$$

据下半连续性，x 有一个包含于 $D\cap U$ 的相对紧开邻域 W 使得在 W 上满足

$$v-\mu^{D}v<\alpha g.$$

利用定理 4-5-4 推出

$$\hat{R}_{v}^{E\cap W}(x)\le\mu^{D}v(x)+\alpha^{G}\hat{R}_{g}^{E\cap V}(x)<v(x).$$

选取正实数 β 使得

$$\beta\hat{R}_{v}^{E\cap W}(x)<u(x)<\beta v(x).$$

用 V 表示 x 的一个邻域，它包含于 W 且在 V 上有 $u<\beta v$. 于是

$$\hat{R}_{u}^{E\cap V}(x)<\beta\hat{R}_{v}^{E\cap V}(x)\le\beta\hat{R}_{v}^{E\cap W}(x)<u(x).$$

b)⇒ c). 设 u 是 X 上的一个正的超调和函数，它在点 x 连续且取严格正的实数. 又设 V 是 x 的一个相对紧开邻域使得(2.2)式成立.

据定理 5-4-4，X 上存在正的有限连续的上调和函数 g 使得

$$\mu^{V}g(x)<g(x).$$

据定理 6-2-10 有

$$\hat{R}_{g}^{E\setminus V}(x)\le\hat{R}_{g}^{X\setminus V}(x)=\mu^{V}g(x)<g(x).$$

故

$$\hat{R}_{u+g}^{E\cap V}(x)<u(x)+g(x)\ \text{且}\ \hat{R}_{u+g}^{E\setminus V}(x)<u(x)+g(x).$$

据引理 7-2-1，在 X 存在一个正的超调和函数 v 使得

$$\hat{R}_{v}^{E}(x)<v(x).$$

再由推论 5-4-2，可找到 X 上一个有限连续位势 p 使得 $p\le v$，p 在一个紧集外调和且满足

$$\hat{R}_{v}^{E}(x)<p(x).$$

于是得到

$$\hat{R}_{p}^{E}(x)\le\hat{R}_{v}^{E}(x)<p(x).$$

c)⇒a) 显然成立. □

定理 7-2-3 设 X 为调和空间，则有限个在 $x\in X$ 瘦的集的并仍在 x 瘦.

证明 设 X 的两个子集 E、F 皆在 x 瘦. 选取 x 的一个 **P** 集邻域 G, 使得在 G 上有一个严格正的调和函数 h（由正性公理及定理 4-2-5）. 那么显然 h 在 x 是连续的且取严格正的有限值. 据上一定理，存在 x 的一个开邻域 $V \subset G$ 使得

$$^G R_h^{E \cap V}(x) < h(x) \text{ 且 } ^G R_h^{F \cap V}(x) < h(x).$$

再由引理 7-2-1 推出，存在 G 上的正超调和函数 g 使得

$$^G R_g^{(E \cup F) \cap V}(x) < g(x).$$

这说明 $E \cup F$ 在 x 瘦. 再由归纳法知有限个这种类型集之并也在 x 瘦. □

推论 7-2-4 a) 设 E、F 是 X 的两个子集使得$(E \setminus F) \cup (F \setminus E)$为完全瘦集，则对任意 $x \in X$, E 与 F 要么同时在 x 瘦，要么同时在 x 不瘦.

b) 若 $x \in X$ 且$\{x\}$在 x 瘦，则 X 的任一子集 E 在 x 瘦当且仅当 $E \setminus \{x\}$在 x 瘦.

证明不难，留作练习. □

定理 7-2-5 设 E 是调和空间 X 的子集，E 的细闭包记作 F, $x \in X$. 那么

a) E 与 F 同时在 x 瘦或同时在 x 不瘦；

b)若 $x \in X \setminus F$, 则 E 在 x 瘦. 即 E 在它的细外点瘦.

c)若 E 在 x 瘦，$x \in X \setminus E$ 且$\{x\}$是 G_δ 型集，则 $x \in X \setminus F$.

证明 a) 设 E 在 x 瘦，于是存在 x 的两个开邻域 V 和 G 使得 $V \subset G$ 且在 G 上存在一个正的超调和函数 g 使得

$$^G R_g^{E \cap V}(x) < g(x),$$

考虑 G 上的正的超调和函数 f, 若在 $E \cap V$ 上有 $f \geq g$, 则由 f 与 g 的细连续性知在 $F \cap V$ 上仍有同样不等式成立，则缩减函数的定义知

$$^G R_g^{F \cap V}(x) = {}^G R_g^{E \cap V}(x) < g(x),$$

即 F 也在 x 瘦.

b)设 $x \in X \setminus F$, 即 x 为 E 的细外点. 若 x 为 F 的外点,显然 F 在 x 瘦. 下设 $x \in \overline{E} \setminus F$. 据定理 6-1-1，在 x 的一个开邻域 V 上存在一个超调和函数 u 使得

$$u(x) < \liminf_{y \to x, y \in E} u(y).$$

设 G 是 x 的一个相对紧的开邻域，其闭包包含于 V 且在 G 的闭包的邻域上存在一个严格正的调和函数 h. 取正实数 α、β 使得 $u+\alpha h$ 在 G 上是正的且

$$u(x) + \alpha h(x) < \beta h(x) < \liminf_{y \to x, y \in E} (u(y) + \alpha h(y)).$$

又设 U 是 x 的一个开邻域使得 $U \subset G$ 且在 $E \cap U$ 上有

$$g := \beta h < u + \alpha h.$$

那么 g 是 G 上的正调和函数且满足

$${}^G R_g^{E \cap U}(x) < u(x) + \alpha h(x) < g(x).$$

故 E 在 x 瘦.

c) 设 E 在 x 瘦，只须考查 $x \in \overline{E} \setminus E$ 的情形. 据定义，存在 x 的两个开邻域 G, V 使得 $V \subset G$ 且存在 G 上的一个正的上调和函数 g 使得

$${}^G \hat{R}_g^{E \cap V}(x) < g(x),$$

因 $x \in X \setminus E$ 且 $\{x\}$ 为 G_δ 型集，据定理 6-2-9 有

$${}^G R_g^{E \cap V}(x) = {}^G \hat{R}_g^{E \cap V}(x).$$

故 G 上存在一个正的上调和函数 u 使得在 $E \cap V$ 上有 $u \ge g$ 而且 $u(x) < g(x)$，从而

$$u(x) < g(x) \le \liminf_{y \to x, y \in E} g(y) \le \liminf_{y \to x, y \in E} u(y).$$

据定理 6-1-1 知，$G \setminus E$ 是 x 的细邻域，即 $x \in X \setminus F$. □

注 7-2-6 1) 定理中的命题 c)中的条件若不要求 $\{x\}$ 是 G_δ 型集，则结论可能不成立. 可参见练习 7-4-9 之 5，在 X'' 中极集未

必是细闭集.

2) 综合定理之命题 b)、c)知，当空间中每个单点集是 G_δ 型集，则集 E 在 $x \in X \setminus E$ 瘦当且仅当 x 是 E 的细外点.

推论 7-2-7 在调和空间 X 中，

a) 一个完全瘦集的细闭包也是完全瘦的且无处稠密（因开集或细开集在其内点都不瘦）；半极集关于细拓扑是第一范畴集.

b) X 上的两个超调和函数若在一个半极集之外相等，则必恒等.

c) 若 X 具有可数基，则每个完全瘦集是细闭集.

证明 注意到细拓扑是 Baire 拓扑，则由上一定理及其附注推出结论. □

定理 7-2-8 (Brelot M-Bauer H) 设 X 是调和空间，$\mathscr{V}$ 是一族按自然序有下属的超调和函数，则

$$B:=\{x \in X \mid (\wedge\mathscr{V})(x) < \inf\{g(x) \mid g \in \mathscr{V}\}\}$$

是一个半极集.

证明 令 $f:=\inf\mathscr{V}$. 那么由定理 6-1-5 及 6-1-7 知，f 的下半连续正则化就是 $\mathscr{V}$ 族的最大下属 $\wedge\mathscr{V}$. 对任意自然数 n，令

$$A_n:=\{x \in X \mid \hat{f}(x) < \inf(n, f(x) - 1/n)\}.$$

显然 $B = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. 下面只须证每个 A_n 是完全瘦集即可.

设 $y \in X$. 若 $\hat{f}(y) > n$，则集$\{x \in X \mid \hat{f}(x) > n\}$是 y 的一个邻域且包含于 $X \setminus A_n$，故 A_n 在 y 瘦. 下设 $\hat{f}(y) \le n$，要证 $E:=A_n$ 在 y 瘦. 为此，取 y 的一个相对紧的开邻域 G 使得在 G 的闭包上存在一个严格正的调和函数 h, 不妨设 $h(y)=1$. 取一个适当的正实数α 使得 $\hat{f}+\alpha h$ 在 G 上的限制取正值，同时取 y 的一个邻域 V ($V \subset G$) 使得在 V 上有 $\hat{f} > (\hat{f}(y) - \frac{1}{4n})h$ 且 $h<2$. 于是在 $A_n \cap V$ 上有

$$f+\alpha h > \hat{f} + \frac{1}{2n} h + \alpha h > (\hat{f}(y) + \frac{1}{4n} + \alpha) h.$$

这时取$\beta := \hat{f}(y) + \frac{1}{4n} + \alpha$ 且 $u := \beta h$. 则有

$${}^{G}R_{u}^{E\cap V}(y) \le \hat{f}(y) + \alpha < \beta = u(y),$$

这说明 $E := A_n$ 在 y 瘦. □

Cartan H 曾在经典位势论中证明上述 B 是一个极集. 但在调和空间中, B 一般说来不再是极集.（第九章还要作进一步讨论）.

推论 7-2-9 设 E 是调和空间 X 的一个子集，u 是 X 上的正的超调和函数，则集

$$\{x \in E \mid \hat{R}_{u}^{E}(x) < u(x)\}$$

是一个半极集. □

可解集上 Dirichlet 问题的解的边界性质与边界点的正则性密切相关. 瘦性因其能刻划非正则边界点的特征而得到人们的高度重视，下一定理揭示了这一特征. 我们已知道，**P** 调和空间中的每个开集都是可解集（参见定理 5-4-15）.

定理 7-2-10（Brelot-Herve-Bauer） 设 V 是 **P** 调和空间 X 的开集，那么 V 的边界点 x 非正则的充要条件是 $X \setminus V$ 在 x 瘦.

证明 先设 $X \setminus V$ 在 x 瘦. 于是由定理 7-2-2 知，X 上有一个有限连续位势 p 使得

$$\hat{R}_{p}^{X\setminus V}(x) < p(x). \tag{2.3}$$

取一个 $f \in \boldsymbol{K}(\partial V)$使得 $f(x) = p(x)$ 且在∂V上$f \le p$. 因为 $\hat{R}_{p}^{X\setminus V}$ 在 $X \setminus V$ 上等于 p 而在 V 上等于 $\overline{H}_{p}^{V}$(见定理 6-2-10)，故由(2.3)得（注意到 $\hat{R}_{p}^{X\setminus V}$ 在 X 下半连续）:

$$\varlimsup_{y\to x} H_{f}^{V}(y) \le \varlimsup_{y\to x} \overline{H}_{p}^{V}(y) = \hat{R}_{p}^{X\setminus V}(x) < p(x) = f(x),$$

这说明 x 是 V 的非正则边界点.

反过来，下设 $X \setminus V$ 在 x 不瘦，要证 x 为正则边界点. 为此，

任取$f\in \boldsymbol{K}(\partial V)$. 因$f$的支柱紧，由§定理 5-4-1，$X$上有一个有限连续位势$s$，它在$f$的支柱上取严格正值，在$X$的某外紧集外调和. 对任意实数$\varepsilon>0$，据定理 5-4-13 知存在$X$上两个有限连续的位势$p$与$q$，使得$p, q$在$X$的一个紧集外调和，$p-q\in \boldsymbol{K}(X)$且在$\partial V$上成立着

$$t:=|p-q-f|<\varepsilon s.$$

于是在V上有

$$\overline{H}_t^V<\varepsilon s. \tag{2.4}$$

因p, q是可解函数(定理 5-4-15)且由定理 6-2-10，在V上有

$$H_p^V=R_p^{X\setminus V} \quad 且 \quad H_q^V=R_q^{X\setminus V}.$$

因$X\setminus V$在x不瘦，故对X上任何一个有限连续位势w，则必有下式成立：

$$\hat{R}_w^{X\setminus V}(x)=w(x).$$

于是

$$\begin{aligned}\liminf_{y\to x, y\in V} H_w^V(y) &= \liminf_{y\to x, y\in V} R_w^{X\setminus V}(y)\\ &\geq \hat{R}_w^{X\setminus V}(x)=w(x).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\limsup_{y\to x, y\in V} H_w^V(y)\leq \limsup_{y\to x, y\in V} R_w^{X\setminus V}(y)\leq w(x).$$

故有

$$\lim_{y\to x} H_w^V(y)\leq w(x).$$

进一步，用p, q分别代替w后，由(2.4)得

$$\limsup_{y\to x} H_f^V(y)\leq p(x)-q(x)+\varepsilon s(x)\leq f(x)+2\varepsilon s(x),$$

$$\liminf_{y\to x} H_f^V(y)\geq p(x)-q(x)-\varepsilon s(x)\geq f(x)-2\varepsilon s(x).$$

由ε 的任意性得到

$$\lim_{y\to x} H_f^V(y)=f(x).$$

再由 f 的任意性推出 x 是 V 的正则边界点. □

推论 7-2-11 在 $\mathcal{P}$ 调和空间中,任意两个正则集之交仍然正则.

证明 由本定理及定理 7-2-3 推出. □

§7.3 FO 集与位势延拓

在经典位势论中,$\boldsymbol{R}^3$ 的一个紧集为零容集当且仅当,这个集上的任一严格正连续函数必可连续延拓为 $\boldsymbol{R}^3$ 上 Newton 位势. 在连通的、具有可数基的、存在一个严格正位势的 Brelot 调和空间上,上述结果可推广为,不止包含一点的紧集 K 为极集的充要条件是,K 上任意严格正的、有限连续函数必可延拓为连续的位势. 为了较准确地描述这种延拓性,下面在一般的调和空间中引入 FO 集的概念,探讨了这种集与极集之间的关系,并进而把位势延拓的讨论及有关结果推广到较一般的 $\mathcal{P}$ 调和空间上去. (参看[50]).

以下用 X 表示调和空间$(X, \mathcal{U})$,$\mathcal{U}_+$表示 X 上的正超调和函数全体,用 $\mathcal{PC}$ 表示 X 上的有限连续的位势全体;对 X 的子集 A, 如惯例,用 $C(A)$表示在 A 上定义的有限连续函数全体;而另行规定: $C_{++}(A)$表示 $C(A)$中在 A 上取严格正值的元素全体. 当考虑椭圆调和空间时,我们总假定它是连通的.

1. FO 集与极集

定义 设 A 为 X 的子集. 若对任意 $f \in C_{++}(A)$,恒有 $R_f^A = f$ 在 A 上成立,则称 A 为 F 集;若对任意 $f \in C_{++}(A)$,恒有 $R_f^A = 0$

在 $X\setminus A$ 上成立，则称 A 为 O 集. 二者得兼时称为 FO 集.

引理 7-3-1 F 集的任意紧子集为 F 集；若对任意 $f\in C_{++}(A)$，f 可延拓成 $u\in\mathcal{U}_+$，则 A 为 F 集.

证明 因 X 为局部紧 Hausdorff 空间，由上一定义直接推出结论. □

引理 7-3-2 在 **P** 调和空间 X 中，

1）紧极集必为 O 集；

2）无处稠密的、紧的 O 集必为极集；

3）单点集为 F 集.

证明 首先，若 K 为 X 的紧子集，则对任意 $f\in C_{++}(K)$，存在 $p\in\mathcal{PC}$，使得 $p|_K\ge f>0$. 从而，1) 当 K 为紧极集时，由定理 7-1-5 及定理 6-2-6 知 $\hat{R}_p^K=0$ 且

$$0\le R_f^K\le R_p^K=\hat{R}_p^K$$

在 $X\setminus K$ 成立，这说明 K 为 O 集.

2) 当 K 为无处稠密的紧 O 集时，由于 $R_p^K=0$ 在 $X\setminus K$ 成立，知 $\hat{R}_p^K=0$，从而

$$\hat{R}_\infty^K=\lim_n\hat{R}_{np}^K=0,$$

故 K 为极集.

3)当 $K=\{x_0\}$，有 $p\in\mathcal{PC}$ 使得 $p(x_0)=f(x_0)$，于是

$$R_f^K(x_0)=f(x_0),$$

即$\{x_0\}$为 F 集. □

注 7-3-3 因为 Brelot 空间的的单点集未必为极集（见练习 7-4-8），故 F 集未必为极集. □

引理 7-3-4 在 **P** 椭圆调和空间 X 中，设 A 为 X 的真子集且为 O 集，则 A 为极集；O 集的紧子集仍为 O 集.

证明 设 f 在 A 上恒等于 1，由定义得，$R_f^A=0$ 在 $X\setminus A$ 成立. 设 $x_0\in X\setminus A$，那么对任意自然数 n，存在 $u_n\in\mathcal{U}_+$ 使得在 A

上 $u_n \geq 1$ 且 $u_n(x_0) < 2^{-n}$，从而

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} u_n \in \mathcal{U}_+ \qquad \text{且}\ u(x_0) < 1,$$

而在 A 上 $u = \infty$．因 X 为椭圆调和空间且 u 不恒为 ∞，据定理 4-6-7，在 X 的一个稠密子集上取有限值. 据定理 7-1-1，

$$A \subset \{ x \in X \mid u(x) = \infty \}$$

为极集．后一结论由引理 7-3-2 推出. □

定理 7-3-5 在 **P** 调和空间 X 中，若单点集为 G_δ型集，则紧极集 K 为 FO 集.

证明 由引理 7-3-2，K 为 O 集且对任意 $f \in C_{++}(K)$，存在 $p \in \mathcal{PC}$ 使得 $p|_K \geq f > 0$ 且 $\hat{R}_p^K = 0$. 下证 K 为 F 集，由引理 7-3-1，不妨设 K 非单点集. 任取 $x \in K$，令 $B := K \setminus \{x\}$. 显然 $\hat{R}_p^B = 0$. 因 $A := \{ x \}$是 G_δ 型集，由定理 6-2-8，对任意实数$\varepsilon > 0$，存在包含 B 的细开集 G，使得

$$R_p^G(x) < \hat{R}_p^B(x) + \varepsilon = \varepsilon .$$

注意到 $R_f^A(x) = f(x)$，得

$$\begin{aligned} f(x) &\leq R_f^K(x) \leq R_f^A(x) + R_f^B(x) \\ &\leq f(x) + R_p^G(x) < f(x) + \varepsilon . \end{aligned}$$

由ε的任意性知 $R_f^K(x) = f(x)$. 再由 x 的任意性知 K 为 F 集. □

定理 7-3-6 具有可数基的 **P** 调和空间 X 中的 G_δ 型极集 K 为 FO 集.

证明 据 Brelot 的一个结果（练习 7-4-10），存在 X 上的位势 p，p 在 K 上取 ∞ 值而在 $X \setminus K$ 上取有限值. 所以，对任意 $f \in C_{++}(K)$，任意的 $y \in X \setminus K$，对任意实数$\alpha > 0$，显然有

$$R_f^K(y) \leq \alpha p(y) .$$

由α的任意性知 R_f^K 在 y 取值为 0，故 K 为 O 集．

下证 K 为 F 集，只需考虑 K 至少含有两点的情况. 对任意 $x \in K$，令 $B := K \setminus \{x\}$. 因 B 仍为 G_δ 型极集，故有位势 q，它在 B

上取 ∞ 值而在其他处取有限值. 因X为**P**调和空间,可设$0 < q(x) < \infty$. 于是, 对任意$f \in C_{++}(K)$, 可适当选取实数$\alpha > 0$使得$f(x) = \alpha q(x)$. 因$\alpha q \in \mathcal{U}_+$且$\alpha q \geq f$在$K$上成立, 故

$$R_f^K(x) = \alpha q(x) = f(x).$$

再由x的任意性知K为F集. □

定理 7-3-7 设X为椭圆调和空间,K为不止一点的闭集. 若对任意$f \in C_{++}(K)$及任意实数$\varepsilon > 0$, 都存在$u \in \mathcal{U}_+$使得

$$|f - u| < \varepsilon$$

在K上成立, 则K为极集.

证明 因X是Hausdorff空间, 故存在两个不互相包含的闭集A与B使得$A \cup B = K$. 因为X同时是局部紧的, 由Urysohn引理(定理1-2-8), 对任意$y \in A \setminus B$, 对任意自然数n, 都存在$g_n \in C(X)$ 使得$0 < g_n \leq 1$ 且 $g_n(y) = 1/2^n$, $g_n(B) = \{1\}$.

由题设, 对任意自然数n, 都存在$u_n \in \mathcal{U}_+$使得, 在K上有

$$|u_n - g_n| < 1/2^n.$$

令

$$w := \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

则$w \in \mathcal{U}_+$ 且 $w(y) < \infty$, 而w在B上取 ∞ 值. 因X是椭圆调和空间,由定理4-6-7及引理7-1-1知B是极集. 同理可证A是极集. 从而$K = A \cup B$是极集. □

推论 7-3-8 若K为椭圆调和空间X中不止一点的闭集, 且对任意$f \in C_{++}(K)$, f可延拓成某个$u \in \mathcal{U}_+$, 则K为极集. 若补充要求"X为**P**调和空间, K为紧集"的条件, 则K为FO集. □

2. FO集上的函数之位势延拓

引理 7-3-9 设K为**P**调和空间X中紧的F集,$f \in C_{++}(K)$. 那

么对 K 的任意邻域 G，对任意实数 $\varepsilon > 0$，必存在 $p \in \mathcal{PC}$ 使得 p 在 $X \setminus G$ 调和且在 K 上有 $0 \le p - f < \varepsilon$.

证明　不妨设 G 是相对紧开集使得 $K \subset G$. 因 X 为局部紧空间，故紧集 K 有邻域基

$$\mathcal{B} := \{U \mid U \text{为相对紧开集使得} K \subset U \subset \overline{U} \subset G\}.$$

据 Tietze 延拓定理（§1.2），存在 $f_0 \in \mathcal{C}^+(X)$ 使得 $f_0|_K = f$ 且 f_0 的支柱包含于 G. 对 $U = G$ 或任意 $U \in \mathcal{B}$，作函数族

$$\mathcal{F}_U := \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}(X), 0 \le \varphi \le f_0, \varphi|_K = f \text{且} \varphi \text{的支柱包含于} U\}.$$

由上述推导可知，$\mathcal{F}_U$ 非空而且由 $U \subset G$ 推出 $\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}_G$. 我们断言，

$$R_f^K = \inf\{R\varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_G\}. \tag{3.1}$$

事实上，对满足 $u|_K \ge f$ 的任意 $u \in \mathcal{U}_+$，及任意实数 $\alpha > 1$，由于 f_0 连续，u 下半连续，故

$$V := \{x \in X \mid \alpha u(x) > f_0(x)\}$$

是开集且包含了 K. 因 $\mathcal{B}$ 是 K 的邻域基，故存在 $U \in \mathcal{B}$ 使得 $U \subset V$. 以下取定这个 U. 于是对任意 $\varphi \in \mathcal{F}_U$，在 V 上，从而在 K 上，都有 $\alpha u \ge \varphi$，故 $\alpha u \ge R\varphi$，进而

$$\alpha u \ge \inf\{R\varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_U\} \ge \inf\{R\varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_G\}.$$

再由 u 及 α 的任意性推出 $R_f^K \ge \inf\{R\varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_G\}$.

另一方面，对任意 $\varphi \in \mathcal{F}_G$, $R\varphi \ge R_f^K$ 显然成立，故(3.1)成立.

于是，对任意 $\varepsilon > 0$，任意 $x \in K$，必存在 $\varphi_x \in \mathcal{F}_G$，使得

$$0 \le R\varphi_x(x) - R_f^K(x) < \varepsilon.$$

由定理 5-4-1 知，$R\varphi_x \in \mathcal{PC}$; 又由题设，$K$ 为 **F** 集，$R_f^K = f$ 在 K 上成立，其中 $f \in \mathcal{C}_{++}(K)$，故

$$D_x := \{y \in K \mid R\varphi_x(y) - f(y) < \varepsilon\}$$

是 x 在 K 上的相对开邻域. 由于 K 是紧集，从 K 的开覆盖族 $\{D_x \mid x \in K\}$ 中必可找出有限子覆盖 $\{D_x \mid x \in I\}$（I 为 K 的有限子

集）. 令 $g:=\inf_x \varphi_x$，其中 x 取遍 I，则 $g\in \mathcal{F}_G$ 且 $R_f^K\le Rg\le R\varphi_x$ 对任意 $x\in I$ 成立，从而在 K 上有

$$0\le Rg-f<\varepsilon.$$

仍由定理 5-4-1 知 $p:=Rg$ 为 X 上的连续位势且在 $X\setminus\overline{G}$ 调和. □

注 7-3-10 如引理中 X 为一般的 **S** 调和空间，则所求的 p 为具有同样性质的正调和函数. 以下引理 7-3-11 及定理 7-3-12 也有类似情况.

引理 7-3-11 设 K 为 **P** 调和空间 X 中紧的 FO 集，$f\in C_{++}(K)$, G、D_0 是 K 的两个相对紧开邻域，使得

$$K\subset G\subset\overline{G}\subset D_0\ ,$$

$f_0\ge 0$ 是 f 在 X 上的连续延拓且 f_0 在 $\overline{G}$ 上严格正, f_0 的支柱包含于 D_0. 那么对任意实数 $\varepsilon>0$，对 K 的任一其闭包包含于 G 的开邻域 D，存在 $p\in\mathcal{PC}$ 满足:

a) p 在 $X\setminus\overline{D}$ 调和；

b) 在 X 上 $p\le Rf_0$;

c) 在 $\overline{G}$ 上 $p<f_0$;

d) 在 K 上 $p\ge f-\varepsilon$.

证明 不妨设 $\varepsilon>0$ 充分小使 $g:=f-\varepsilon>0$ 在 K 上成立. 记

$$\mathcal{B}_1:=\{U\mid K\subset U\subset\overline{U}\subset D,\ U\text{ 为开集}\},$$

对 $U=D$ 或任意 $U\in\mathcal{B}_1$，作函数族

$$\mathcal{G}_U:=\{\ \varphi\mid\varphi\in\mathbf{K}(X),0\le\varphi\le f;\ \varphi|_K=g;\ \varphi\text{ 的支柱包含在 }U\}.$$

类似上一引理的证明可推出,

$$R_g^K=\inf\{R\varphi\mid\varphi\in\mathcal{G}_D\},\tag{3.2}$$

且对任意 $\eta\ (0<\eta<\varepsilon)$，存在 $\varphi_1\in\mathcal{G}_D$，使得在 K 上有

$$0\le R\varphi_1-g<\eta.$$

因 $R\varphi_1$ 及 f_0 连续,

$$A:=\{x\in X\mid R\varphi_1(x)-(f_0(x)-\varepsilon)<\eta\}$$

是包含 K 的开集. 注意到 $\overline{G}\setminus A$ 是紧集且 K 是 O 集, 在$(\overline{G}\setminus K)\subset(X\setminus K)$上有 $R_g^K=0$ 成立. 利用(3.2), 类似于上一引理证明的后半段, 因 $\delta:=\inf\{f_0(x)\mid x\in\overline{G}\}>0$, 可找到$\varphi_2\in\mathcal{G}_D$使得在 $\overline{G}\setminus A$ 上有

$$0\le R\varphi_2-R_g^K=R\varphi_2<\delta\le f_0. \tag{3.3}$$

令$\varphi_3:=\min\{\varphi_1,\varphi_2\}$. 显然$\varphi_3\in\mathcal{G}_D$且当$\varphi_3$代替 φ_2时(3.3)也成立, 并在 A 上有

$$R\varphi_3\le R\varphi_1<f_0-\varepsilon+\eta<f_0.$$

故在 $\overline{G}$ 上有 $R\varphi_3<f_0$.

由定理 5-4-1, $p:=R\varphi_3\in\mathcal{PC}$且在 $X\setminus\overline{D}$ 调和. 因 K 是 F 集, 故在 K 上有 $p\ge R_g^K=f-\varepsilon$; 再由$\varphi_3\in\mathcal{G}_D$, $0\le\varphi_3\le f_0$, 知

$$p=R\varphi_3\le Rf_0. \quad \square$$

下面是本节的主要定理:

定理 7-3-12 设 K 是 **P** 调和空间 X 中紧的 FO 集, $f\in C_{++}(K)$, G 是 K 的一个相对紧的开邻域, 那么 f 可延拓成 X 上的位势 p, 使得 p 在 K 上连续, 在 $X\setminus\overline{G}$ 调和. 若同时假定 K 是 G_δ 型集, 则 p 在 X 连续.

证明 从 K 的相对紧开邻域基中找出一个单调递减列$\{D_n\mid n=0,1,2,\cdots\}$来使得

$$D_0\supset\overline{G}\supset G\supset\overline{D_1}\supset D_1\supset\cdots\supset D_n\supset\overline{D_{n+1}}\supset\cdots.$$

显然

$$B:=\cap_{n=1}^{\infty}D_n\supset K.$$

设$f_0\in C(X)$是f在 X 的连续延拓, 使得f_0的支柱包含在 D_0 且 f_0 在 $\overline{G}$ 上严格正. 对任意充分小的实数$\varepsilon>0$, 由引理 7-3-11 知, 存在 $p_1\in\mathcal{PC}$ 使得

a) p_1 在 $X\setminus\overline{D_1}$ 调和;

b)在 X 上 $p_1\le Rf_0$;

c)在 $\overline{G}$ 上 $p_1 < f_0$;

d)在 K 上 $p_1 \geq f - \varepsilon$.

记 $f_1 := \max\{f_0 - p_1, 0\}$，那么 f_1 的支柱包含于 D_0，且在 $\overline{G}$ 上有 $f_1 > 0$．故可用 f_1 代替 f_0 而重复上述步骤得到 p_2．一般地，用归纳法可得到连续的位势列 $\{p_n \mid n = 1,2,\cdots\}$，使得对每个自然数 n 满足

(1) p_n 在 $X \setminus \overline{D_n}$ 调和;

(2)在 X 上 $s_n := \sum_{k=1}^{n} p_k \leq R f_0$;

(3)在 $\overline{G}$ 上 $s_n < f_0$;

(4)在 K 上 $s_n \geq f - 2^{-n}\varepsilon$.

令 $p := \sum_{k=1}^{\infty} p_k$，显然 $p \in \mathcal{U}_+$ 且在 X 上有 $p \leq R f_0$，在 K 上 $p = f$. 由于 $R f_0 \in \mathcal{PC}$，故 p 为位势. 注意到每个 p_n 在

$$(X \setminus \overline{G}) \subset (X \setminus \overline{D_n})$$

调和，作为单调增加的调和函数列 $\{s_n\}$ 的极限函数 $p \leq R f_0$ 且局部有界，由收敛公理（§4.1 公理BC）知，p 在 $X \setminus \overline{G}$ 调和. 同理，对每个自然数 n，在 $X \setminus \overline{D_n}$ 上 $\sum_{k=1}^{n} p_k$ 为有限个连续函数之和，而 $\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k$ 在 $X \setminus \overline{D_n}$ 调和，故 p 在 $X \setminus \overline{D_n}$ 连续. 由 n 的任意性知 p 在 $X \setminus B$ 连续.

对 K 的任一点 y，因在开集 $G \supset K$ 上 $p \leq f_0$，在 K 上 $f_0 = f = p$，并注意到位势 p 的下半连续性可得

$$\begin{aligned} p(y) &\leq \liminf_{x \to y} p(x) \leq \limsup_{x \to y} p(x) \\ &\leq \lim_{x \to y} f_0(x) = f_0(y) = p(y), \end{aligned}$$

故 p 在 K 上点点连续.

当 K 同时为 G_δ 型集时，可适当选取上述 $\{D_n\}$ 使得

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = K,$$

从而 p 在 $K \cup (X \setminus B) = X$ 上连续. □

推论 7-3-13 若 X 为可度量化的 **P** 调和空间，则可使上述位势 p 成为 X 上的连续位势. □

注意到椭圆调和空间中的位势若不恒为 0，则必为严格正位势，由上一注及定理 7-3-6, 7-3-7 可推得下面

定理 7-3-14 在可度量化的 **P** 椭圆调和空间中，关于不止一点的紧集 K，下面三个命题等价:

1) K 是极集;

2) K 是 FO 集;

3) K 上任意严格正的连续函数必可延拓为 X 上连续的严格正的位势，它在 K 的任一事先指定的邻域之外调和. □

定理 7-3-14 可应用于 Dirichlet 问题的研究，参见练习 7-4-12.

§7.4 补充与练习

1. 吸收集

定义 调和空间 X 的一个闭集 F 称为(X 的)**吸收集**，如果 X 上每个在 F 上取值为 0 而在 $X\setminus F$ 取值为 ∞ 的函数必为超调和函数.

练习 7-4-1 对 X 的闭集 F,下面 4 个命题等价:

a) F 是吸收集;

b) X 上存在这样一个超调和函数 u，它在 F 上取 0 值而在 $X\setminus F$ 严格正.

c) 对 X 的任意可解集 G，对任意 $x\in F\cap G$ 有 $\mu_x^G(X\setminus F)=0$.

d) 对任意 $x\in F$ 及 x 的任意邻域 U，存在 x 的一个可解邻域 G 包含于 U 使得 $\mu_x^G(X\setminus F)=0$.

练习 7-4-2 一族吸收集的交仍为吸收集；一族吸收集的并

的闭包也是吸收集.

练习 7-4-3 一个调和空间 X 是椭圆的当且仅当 X 的每个连通开子空间 U 的任意吸收集要么为空集，要么等于 U 本身.

2. 半极集、瘦性与正则点

练习 7-4-4 设 U、G 是 **P** 调和空间 X 的两个开集，$U\subset G$ 且 $x\in\partial U\cap\partial G$. 若 x 是 G 的正则边界点，则 x 也是 U 的正则边界点；反之，若 x 是 U 的正则边界点，且存在 x 的一个邻域 W 使得

$$U\cap W=G\cap W,$$

则 x 也是 G 的正则边界点.

练习 7-4-5 若 F 是 **P** 调和空间的一个吸收集，则 $X\backslash F$ 的任意边界点都是正则的.

练习 7-4-6 设 U 为调和空间 X 的开集且 $X\backslash U$ 在 U 的边界点 x 不瘦，则对 ∂U 上任何满足下式的数值函数 f:

$$\limsup_{x\to y}\overline{H}_f^U(y)<\infty,$$

有

$$\limsup_{x\to y}\overline{H}_f^U(y)\le\limsup_{x\to y}f(y).$$

因此，若 U 是 X 的可解集且 X 是 **S** 调和空间，则 x 是正则边界点(利用定理 7-2-10).

练习 7-4-7 设 f 是实区间 $(0,\infty)$ 上的正实值函数. 令

$$A:=\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3\mid x>0,\sqrt{y^2+z^2}<f(x)\}.$$

若

$$\limsup_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}>0,$$

考虑 $\boldsymbol{R}^3$ 关于 Laplace 算子的调和空间，则 A 在(0,0,0)不瘦(利用定理 7-2-5 及定理 6-1-4).

存在一个严格单调的 C^∞类函数f, 使得当x趋于0时$f(x)$以0为极限且使得集

$$S:=\{(x,y,z)|\ x>0,\ \sqrt{y^2+z^2}\le f(x)\}$$

在(0,0,0)是瘦的. 这个 S 就是所谓 Lebesgue 刺, 是 1913 年 Lebesgue 发现的.(提示: 可选取一个实数$\alpha>1$使得$f(x)$满足

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{((x-t)^2+f(x)^2)^{\frac{1}{2}}}=\alpha\ ).$$

练习 7-4-8 (完全瘦集非极集的例子) 设f是$(0,\infty)$上一个严格单调增加的C^∞类函数, 使得上述S在 (0,0,0) 瘦. 令

$$Y:=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3\ |\ 0<x^2+y^2+z^2<1\}\cap G,$$

其中

$$G:=\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3|\ x\le 0\}\cup\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3\ |\ x>0,\ \sqrt{y^2+z^2}>f(x)\}.$$

视Y为$\boldsymbol{R}^3$的子空间, Y的单点紧致化记作X. 对X的任意开集U, 用$\mathscr{H}(U)$表示U上这样的连续实函数u的全体: u在$U\cap Y$的限制为$\boldsymbol{R}^3$中 Laplace 方程的解.

那么$(X,\mathscr{H})$是一个 Brelot 空间, 其中常实数函数是调和的; Y是X中的正则的 **P** 集, $X\backslash Y$是完全瘦的但不是极集.

练习 7-4-9 (典型例子)

设X是集

$$(\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ |\ 1<\ x^2+y^2<2\}\times[0,\omega_1))\cup[0,\omega_1],$$

这里ω_1表示第一个不可数的序数. 在X中引入如下拓扑: X的一个子集U若满足下面诸条件则定义为开集:

a) 对每个 $\xi\in[0,\omega_1)$, 集

$$\{\ (x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ |\ 1<x^2+y^2<2,\ ((x,y),\xi)\in U\ \}$$

是$\boldsymbol{R}^2$中的开集;

b) 若$0\in U$, 则存在一个严格正的实数ε 使得

$$\{\ (x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ |\ 1<x^2+y^2\ <1+\varepsilon\ \}\times\{0\}\subset U;$$

c) 对任意$\xi\in[0,\omega_1)$, 若$\xi+1\in U$, 则存在一个严格正的实

数ε 使得

$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 2-\varepsilon<x^2+y^2<2\}\times\{\xi\}\subset U;$$

$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<1+\varepsilon\}\times\{\xi+1\}\subset U;$$

d) 如果ξ 是$[0, \omega_1)$中的极限序数，则存在一个严格正的实数 ε 及一个序数$\eta<\xi$ 使得

$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<1+\varepsilon\}\times\{\xi\}\subset U;$$

$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<2\}\times(\eta,\xi)\subset U;$$

$$(\eta,\xi]\subset U;$$

e) 如果 $\omega_1\in U$，则存在一个序数$\eta<\omega_1$使得

$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<2\}\times(\eta,\omega_1)\subset U,$$

$$(\eta,\omega_1]\subset U;$$

令$X':=X\setminus\{\omega_1\}$，$X'':=X\setminus\{0\}$且对$X'$(或$X''$)的任意开集$U$，用$\mathscr{H}'(U)$(相立地$\mathscr{H}''(U)$)表示$U$上的这样的连续实函数$h$全体，即$h$满足：

A)对任意 $\xi\in[0,\omega_1)$，在

$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<2, ((x,y),\xi)\in U\}$$

上的函数

$$(x,y)\to h((x,y),\xi)$$

是 Laplace 方程的解，且

B)对任意 $\xi\in U\cap[0,\omega_1)$ (或相应地 $\xi+1\in U\cap(0,\omega_1)$)有

$$\int_0^{2\pi}(h((r\cos\theta, r\sin\theta),\xi)-h(\xi))\mathrm{d}\theta=0$$

(相应地，$\int_0^{2\pi}(h((r\cos\theta, r\sin\theta),\xi)-h(\xi+1))\mathrm{d}\theta=0$)

对任意满足

$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 1<x^2+y^2\le r^2\}\times\{\xi\}\subset U$$

(相应地$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid r^2\le x^2+y^2<2\}\times\{\xi\}\subset U$)

的正实数r成立.

那么有如下结论：

1) X' (相应地X'')是一个局部紧空间且$\mathscr{H}'$ (相应地$\mathscr{H}''$)是

X' (相应地 X'')上的调和簇且满足 Doob 收敛性质.

2) $(X', \mathcal{H}')$ 与 $(X'', \mathcal{H}'')$ 都是 $\mathbf{P}$ –Bauer 调和空间.

3) 对 ω_1 的任一个开邻域与 X'的交集上的任何超调和函数, 存在ω_1 的一个邻域, 使得在 X'与它的交集上, 该超调和函数取常数值. 将 X' 换成 X'' 时, 情形相同.

4) X'(或 X'')上的每个调和函数都是常数, 每个位势具有紧支柱.

5) 设 A 是这样一个集: 对任何$\xi \in [0, \omega_1)$, 集

$$A \cap \{((x, y), \xi) \in \boldsymbol{R}^2 \times [0, \omega_1)\}$$

刚好仅含一个点. 那么, 对 X' (或 X'')上的任何正的超调和函数 u, R_u^A 是被 u 控制的(即 $\leq u$ 的)最大常值函数 (在 X''的情形, $R_u^A(\omega_1) = u(\omega_1)$, $\hat{R}_u^A(\omega_1) = 0\}$).

练习 7-4-10 (Brelot M) 设X是具有可数基的$\mathbf{P}$调和空间, E 是极集, 则存在 X 上的位势 p, 它在 E 上点点取 ∞ 值; 进一步, 若 E 且为 G_δ 型集, 则可要求 p 在 $X \setminus E$ 只取有限值.

练习 7-4-11 在 $\boldsymbol{R}^N$ 的经典位势论中, $\mathcal{E}$ 是一个下有界的上调和函数族, 则集

$$\{ x \in X \mid (\hat{}\inf \mathcal{E})(x) < (\inf \mathcal{E})(x)\}$$

是一个极集.

练习 7-4-12 设 X 是可度量化的 Brelot 调和空间且常数 1 是上调和函数, D 是一个正则区域, 紧极集 $K \subset \partial D$. 那么, 对任意$f \in C_{++}(K)$, 必存在$p \in \mathcal{P}\mathcal{C}(X)$ 使得$p|_K = f$ 且 p 在 D 中调和. (提示: 利用定理 7-3-14.)

练习 7-4-12 (Brelot-Bauer) 设 X 是一个连通的调和空间, A 是其中的极集, 则 $X \setminus A$ 也是连通的.

第八章　调和空间上的子 Markov 半群

本世纪四、五十年代, Kakutani S, Kac M 和 Doob J L 等人先后发现经典位势论与 Brown 运动之间的深刻联系, Doob, Le'vy P 为发展这种联系做了大量的工作, Hunt 进一步把它推广到相当一般 Markov 过程(Hunt 过程). 从此, 位势论的基本概念和性质获得了明确的概率意义, 而分析工具的引入大大促进了概率论的发展, 由于调和空间引入了 Markov 半群, 并且由这个半群可构造一个具有轨道的 Markov 过程, 公理化位势论使随机过程理论提高到一个新水平; 近三十年来, 位势论与随机过程论日益结合、相互促进, 加速了这两个分支的发展, 引起人们极大重视 .

为了便于理解第二节起在一般的拓扑空间, 包括调和空间上定义的核与半群, 第一节先介绍一下经典核, $\boldsymbol{R}^N$ 上的 Brown 半群与超过函数; 并简要列举经典位势论中的一些基本概念在 Brown 运动中的对应物. 更详细的情形可见于文献[11], [10], [6] 及[47]等, 本书第三篇也有部分概述.

§ 8.1　经典位势论与 Brown 运动

1. Poisson 核与调和算子

先复习第三章讲过的部分经典位势论知识.

对 $\boldsymbol{R}^N$ 一个取定的点 a ,半径为 ρ 的球 $B:=B(a,\rho)$上的 Poisson

核是：

$$\mathrm{P}(x, z):=\frac{\rho^2-|x-a|^2}{|x-z|^N}.$$

其中，$x \in B, z \in \partial B$(见 § 3.3). 用 $\mathscr{H}(U)$ 表示 $\boldsymbol{R}^N$ 的开子集 U 上的调和函数全体， $\sigma_{a,\rho}$ 表示∂B 上单位正质量的均匀分布，则 Poisson 积分是从 $\mathbf{L}(\partial B)$（即在∂B 上关于 $N-1$ 维 Lebesgue 测度可积的函数全体，几乎处处相等者视为等同）到 $\mathscr{H}(B)$上的一个映射 $H:=H_{a,\rho}$：

$$Hf:=\int f \mathrm{P}_x \,\mathrm{d}\, \sigma_{a,\rho},$$

这里 $\mathrm{P}_x:=\mathrm{P}(x,\cdot)=\mathrm{P}(x, z)$. 那么映射 H 是线性的且当 $f\geq 0$ 时有 $Hf\geq 0$. 当 f 在某个点 $z\in\partial B$ 连续时，据定理 3-5-3 有，

$$\lim_{x\to z} Hf(x)=f(z).$$

对 $f=1$ (即 $f\equiv 1$ 在∂B ）有 $H1=1$(推论 3-3-4 ）.

对 $\boldsymbol{R}^N$ 的开子集 U 上的连续函数 h 来说，h 在 U 调和当且仅当满足局部平均值性质(§ 3.4)，这等价于对每个 $a\in U$，对每个满足 $\overline{B}(a,\rho)\subset U$ 的实数 $\rho>0$ 有下面等式成立：

$$h(x)=\int h\,\mathrm{P}_x\,\mathrm{d}\sigma_{a,\rho}, \qquad \forall x\in B(a,\rho).$$

调和函数是无限次可微的，关于 Laplace 算子Δ 有 $\Delta h=0$.

开集 U 上的一个下半连续函数 g 是超调和函数当且仅当 g 满足局部上平均性质(§ 3.7)，即对任何球 $B(a,\rho)\subset\overline{B}(a,\rho)\subset U$ 有（定理 3-7-10 ），

$$Hg(x):=\int g\,\mathrm{P}_x\,\mathrm{d}\sigma_{a,\rho}\leq g(x), \quad \forall x\in B(a,\rho),$$

且 $Hg\in\mathscr{H}(B)$. 当 g 为 $\boldsymbol{C}^2(U)$时，g 为上调和函数当且仅当

$$\Delta g\leq 0 \quad (\text{定理 3-7-7}).$$

经典位势是有核（单核）位势，即一个取定的核(函数)关于某个测度的积分. 具体地，

在 $\boldsymbol{R}^1$ 考虑核：　$K(x,y):=-|x-y|$;

在 $\boldsymbol{R}^2$ 考虑对数核：

$$K(x,y):=-\log|x-y|;$$

在 $\boldsymbol{R}^N(N>2)$ 考虑 Newton 核:

$$K(x,y):=|x-y|^{2-N};$$

在 Green 区域上，就考虑该区域的 Green 函数为核，称为 Green 核. 下面为统一表示，仍记作 $K(x,y)$.

设 μ 为所考虑空间或 Green 区域 X 上的测度，则

$$\mathrm{U}^{\mu}=\mathrm{U}^{\mu}(x):=\int K(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

就是所关联的位势.

我们称这几种核为经典核. 它们都是对称的,对取定的点 y，$K(\cdot,y)$为上调和函数且在 $X\setminus\{y\}$为调和.

X 上的一个上调和函数 u 如有下调和下属，必可按 Riesz 分解定理唯一地表示成一个位势 U^{μ} 与一个调和函数 h 的和,这里 h 是 u 的最大调和下属.

2. Brown 半群

令 $X:=\boldsymbol{R}^N(N\geq 1)$. 按规定，$\boldsymbol{B}(X)$表示 X 上的 Borel 函数全体. 对每个实数 $t>0$, 考虑定义在 X 上的一个实值函数 g_t，

$$g_t=g(t,x):=(2\pi t)^{-N/2}\exp(-|x|^2/(2t)),$$

因此可定义一个从 $\boldsymbol{B}^+(X)$ 到 $\boldsymbol{B}^+(X)$的映射 P_t:

$$f\mapsto g_t\cdot f,$$

这里“$\cdot$”表示卷积，即

$$(\mathrm{P}_t f)(x)=\int g_t(x-y)f(y)\mathrm{d}\lambda(y),\qquad x\in X$$

其中 λ 表示 N 维 Lebesgue 测度，$f\in\boldsymbol{B}^+(X)$.

上述 P_t 称为 X 上的一个核,核族 $(\mathrm{P}_t)_{t>0}$具有如下两个性质:

(1) $\mathrm{P}_t 1=1$ ，对任意实数 $t>0$ 成立;

(2) $\mathrm{P}_s\mathrm{P}_t=\mathrm{P}_{s+t}$，即对任意实数 $s, t>0$，任意 $f\in \boldsymbol{B}^+(X)$都有

$$\mathrm{P}_s(\mathrm{P}_t f)=\mathrm{P}_{s+t}f.$$

事实上，对任意 $x\in X$ 有

$$(\mathrm{P}_t 1)(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^N}\int \exp(-|x-y|^2/(2t))\mathrm{d}\lambda(y),$$

$$=\Pi_{i=1}^N\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x_i-y_i|^2/(2t))\mathrm{d}y_i\right]$$

$$=1.$$

即性质 1 成立. 下证性质 2. 由于

$$g_s*(g_t*f)=(g_s*g_t)*f,$$

我们只要证明下式即可:

$$g_s*g_t=g_{s+t}.$$

由于 Fubini 定理，重积分可以化成累次积分，我们只须就 $N=1$ 的情形证明之. 这时，对每个 $x\in X$ 有

$$g_s*g_t(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x-y|^2/(2s))\exp(-y^2/(2t))\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\exp(-x^2/(2s))\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(s+t)y^2/(2st)+xy/s)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\sqrt{\frac{2\pi st}{s+t}}\exp(-x^2/(2s)+tx^2/(2s(s+t)))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(s+t)}}\exp(-x^2/(2(s+t)))$$

$$=g_{s+t}(x).$$ □

定义 上述 P_t 全体$(\mathrm{P}_t)_{t>0}$称为 **Brown 半群**.

下一节将看到， Brown 半群是特殊的半群.

容易看到，对任意 $t>0$, $1\le i\le N$ 有，

$$\frac{\partial g_t}{\partial x_i}(x) = -\frac{x_i}{t} g_t(x);$$

$$\frac{\partial^2 g_t}{\partial x_i^2}(x) = (\frac{x_i^2}{t^2} - \frac{1}{t}) g_t(x);$$

$$\frac{\partial g_t}{\partial t}(x) = \frac{1}{2}(\frac{|x|^2}{t^2} - \frac{N}{t}) g_t(x);$$

特别，关于 Laplace 算子有，

$$\frac{1}{2}\Delta g_t = \frac{\partial g_t}{\partial t}.$$

据此，可推出下面几个结论：

定理 8-1-1 设 f 为 X 上的有界 Borel 函数，那么

(1) 对每个 $t>0$ 有 $\mathrm{P}_t f \in \boldsymbol{C}^2(X)$

$$\frac{1}{2}\Delta \mathrm{P}_t f = \frac{\partial P_t f}{\partial t};$$

(2) 对每个 $z \in X$,

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to z} f(x) &\le \liminf_{(x,t)\to(z,0)} \mathrm{P}_t f(x)\\ &\le \limsup_{(x,t)\to(z,0)} \mathrm{P}_t f(x)\\ &\le \limsup_{x\to z} f(x).\end{aligned}$$

若 f 是一致连续的，则 $\lim_{t\to 0+}\| \mathrm{P}_t f - f\| = 0$, 其中$\|\cdot\|$表示有界函数空间中用绝对值的上确界定义的范数.

(3) 若 f 在 X 的紧集 K 的一个邻域 U 上恒等于 0，则当 $t\to 0$ 时，$\frac{1}{t}\mathrm{P}_t f$ 在 K 上一致趋于 0.

证明 要证命题 1，只要验证积分与微分的次序交换是可行的. 对 $\rho>0$ 作一个截尾函数 $g(y)$ 使得当 $y \in B(0, 2\rho)$ 时，$g(y)$ 取值为 $(\rho/2\pi)^{N/2}$; 在其它处，$g(y)$ 的值等于 $(\rho/2\pi)^{N/2}\exp(-\|y^2\|/$

8ρ). 于是，对每个 $y \in X$ 有

$$g_t(x-y) \le g(y),$$

$$\left|\frac{\partial g_t}{\partial x_i}(x-y)\right| \le \rho(\rho+|y|)g(y);$$

$$\left|\frac{\partial^2 g_t}{\partial x_i^2}(x-y)\right| \le \rho^2(\rho+|y|)^2 g(y).$$

因为作为 y 的函数，$(\rho+|y|)^2 g(y)$可积，故交换微分与积分的次序是允许的.

为证命题 2，做变换 $y \mapsto \dfrac{y-x}{\sqrt{t}}$，$t>0, x \in X$，得到

$$\mathrm{P}_t f(x) = \int g_1(y) f(\sqrt{t}\,y+x)\,\mathrm{d}\lambda(y).$$

由 Fatou 引理可推出

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to z} f(x) &= \int g_1(y) \liminf_{(x,t)\to(z,0)} f(\sqrt{t}\,y+x)\mathrm{d}\lambda(y) \\
&\le \liminf_{(x,t)\to(z,0)} \int g_1(y) f(\sqrt{t}\,y+x)\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \liminf_{(x,t)\to(z,0)} \mathrm{P}_t f(x).
\end{aligned}$$

求上极限的情形类似. 故命题 2 的第一部分成立.

因 g_1 可积，对任意实数 $\varepsilon>0$，存在 X 的紧集 K 使得

$$\int_{X\setminus K} g_1\,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon.$$

当 f 为一致连续时，存在 $t_0>0$ 使得

$$|f(\sqrt{t}\,y+x) - f(x)| < \varepsilon$$

对 $x \in X, 0<t<t_0, y \in K$ 一致成立. 从而，对每个 $x \in X$，对任意实数 t，当 $0<t<t_0$ 时有

$$\begin{aligned}
|\mathrm{P}_t f(x) - f(x)| &= \left|\int g_1(y)[f(\sqrt{t}\,y+x) - f(x)]\mathrm{d}\lambda(y)\right| \\
&\le 2\|f\| \int_{X\setminus K} g_1\mathrm{d}\lambda + \varepsilon\int_K g_1\,\mathrm{d}\lambda \\
&\le (2\|f\|+1)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

由此推出命题 2 的第二部分.

再证命题 3. 取充分小的 $\varepsilon>0$ 使得对每个 $x\in K$, $B(x,\varepsilon)\subset U$. 于是，对每个 $x\in K$ 有

$$|P_t f(x)|\le\|f\|\,P_t(x,X\setminus B(x,\varepsilon))=\|f\|\,P_t(0,X\setminus B(0,\varepsilon)),$$

此处

$$P_t(0,X\setminus B(0,\varepsilon))=\int_E g_1(y)\mathrm{d}\lambda(y),\qquad E:=\{\sqrt{t}\,|y|\ge\varepsilon\}.$$

注意到当 $\sqrt{t}\,|y|\ge\varepsilon$ 时，$\frac{1}{t}\le|y|^2/\varepsilon^2$. 由于 y 的函数 $|y|^2g_1(y)$ 在 X 可积，据积分的绝对连续性知，

$$\lim_{t\to 0+}\ \frac{1}{t}P_t(0,X\setminus B(0,\varepsilon))=0\ .\square$$

3. 超过函数

设$(P_t)_{t>0}$ 是一个 Brown 半群. 设 f 为 $\boldsymbol{R}^N$ 上的、正的 Borel 函数，若满足 $\sup\limits_{t>0}P_tf=f$ ，则称 f 是关于该半群的**超过函数**. 用 $\mathbf{E}$ 表示这种超过函数全体.

若 f 是正的 Borel 函数且满足：

$$P_tf\le f$$

对所有 $t>0$ 成立，则称 f 是一个**超中位函数**. 将超中位函数全体记作 $\mathbf{S}$. 若 $f,g\in\mathbf{S}$ ，则 $\inf\{f,g\}\in\mathbf{S}$. 当 $f\in\mathbf{S}$ 时，对于任意实数 t 、 s ，当 $0<t<s$ 时有

$$P_sf=P_{t+(s-t)}f=P_tP_{s-t}f\le P_tf\ ,$$

因此， P_tf 作为 t 的函数是单调减少的.

定理 8-1-2 用 $\mathcal{U}_+$ 表示 $\boldsymbol{R}^N$ 上的正的超调和函数全体，则当 $N\ge 3$ 时

$$\mathcal{U}_+=\mathbf{E}=\{\sup_n f_n\,|\,\{f_n\}\text{是 }\mathbf{E}\cap C_0(\boldsymbol{R}^N)\text{中的单调增加列}\},$$

其中 $C_0(\boldsymbol{R}^N)$是 $\boldsymbol{R}^N$ 上这样的连续实函数 f 全体: f 在∞点趋于 0.

当 $N=1$ 或 2 时，$\mathscr{U}_+=\mathbf{E}$ 是 $\boldsymbol{R}^N$ 上正的常值函数全体.

证明 a) 令 $t>0$. 因为 g_t 关于以原点为中心的旋转变换是不变的，故存在一个可测函数 $\varphi_t: \boldsymbol{R}_+:=[0,\infty)\to\boldsymbol{R}_+$ 使得对每个正的 Borel 函数 f 有

$$\mathrm{P}_t f(0)=\int f g_t\,\mathrm{d}\lambda=\int_0^\infty\left(\int f\,\mathrm{d}\sigma_{0,\rho}\right)\varphi_t(\rho)\,\mathrm{d}\rho .$$

因 $\mathrm{P}_t 1=1$，故有 $\int_0^\infty \varphi_t(\rho)\,\mathrm{d}\rho=1$.

对取定的正的 Borel 函数 f 及 $x\in\boldsymbol{R}^N$，令

$$f_x=f_x(y):=f(x+y).$$

于是

$$\mathrm{P}_t f(x)=\mathrm{P}_t f_x(0)=\int_0^\infty\left(\int f_x\,\mathrm{d}\sigma_{0,\rho}\right)\varphi_t(\rho)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^\infty\left(\int f\,\mathrm{d}\sigma_{x,\rho}\right)\varphi_t(\rho)\,\mathrm{d}\rho .$$

取定一个 t，那么对每个 $u\in\mathscr{U}_+$有

$$\mathrm{P}_t u(x)=\int_0^\infty\left(\int u\,\mathrm{d}\sigma_{x,\rho}\right)\varphi_t(\rho)\,\mathrm{d}\rho$$

$$\le u(x)\int_0^\infty \varphi_t(\rho)\,\mathrm{d}\rho=u(x).$$

这里用到了本节第 1 段所述的，上调和函数满足上平均性质. 由上式知，$u\in\mathbf{S}$.

选取 $\boldsymbol{K}^+(\boldsymbol{R}^N)$中的单调增加列$\{f_n\}$使得$\sup\limits_n f_n=u$. 据定理 8-1-1 之(3)及 $\mathrm{P}_t u$ 关于 t 的单调递减性知，对每个 $n\in\mathbf{N}$ 有

$$f_n=\lim_{t\to 0}\mathrm{P}_t f_n\le\lim_{t\to 0}\mathrm{P}_t u=\sup_{t>0}\mathrm{P}_t u .$$

因而

$$u=\sup_n f_n\le\sup_{t>0}\mathrm{P}_t u\le u ,$$

即 u 是超过函数.

b) 反之，设 $f\in\mathbf{E}$. 首先考虑 $N\ge 3$ 的情况，对每个 $n\in\mathbf{N}$,

令

$$f_n := \inf\{f, n, nK_0\},$$

其中$K_0 := |x|^{2-N}$. 因为K_0为上调和函数,据上段证明知，$K_0 \in \mathbf{S}$. 从而，$f_n \in \mathbf{S}$．f_n 显然是有界 Borel 函数.

注意到$\mathrm{P}_t f_n$关于t 的单调减少性，由定理 8-1-1 之(1)知，

$$\frac{1}{2}\Delta \mathrm{P}_t f_n = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{P}_t f_n \leq 0.$$

由上段知，对任意$t > 0$和任意$n \in \mathbf{N}$，$\mathrm{P}_t f_n$是超调和的. 令

$$u_n := \mathrm{P}_{\frac{1}{n}} f_n,$$

那么，u_n 是$\boldsymbol{R}^N$上连续的、正的超调和函数，$\{u_n\}$是单调增加列且$f = \sup\limits_n u_n$ (因$f \in \mathbf{E}$)，故$f \in \mathcal{U}_+$, 并且对每个$n \in \mathbf{N}$，由

$$u_n \leq n\,\mathrm{P}_{\frac{1}{n}} K_0 \leq nK_0$$

知，$u_n \in \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{R}^N)$, 即$u_n$ 满足要求.

下面考虑$N = 1, 2$ 的情况，用

$$g_n := \inf\{f, n\}$$

代替上述的f_n，同样可证得$f \in \mathcal{U}_+$.

显然每个正的常值函数必属于$\mathcal{U}_+$. 现设$f \in \mathcal{U}_+$, 要证f 是正的常值函数. 为此,假定对某个正数a,存在x 使得$f(x) > a$. 我们要证$f \geq a$.

因为f下半连续,故存在正数$b > 0$ 及 $\delta > 0$使得在球$B(x, \delta)$上$f - a \geq b$. 选取充分小的实数$\varepsilon > 0$ 使得

$$u_\varepsilon := f - a - \varepsilon K(\cdot, x)$$

在 $\partial B(x, \delta)$上取正值. 这里K为$\boldsymbol{R}^N$(N=1 , 2)的位势核(见第 1 段), 它在$\boldsymbol{R}^N \setminus \{x\}$上为调和.

因此，只须对满足$|y - x| > \delta$ 的$y \in \boldsymbol{R}^N$ 证明有$f(y) > a$. 对这样的y，取实数ρ:$\rho > |y - x| > \varepsilon$ 充分大，使得在$\partial B(x, \rho)$上有

$\varepsilon K(\cdot, x) \leq -a$，从而在$\partial B(x,\rho)$上有 $u_\varepsilon \geq 0$．因为 u_ε是

$$D := B(x,\rho) \setminus \overline{B}(x,\delta)$$

上的调和函数，据极小值原理知，在 D 上有 $u_\varepsilon \geq 0$. 从而

$$f(y) - a \geq \varepsilon K(\cdot, x).$$

因 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，故$f(y) \geq a$. 再由 y 的任意性推出$f \geq a$. □

4. Brown 运动

下面简要介绍经典位势论（参看第三、十一章）与 Brown 运动的基本概念之间联系.

定义 设$(\Omega, \boldsymbol{F}, \xi)$为概率空间,其中 $\Omega=\{\omega\}$是基本事件集，$\boldsymbol{F}$ 为 Ω 的子集 σ 代数，ξ 为 $\boldsymbol{F}$ 上的概率测度. 考虑定义在 Ω 而取值于$\boldsymbol{R}^N$的随机过程$\{X_t\}_{t\geq 0}$,其中$X_t := X(t,\omega)$，有时也记作$X_t(\omega)$或 $X(t)$. 这个随机过程若满足下面三个条件，则称之为 N 维(或$\boldsymbol{R}^N$上的)**Brown 运动**：

(a) 对任意有限个实数 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$,

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_m) - X(t_{m-1})$$

相互独立；

(b) 对任意 $s \geq 0, t > 0$，增量 $X(s+t) - X(s)$有 N 维正态分布，其密度为 $p(t,x) := g_t(x), x \in \boldsymbol{R}^N$（$g_t$ 定义见第 2 段）.

(c) 对每个固定的 $\omega \in \Omega, X_t(\omega)$作为 t 的函数在$[0, \infty)$连续.

Brown 运动可看成一种强 Markov 过程.

以下设 $\mathbf{B}^N$ 为 $\boldsymbol{R}^N (N \geq 1)$上的 Borel 代数, $\{X(t)\}_{t\geq 0}$为 $\boldsymbol{R}^N$ 上的 Brown 运动.

在(b)中给出了 $X_{s+t} - X_s$的密度；而 X_t的分布，则依赖于 X_0 的分布. 设

$$\mu(A) := \xi(X_0 \in A), \quad A \in \mathbf{B}^N.$$

那么由 $X_t = (X_t - X_0) + X_0$，条件 a)及卷积公式，得

$$\xi_\mu(X_t \in A) := \xi(X_t \in A) = \int_A \left[\int p(t, x-y)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\lambda(y). \qquad (4.1)$$

令 $p(t,x,y) := p(t, x-y)$, $t>0, x, y \in \boldsymbol{R}^N$；称之为**转移密度**. 如果 $X_0(\omega) \equiv x$, 即 μ 集中在$\{x\}$, 这时把 ξ_μ 改写成 ξ_x，由(4.1)得

$$\xi_x(X_t \in A) = \int_A p(t,x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y).$$

因此可把 $p(t,x,y)$直观地理解为：作 Brown 运动的粒子，从点 x 出发，在时刻 t 转移到 y 附近的转移密度.

对 $B \in \mathbf{B}^N$, 当存在 $t>0$ 使 $X(t) \in B$ 时, 令τ_B 为这样的 t 的下确界, 否则令$\tau_B = \infty$；对 B 的余集 B^c 令 $\mathrm{T}_B := \tau_{B^c}$；又, 当$\tau_B < \infty$时记$\mathrm{L}_B := \sup\{t>0 \mid X(t) \in B\}$, 当$\tau_B = \infty$ 时, 令$\mathrm{L}_B = 0$. 分别称τ_B、T_B、L_B为 $X(t)$对 B 的**首中时间**, **首出时间和退出时间**，而

$$h_B(x,\cdot) := \xi_x(\tau_B < \infty, X(\tau_B) \in \cdot) \text{ 和}$$

$$q_B^t(x,\cdot) := \xi_x(\tau_B < t, X(t) \in \cdot)$$

分别称为从 x 出发的 Brown 运动对 B 的**首中分布和禁止分布**. 若 $\forall x \in \boldsymbol{R}^N$，$\xi_x(\tau_B < \infty) = 1$ (或 $= 0$), 则称 B 是**常返集** (或相应地, **非常返集**). 那么, 经典位势论的基本概念和性质可作如下解释:

(1) x 为 B 的正则点(或非正则点)当且仅当 $\xi_x(\tau_B = 0) = 1$ (或相应地, $= 0$)，其直观意义是从 x 出发的Brown粒子能(或相应地, 不能)立刻击中 B. B 是极集的充要条件是 $\xi_x(\tau_B < \infty) = 0$，$x \in \boldsymbol{R}^N$, 即从任何点 x 出发的 Brown 粒子都永远不击中 B.

(2) 对 $\boldsymbol{R}^N$ $(N \le 2)$的非空开集 D, 从 $x \in D$ 出发的 Brown 运动对 D^c 的击中分布 $H_D(X,\cdot) := h_{D^c}(x,\cdot)$ 正好是 D 在 x 的调和测度, 这时, 关于在∂D 上定义的有界且本性连续(即除去一个调和测度零集外连续) 的函数φ, Dirichlet 问题的一般 (广义) 解为:

$$H_\varphi(x)=\int\varphi(y)H_D(x,\mathrm{d}y)=\mathrm{E}_x(\varphi(X_{\mathrm{T}_D}),\mathrm{T}_D<\infty),$$

它在 φ 于该处连续的正则边界点 y (即 $y\in\partial D$ 且为 D^c 的正则点)处以 $\varphi(y)$为边界值. 另，当 $N\geq 3$ 且 D^c 为有界时，若事先不限制解在无穷远点的极限值，则解不唯一；但每个有界解可表为：

$$\mathrm{E}_x(\varphi(X_{\mathrm{T}_D}),\mathrm{T}_D<\infty)+a\,\xi_x(\mathrm{T}_D=\infty),\quad a \text{ 为常数}.$$

(3) $\boldsymbol{R}^N$ 的非空开集 D 若存在 Green 函数则称之为 **Green 集**，D 的 Green 函数可表示为

$$G(x,y)=\int_0^\infty\{p(t,x,y)-\mathrm{E}_x(p(t-\mathrm{T}_D,X(\mathrm{T}_D),y);\mathrm{T}_D<t)\}\mathrm{d}t;$$

而 $\mathrm{U}^\mu(x)=\int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$ ($\mu\geq 0$, 即μ是测度)就是 D 上的 Green 位势（见 § 3.8).

(4)当 $N\geq 3$，$\int_0^\infty C_N p(t,x,y)\mathrm{d}t$ 即为 Newton 核 $|x-y|^{2-N}$，其中常数

$$C_N:=2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2-1);$$

当 $N=2$ 时，$\pi\int_0^\infty[p(t,x,y)-p(t,x_0,y_0)]\mathrm{d}t$ 即为对数核$-\log|x-y|$，其中 x_0,y_0 为满足$|x_0-y_0|=1$ 的固定点. 从而得到 Newton 位势与对数位势用转移密度来表示的形式.

(5)设 f 是从非空开集 D 到$[0,\infty]$的函数，在 D 的任一连通成份上不恒为 ∞，若对 $t>0$ 及 $x\in D$ 恒有

$$f(x)\geq\int f(y)\,q^t_{D^c}(x,\mathrm{d}y)$$

且当 $t\downarrow 0$ 时，积分式收敛于 $f(x)$，则称 f 是 D 上的**超过函数**. 那么，$f\geq 0$ 在 D 内为上调和当且仅当 f 为超过函数（这与定理 8-1-2 一致）.

(6)类似地，可通过转移密度、击中分布、禁止分布等概念来描述 Riesz 分解、平衡问题、能量、容量、扫除、瘦等位势论的基本概念和它们的性质. 这使得经典位势论的概念都赋予相

应的概率意义. 例如, Dirac 测度 ε_x 到 $B \in \mathbf{B}^N (N \geq 3)$ 的扫除测度(又称 Green 扫除, 见第十一章), 即为 B 的击中分布 $h_B(x, \cdot)$; 对 Green 集 D 内的相对紧的 Borel 集 B, 任意正测度 μ 到 B 的扫除测度 μ' 存在, μ' 集中在 B 的基(即 B 于该处不瘦的点全体), 且

$$U^{\mu'}(x) = p_x(\tau_B < T_D).$$

上式也是到 Borel 集 B 的扫除测度存在的充分条件.

把上述空间 $\boldsymbol{R}^N$ 换成较为一般的局部紧的可分度量空间, 则 Brown 运动就变成 Hunt 过程. 这时, 测度的扫除、位势的概念等都可建立, 并可进一步研究各种与上述类似的问题.

§ 8.2 子 Markov 半群与预解族

本节假定 X 是具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间.

1. 核与扩散核

用 $\mathbf{B} := \mathbf{B}(X)$ 表示 X 上的 Borel 代数, $B(X)$ 表示 X 上的 Borel 函数全体, $B_b(X)$ 表示 X 上有界的 Borel 函数全体; α, β, s, t 等都表示实数或实变量.

定义 映射 $V: X \times \mathbf{B} \to [0, \infty]$ 若满足下面两个条件, 就称它是 X 上的一个核:

(K1) 对每个 $B \in \mathbf{B}$, $x \mapsto V(x, B)$ 是 Borel 可测函数;

(K2) 对每个 $x \in X$, $B \mapsto V(x, B)$ 是 $\mathbf{B}$ 上的测度.

核 V 若满足 $V(x, B) \leq 1$ 在 $X \times \mathbf{B}$ 恒成立, 就称之为**子 Markov 核**, 当其中等号处处成立时, 称之为 **Markov 核**. 若函数 $x \mapsto V(x, X)$ 是有界的, 就称 V 为**有界核或扩散核**. 若对 X 的每

个紧子集 K，函数 $x\mapsto V(x,K)$是有界的，则称 V 是**正常核**.

假定 V 是 X 上的一个核. 对 X 上的数值函数 f, 定义 X 上的数值函数 Vf 如下：

$$Vf(x)=V(f)(x)=\int^* f(y)V(x,\mathrm{d}y),$$

或记 $V_x:=V(x,\cdot)$, (上面已说过，对每个 $x\in X$, $B\mapsto V(x,B)$是 $\mathbf{B}$ 上的测度)，可把上式改写成

$$Vf(x)=\int^* f(y)\,\mathrm{d}V_x(y)\,.$$

当 $f\in \boldsymbol{B}^+(X)$时，因 f 可表示成为单调增加的、正的可测简单（阶梯）函数列$\{f_n\}$的极限. 于是，由条件(K1)推出, $Vf_n\in \boldsymbol{B}^+(X)$, 从而 $Vf\in \boldsymbol{B}^+(X)$. 当 V 是有界核，$f$ 是有界 Borel 函数时，Vf 也是有界 Borel 函数.

一般地，将核 V 看成从 $\boldsymbol{B}^+(X)$ 到 $\boldsymbol{B}^+(X)$的映射时有如下性质：

V1) $f,g\in \boldsymbol{B}^+(X)\Rightarrow V(f+g)=Vf+Vg$;

V2) $f\in \boldsymbol{B}^+(X)$, $\alpha\in[0,\infty)\Rightarrow V(\alpha f)=\alpha Vf$;

V3) 若$\{f_n\}$是 $\boldsymbol{B}^+(X)$中的单调增加列且收敛到 f，则

$$Vf=\lim_n Vf_n\,.$$

反之，从每个满足 V1 ~ V3 的映射 $V:\boldsymbol{B}^+(X)\to\boldsymbol{B}^+(X)$，可得到 X 上的一个核，这只要对每个 $x\in X$, $B\in\mathbf{B}$ 令

$$V(x,B):=V1_B(x)$$

即可. 按规定，这里 1_B 是 B 的特征函数.

进一步，若 $f\in\boldsymbol{B}(X)$, 用 f^+,f^-分别表示其正部与负部，令

$$Vf:=Vf^+-Vf^-,\quad \text{当右边不出现}\infty-\infty\text{时}.$$

容易验证，若 V,W 是 X 上的核，则 V+W 、αV (其中 $\alpha\in[0,\infty)$)、VW 也是 X 上的核，它们分别定义为：

$$(V+W)f:=Vf+Wf;$$

$$(\alpha V)f:=\alpha Vf;$$

$$(VW)f:=V(Wf)=\int^* Wf(y)\,\mathrm{d}V_x(y),$$

其中$f\in \boldsymbol{B}^+(X)$. 而且，对X上的一列核$\{\mathrm{V}_n\}$，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{V}_n\right)f:=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{V}_nf)$$

定义了X上的一个核 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{V}_n$.

注 本节给出的一般空间中的核的定义与§8.1中经典核的概念含义不同，其区别与联系可见于下面几个例子：

例 1 设$X=\boldsymbol{R}$, $t>0$, 那么下式定义了X上的一个核T_t:

$$\mathrm{T}_tf(x):=f(x-t),\qquad x\in X, f\in \boldsymbol{B}^+(X)$$

易知，它是一个 Markov 核. 称之为$\boldsymbol{R}$上的**t-平移**.

例 2 设μ是X上的一个测度，$\kappa: X\times X\to[0,\infty]$ 为 Borel 可测，那么

$$\mathrm{V}f(x):=\int\kappa(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y),\qquad x\in X, f\in \boldsymbol{B}^+(X),$$

定义了X上的一个核V. 特当 $X:=\boldsymbol{R}^N$, μ 为X上的 Lebesgue 测度时，其中$\kappa(x,y)$就是经典意义下的核. §8.2第2段定义的P_t就是这种形式的核（$\kappa(x,y)=g_t(x-y)$），它是一个 Markov 核.

例 3 设$X:=\boldsymbol{R}^N$, $G:=B(a,r)$, P_x是经典的 Poisson 核，那么

$$H_Gf(x):=\begin{cases}\int fP_x d\sigma_{a,r}, & 当x\in G,\\ f(x), & 当x\in X\setminus G.\end{cases}$$

定义了X上的一个核H_G，称为**关于G的调和核**.

2. 半群与预解族

定义 X上的一族核$\mathbf{P}:=(\mathrm{P}_t)_{t>0}$若满足：对任意$s,t\in(0,\infty)$有

$$\mathrm{P}_{s+t}=\mathrm{P}_s\mathrm{P}_t,$$

则称$\mathbf{P}$是一个半群. 若半群$\mathbf{P}:=(\mathrm{P}_t)_{t>0}$对每个$t>0$ 都有$\mathrm{P}_t1\le 1$，就称$\mathbf{P}$是一个**子 Markov 半群**；若对每个$t>0$都有$\mathrm{P}_t1=1$，就称$\mathbf{P}$是一个 **Markov 半群**；若每个P_t都是扩散核且对每个$f\in\boldsymbol{K}(X)$

及每个 $x \in X$，函数

$$t \mapsto \mathrm{P}_t f(x)$$

都是右连续的，则称 **P** 是(弱)右连续的.

半群 $\mathbf{P} := (\mathrm{P}_t)_{t>0}$ 称为可测的，如果对每个 $f \in \boldsymbol{B}^+(X)$，从 $X \times [0, \infty]$ 到 $[0, \infty]$ 的映射 $(x, t) \mapsto \mathrm{P}_t f(x)$ 为可测；半群 $\mathbf{P} := (\mathrm{P}_t)_{t>0}$ 称为可积的，如果

$$\sup_{x \in X} \int_0^\infty \mathrm{P}_t 1(x) \mathrm{d}t < \infty.$$

例 上节定义的 Brown 半群是 Markov 半群；$\boldsymbol{R}$ 上的平移核族 $\Pi := (\mathrm{T}_t)_{t>0}$ 也 Markov 半群.

以下实际上只涉及（弱）右连续的子 Markov 半群.

有时也称$(\mathrm{P}_t)_{t \geq 0}$ 是半群，这时实际上是补充定义核 P_0 使得：

$$\mathrm{P}_0 f := \sup_{t>0} \mathrm{P}_t f, \quad f \in \boldsymbol{B}^+(X),$$

而且$(\mathrm{P}_t)_{t \geq 0}$ 满足：对任意 $s, t \in [0, \infty)$有 $\mathrm{P}_{s+t} = \mathrm{P}_s \mathrm{P}_t$.

定理 8-2-1 设 f 是 X 上的有界 Borel 函数，则函数

$$(x, t) \mapsto \mathrm{P}_t f(x)$$

是 $X \times [0, \infty)$上的 Borel 函数.

证明 只须就 $f \geq 0$ 的情形证明之. 对 $n \in \mathbf{N}$，用 $\tau(n) = \tau(n)(t)$ 表示$[0, \infty)$上的函数，使得对任何 $m \in \mathbf{N}$，$\tau(n)$在区间

$$[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n})$$

上等于 $\frac{m+1}{2^n}$，那么，对所有 $n \in \mathbf{N}$，函数

$$(x, t) \mapsto \mathrm{P}_{\tau(n)(t)} f(x)$$

是 $X \times [0, \infty)$上的 Borel 函数. 因为

$$\mathrm{P}_t f(x) = \lim_n \mathrm{P}_{\tau(n)(t)} f(x), \quad (x, t) \in X \times [0, \infty),$$

故 $\mathrm{P}_t f(x)$是 $X \times [0, \infty)$ 上的 Borel 函数. □

定义 X 上的一族扩散核 $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha>0}$若满足下面两条件，则称之为 X 上的一个**预解族** (resolvent):

R1) 对任何 $\alpha>0$ 有 $\alpha U_\alpha 1\le 1$;

R2) 对任何 $\alpha,\beta>0$ ，当 $\alpha<\beta$时有下面所谓**预解方程**:

$$U_\alpha = U_\beta + (\beta-\alpha)U_\beta U_\alpha .$$

由定义，预解族$(U_\alpha)_{\alpha>0}$满足：对任意正的 Borel 函数f, 映射 $\alpha\mapsto U_\alpha f$是单调减的. 因此，可以补充定义 U_0如下：

$$U_0 f := \sup_{\alpha>0} U_\alpha f, \qquad f\in \boldsymbol{B}^+(X).$$

易知, U_0也是一个核，称之为**初始核**或关于预解族$(U_\alpha)_{\alpha>0}$的**位势核**. 条件 R2 蕴涵着，对任何 $\alpha>0$ 有

$$U_0U_\alpha = U_\alpha U_0 \text{ 且 } U_0 = U_\alpha + \alpha U_\alpha U_0.$$

因此，我们也常说$(U_\alpha)_{\alpha\ge 0}$ 是一个预解族.

定理 8-2-2 设$(U_\alpha)_{\alpha\ge 0}$ 是一个预解族. 那么

1) 对任何 $\alpha,\beta\ge 0$ ， $U_\alpha U_\beta = U_\beta U_\alpha$;

2) $I+\lambda U_0=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda U_\lambda)^n$，这里 I 是恒等核，实数 $\lambda>0$.

证明 1)设 $\alpha<\beta$. 因为 $\alpha=0$ 时的情形显然成立，故下面考虑 $\alpha>0$. 于是，对任何$f\in \boldsymbol{K}^+(X)$, 任何 $n\in \mathbf{N}$, 可用归纳法推出，

$$U_\alpha f=\sum_{m=0}^{n-1}(\beta-\alpha)^m U_\beta^{m+1} f+(\beta-\alpha)^n U_\beta^n U_\alpha f.$$

因为

$$\lim_n(\beta-\alpha)^n U_\beta^n f \le \lim_n((\beta-\alpha)/\beta)^n(1/\alpha)\sup_X f = 0,$$

故

$$U_\alpha f=\sum_{n=0}^{\infty}(\beta-\alpha)^n U_\beta^{n+1} f, \tag{2.1}$$

从而由预解方程得

$$U_\alpha U_\beta = U_\beta U_\alpha .$$

2)令 $\lambda:=\beta-\alpha>0$. 由(2.1)得

$$\lambda U_\alpha f=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda U_{\lambda+\alpha})^n f;$$

$$f+\lambda U_\alpha f=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda U_{\lambda+\alpha})^n f.$$

令 $\alpha\to 0$,得

$$f+\lambda \mathrm{U}_0 f=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \mathrm{U}_\lambda)^n f.$$

由f的任意性得

$$\mathrm{I}+\lambda \mathrm{U}_0=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \mathrm{U}_\lambda)^n \quad , \quad \lambda>0 . \qquad \square$$

定理 8-2-3 设 $\mathbf{P}:=(\mathrm{P}_t)_{t\geq 0}$是一个可测的子 Markov 半群. 对任意 $\alpha \geq 0$ 及任意 $x\in X$, 用 $\mathrm{U}_{\alpha,x}$ 表示X上如下定义的测度:

$$f \mapsto \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{P}_t f(x) \mathrm{d}t , \qquad f\in \boldsymbol{K}(X).$$

那么, $\mathbf{P}$ 可积当且仅当 U_0有界. 进一步, 当 $\mathbf{P}$ 可积时,

1) 对任意 $\alpha\geq 0$, $\mathrm{U}_\alpha:=(\mathrm{U}_{\alpha,x})_{x\in X}$是$X$上的一个扩散过程;

2) $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\geq 0}$是$X$上的一个预解族;

3) 对任意 $\alpha\geq 0, t\geq 0$ 有 $\mathrm{P}_t\mathrm{U}_\alpha=\mathrm{U}_\alpha\mathrm{P}_t$.

证明 由定理 8-2-1 立即推出结论 1 及 $\mathbf{P}$ 可积当且仅当 U_0有界. 因为 $\mathbf{P}:=(\mathrm{P}_t)_{t\geq 0}$是一个可测的子 Markov 半群, 对任意 $\alpha\geq 0$, $\alpha\mathrm{U}_\alpha 1\leq 1$ 显然成立.

由 $\mathrm{U}_{\alpha,x}$的定义推出, 对任意 $\alpha\geq 0$, 任意$x\in X$及X上的每个有界 Borel 函数f 有

$$\mathrm{U}_\alpha f=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{P}_t f(x)\mathrm{d}t.$$

对$f\in \boldsymbol{K}^+(X)$, $0\leq\alpha<\beta, x\in X$, 在下面积分中应用Fubini定理得,

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_\beta\mathrm{U}_\alpha f(x) &= \int \mathrm{U}_\alpha f\,\mathrm{dU}_{\beta,x} \\
&= \int \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{P}_t f(y)\mathrm{d}t\right)\mathrm{dU}_{\beta,x}(y) \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{U}_\beta\mathrm{P}_t f(x)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{P}_s\mathrm{P}_t f(x)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{P}_s f(x)\left(\int_0^{s} \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta s}\mathrm{P}_s f(x)\left(\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)s}-1\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}[U_\alpha f(x) - U_\beta(x)].$$

上式对任意$f \in B^+(X)$ 也是成立的，从而得到

$$U_\alpha = U_\beta + (\beta - \alpha)U_\beta U_\alpha.$$

即结论 2 成立. 结论 3 可类似地用 Fubini 定理来证明，留给读者作练习. □

定义 在定理 8-2-3 中定义的预解族$(U_\alpha)_{\alpha\geq 0}$称为由（可积的）子 Markov 半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ **生成的预解族**.

下面定理说明可积子 Markov 半群与其生成的预解族之间的对应是一对一的.

定理 8-2-4 X上的两个可积的子 Markov 半群生成的预解族相同时，则这两个半群是相同的.

证明 设$(P_t)_{t\geq 0}$与$(Q_t)_{t\geq 0}$是X上的两个可积的子 Markov 半群，它们生成的预解族相同. 设$f \in K(X), x \in X$, 用μ表示紧空间$[0, \infty]$上的带号测度，即如下定义的、$C([0, \infty])$上的泛函：

$$g \mapsto \int_0^\infty g(t)\,e^{-\alpha t}[P_t f(x) - Q_t f(x)]dt,$$

对任意$\alpha \in (0, \infty)$, 用g_α表示$C([0, \infty])$中的这样的函数：它在∞ 等于 0 而在$[0, \infty)$上等于$e^{-\alpha t}$. 据假定，对每个$\alpha \in (0, \infty)$有

$$\mu(g_\alpha) = 0, \qquad \mu(1) = 0.$$

因为对任意$\alpha, \beta \in (0, \infty)$ 有$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta}$, 故对$(g_\alpha)_{\alpha>0}$中实系数多项式 g 有 $\mu(g) = 0$. 据 Stone-Weierstrass 定理知，$\mu = 0$. 又因为函数

$$t \mapsto e^{-t}[P_t f(x) - Q_t f(x)]$$

是右连续的，所以，对任何$t \geq 0$有

$$P_t f(x) = Q_t f(x).$$

因为f 与x是任意的，故对任何$t \geq 0$有$P_t = Q_t$. □

3. 半群与预解族对应的上中位及超过函数

定义 (a)设 $\mathbf{P}:=(\mathrm{P}_t)_{t\geq 0}$是 X 上的（弱右连续的）子 Markov 半群，$f\in \boldsymbol{B}^+(X)$. 若对任何 $t\geq 0$ 有 $\mathrm{P}_t f\leq f$，则称 f 是 **P**-上中位函数. 若对每个 $x\in X$ 有

$$\sup \mathrm{P}_t f(x)=f(x),$$

其中上确界是关于 $t\geq 0$ 取的，则称 f 是 **P**-超过函数.

(b) 设 $\mathbf{U}:=(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\geq 0}$是 X 上的一个预解族，$f\in \boldsymbol{B}^+(X)$. 若对任任何实数 $\alpha\geq 0$ 有 $\alpha\mathrm{U}_\alpha f\leq f$，则称 f 是 **U**-上中位函数. 若对每个 $x\in X$ 有

$$\sup \alpha\mathrm{U}_\alpha f(x)=f(x),$$

其中上确界是关于 $\alpha\geq 0$ 取的，则称 f 是 **U**-超过函数.

定理 8-2-5 设 **P**、**U** 如上一定义所述，$f\in \boldsymbol{B}^+(X)$. 若 f 是 **P**-上中位函数，则对每个 $x\in X$，作为 t 的函数 $\mathrm{P}_t f$ 在$[0, \infty)$是单调减的；若 f 是 **U**-上中位函数，则对每个 $x\in X$，$\alpha\mathrm{U}_\alpha f(x)$作为 α 的函数在$[0, \infty)$是单调增的.

证明 设 $0\leq s<t, 0\leq\alpha<\beta$, 那么

$$\mathrm{P}_t f=\mathrm{P}_s\mathrm{P}_{t-s}f\leq \mathrm{P}_s f;$$

$$\begin{aligned}\alpha\mathrm{U}_\alpha f&=\alpha\mathrm{U}_\beta f+\alpha(\beta-\alpha)\mathrm{U}_\beta\mathrm{U}_\alpha f\\&\leq\alpha\mathrm{U}_\beta f+(\beta-\alpha)\mathrm{U}_\beta f\\&=\beta\mathrm{U}_\beta f.\end{aligned}$$ □

定理 8-2-6 设 **P** 如上一定义所述，f 是 **P** 超过函数. 则对每个 $t\geq 0$，$\mathrm{P}_t f$ 也是 **P** 超过函数.

证明 由上一个定理对每个 $s\geq 0$，有

$$\mathrm{P}_s\mathrm{P}_t f=\mathrm{P}_t\mathrm{P}_s f\leq \mathrm{P}_t f,$$

进一步，

$$\lim_{s\to 0} P_s P_t f = \lim_{s\to 0} P_t P_s f = P_t f. \square$$

定理 8-2-7 设 **U** 是由 X 上的、可积的子 Markov 半群生成的预解族. 那么 X 上的一个函数是 **U** 超过函数当且仅当它是 **P** 超过函数.

证明 设 f 是一个 **P** 超过函数，$x\in X$，$\alpha\geq 0$. 那么(下面关于 s 或 t 的积分区间都是$[0, \infty)$)，

$$\alpha U_\alpha f(x)=\alpha\int^{\infty} e^{-\alpha t} P_t f(x)dt \leq (\alpha\int^{\infty} e^{-\alpha t}dt) f(x)=f(x).$$

由定理 8-2-6 得，

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty}\alpha U_\alpha f(x) &= \lim_{\alpha\to\infty}\int^{\infty} e^{-\alpha t} P_t f(x)dt \\ &= \lim_{\alpha\to\infty}\int^{\infty} e^{-t} P_{t/\alpha} f(x)dt \\ &= \int^{\infty} e^{-t} f(x)dt = f(x).\end{aligned}$$

这就证明了 f 是 **U** 超过函数.

若 $f\in \boldsymbol{B}^{+}(X)$，$\beta\geq 0$. 则

$$\begin{aligned}e^{-\beta t} P_t U_\beta f(x) &= e^{-\beta t} U_\beta P_t f(x) \\ &= e^{-\beta t}\int^{\infty} e^{-\beta s} P_s P_t f(x)ds \\ &= \int^{\infty} e^{-\beta(s+t)} P_{s+t} f(x)ds \\ &\leq \int^{\infty} e^{-\beta s} P_s f(x)ds = U_\beta f(x).\end{aligned}$$

下设 f 是 **U** 超过函数. 对任意 $\alpha, \beta\geq 0$ 有

$$f+(\beta-\alpha)U_\alpha f=(f-\alpha U_\alpha f)+\beta U_\alpha f\geq 0.$$

因此对任何 $t\geq 0$，由上一关系式可推出，

$$\begin{aligned}e^{-\beta t} P_t U_\alpha f &= e^{-\beta t} P_t U_\beta(f+(\beta-\alpha)U_\alpha f) \\ &\leq U_\beta(f+(\beta-\alpha)U_\alpha f)=U_\alpha f.\end{aligned}$$

由 β 的任意性得，

$$P_t U_\alpha f\leq U_\alpha f.$$

因此，对任意 $x\in X$，有

$$P_t f(x) = \int^{*} f\, dP_{t,x} \le \lim_{\alpha\to\infty} \int^{*} \alpha U_\alpha f\, dP_{t,x}$$

$$\le \lim_{\alpha\to\infty} \alpha U_\alpha f(x) = f(x).$$

另一方面，由上面关系式可得出，

$$\lim_{t\to 0} P_t f(x) \ge \liminf_{t\to 0} e^{-\alpha t} P_t(\alpha U_\alpha f)(x)$$

$$= \liminf_{t\to 0} \alpha \int^{*} e^{-\alpha s} P_s f(x) ds$$

$$= \alpha U_\alpha f(x).$$

再由 α 的任意性得 $\lim_{t\to 0} P_t f = f$. □

4. 关于一个核的上中位函数

上段我们考虑了关于一族核(一个半群或一预解族)的上中位函数，其实它是关于其中每一个核都满足同一个性质的函数. 本节先就单个核 W 来考虑. 然后指出，所得结果可用以证明关于预解族的两个重要结论.

定义 设 W 为 X 上的一个核，一个函数 $g \in \boldsymbol{B}^{+}(X)$若满足

$$Wg \le g$$

就称为关于核 **W** 的上中位函数. 关于 W 的上中位函数全体记作 $\mathbf{S}(W)$.

显然, $\mathbf{S}(W)$是 $\boldsymbol{B}^{+}(X)$的一个凸的子锥; 对 $\mathbf{S}(W)$中的单调增加列$\{g_n\}$，有 $\sup_n g_n \in \mathbf{S}(W)$; 对 $\mathbf{S}(W)$中的任何一列函数$\{f_n\}$, $\inf_n f_n \in \mathbf{S}(W)$; 而且, 若 $g \in \mathbf{S}(W)$, $f \in \boldsymbol{B}^{+}(X)$且 $Wg \le f \le g$， 则 $f \in \mathbf{S}(W)$.

可定义 $\mathbf{S}(W)$上的缩减函数如下：对每个 $f \in \boldsymbol{B}^{+}(X)$, 令

$$R_f := \inf\{g \mid g \in \mathbf{S}(W) 且\ g \ge f\}.$$

显然，若用$f_1 := f^{+}$ 代替f，得到的是同一个缩减函数. 若 $R_f \in \boldsymbol{B}^{+}(X)$, 则必有 $R_f \in \mathbf{S}(W)$.

下一定理揭示了一个似乎出人意料的事实，即对 Borel 函数 f，总有 $R_f \in \mathbf{S}(W)$.

定理 8-2-8 (Mokobodzki G) 令 $f \in \boldsymbol{B}^+(X)$, 定义 $\boldsymbol{B}^+(X)$中的序列$\{g_n\}$使得 $g_1 := f$, 对一般的 $n \in \mathbf{N}$, 令 $g_{n+1} := \sup_n \{g_n, Wg_n\}$. 那么 $g := \sup_n g_n \in \mathbf{S}(W)$且 $R_f = g$.

证明 因$\{g_n\}$是单调增加列，故

$$Wg = \sup_n Wg_n \le \sup_n g_{n+1} = g,$$

即 $g \in \mathbf{S}(W)$. 因$f = g_1 \le g$, 故 $R_f \le g$. 反之,若 $q \in \mathbf{S}(W)$ 且 $q \ge f$, 由归纳法可证得 $q \ge g_n$, $n \in \mathbf{N}$. 这说明 $q \ge g$. 因此 $R_f \ge g$. 于是 $R_f = g$. □

定理 8-2-9 (Mokobodzki G) 设 $s, t \in \mathbf{S}(W)$, $f \in \boldsymbol{B}^+(X)$且满足 $s = t + f$, 那么存在一个函数 $t' \in \mathbf{S}(W)$ 使得 $t' \le t$ 且 $s = t' + R_f$.

证明 设 $h \in \boldsymbol{B}^+(X)$使得 $s = Ws + h$. 定义函数列$\{ t_n \}$如下:

$$t_1 := t\ ; \quad t_{n+1} := \inf\{t_n, Wt_n + h\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

于是 $t_1 \in \mathbf{S}(W)$; 假设已知 $t_n \in \mathbf{S}(W)$, 则 $Wt_{n+1} \le Wt_n \le t_n$, 同时 $Wt_{n+1} \le Wt_n + h$, 故 $Wt_{n+1} \le t_{n+1}$, 即 $t_{n+1} \in \mathbf{S}(W)$, 这说明$\{ t_n \}$是 $\mathbf{S}(W)$中的函数列.

如同上一定理的证明, 可 在 $\boldsymbol{B}^+(X)$ 中定义一个单调增加列 $\{g_n\}$使得

$$g_1 := f; \quad g_{n+1} := \sup \{g_n, Wg_n\}, n \in \mathbf{N}.$$

那么对每个 $n \in \mathbf{N}$ 有

$$s = t_n + g_n.$$

事实上, $s = t + f = t_1 + g_1$. 假定对某个 $n \in \mathbf{N}$ 有 $s = t_n + g_n$, 那么

$$Ws = Wt_n + Wg_n.$$

因而

$$s = Ws + h = Wt_n + Wg_n + h$$

且

$$s = \inf_n \{ t_n, \mathrm{W}t_n + h\} + \sup\{ g_n, \mathrm{W}g_n\} = t_{n+1} + g_{n+1}$$

令 $t' := \inf\limits_n t_n$，则有 $t' \in \mathbf{S}(\mathrm{W})$使得 $t' \le t$ 且 $s = t' + R_f$. □

由于这个性质在位势论中具有重要作用，例如我们看到的调和空间 X 上的正超调和函数全体满足 Riesz 分解定理和自然分解公理(见定理 6-1-5)，因此，有的文献(参看[6])用这个性质来给出位势锥的定义.

定义 若凸锥 $\mathscr{V} \subset \boldsymbol{B}^+(X)$满足下面性质，则称之为一个**位势锥**：对任何 $u, v \in \mathscr{V}$，任意 $f \in \boldsymbol{B}^+(X)$，当

在$\{ v < \infty \}$上有 $f = (u - v)^+$ 且在$\{v = \infty\}$上有 $f = 0$

成立时，必有

$$R_f := \inf\{ g \mid g \in \mathscr{V} \text{ 且 } g \ge f\} \in \mathscr{V},$$

且存在某个 $w \in \mathscr{V}$ 使得 $u = w + Rf$.

现在返回考虑关于一个子 Markov 预解族 $\mathbf{V} := (\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha>0}$的上中位函数族 $\mathbf{S}_\mathrm{V}$ 与超过函数族 $\mathbf{E}_\mathrm{V}$. 注意到

$$\mathbf{S}_\mathrm{V} = \cap_{\alpha>0} \mathbf{S}(\alpha \mathrm{V}_\alpha),$$

由上一定理，每个 $\mathbf{S}(\alpha \mathrm{V}_\alpha)$都是位势锥，故 $\mathbf{S}_\mathrm{V}$ 也是位势锥.

引理 8-2-10 对每个 $g \in \mathbf{S}_\mathrm{V}$，映射 $\alpha \mapsto \alpha \mathrm{V}_\alpha g$ 是单调增加的.

证明 由预解方程直接推出. □

定理 8-2-11 仍用 V_0 表示 $\mathbf{V}$ 的初始核，则位势锥 $\mathbf{S}_\mathrm{V}$ 满足：

(1) $\mathbf{S}_\mathrm{V}$ 中任何单调增加列的极限也在 $\mathbf{S}_\mathrm{V}$ 中，因此 $\mathrm{V}_0(\boldsymbol{B}^+(X)) \subset \mathbf{S}_\mathrm{V}$，即对任何 $f \in \boldsymbol{B}^+(X)$有 $\mathrm{V}_0 f \in \mathbf{S}_\mathrm{V}$；

(2) 对 $\mathbf{S}_\mathrm{V}$ 中的任何序列$\{g_n\}$有 $\inf\limits_n g_n \in \mathbf{S}_\mathrm{V}$.

证明 由引理 8-2-10 及定理 8-2-9 推出. □

定理 8-2-12 设 $g \in \mathbf{S}_\mathrm{V}$，令

$$g' := \sup_\alpha \alpha \mathrm{V}_\alpha g = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \mathrm{V}_\alpha g$$

(由引理 8-2-10, g' 存在且 $g' \in \boldsymbol{B}^+(X)$), 则

(1) g'是 g 在 $\mathbf{E_V}$ 中最大的弱函数（下属）;

(2) 由 $g \mapsto g'$定义的、从 $\mathbf{S_V}$ 到 $\mathbf{E_V}$ 上的映射是可加的, 正齐次的、单调增的; 而且对 $\mathbf{S_V}$ 中任何一个单调增列$\{g_n\}$，有

$$(\sup g_n)' = \sup g_n';$$

(3) $\mathbf{E_V}$ 是一个位势锥且其中任一单调增加列的极限仍在 $\mathbf{E_V}$; $V_0(\boldsymbol{B}^+(X)) \subset \mathbf{E_V}$.

证明 设 $g \in \mathbf{S_V}$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbf{N}$, 令 $g_n := \inf(g, n)$. 那么 $g_n \in \mathbf{S_V}$ 且对每个 $\beta > \alpha$，由预解方程得

$$V_\alpha g_n = V_\beta g_n + (\beta - \alpha) V_\alpha V_\beta \; g_n; \tag{2.2}$$

因 $V_\beta g_n \le g_n / \beta$, 故

$$\alpha V_\alpha V_\beta \; g_n \le \alpha V_\alpha (g_n / \beta) \le g_n / \beta.$$

在(2.2)式中, 令 $\beta \to \infty$，得 $V_\alpha g_n = V_\alpha g_n'$. 从而由上一定理得

$$V_\alpha g = \sup_n V_\alpha g_n = \sup_n V_\alpha g_n' = V_\alpha g'.$$

因此,

$$g' = \sup_\alpha \alpha V_\alpha g = \sup_\alpha \alpha V_\alpha g'.$$

这说明 $g' \in \mathbf{E_V}$. 映射 $g \mapsto g'$的可加性、正齐次及单调增性是显然的. 若$\{g_n\}$是 $\mathbf{S_V}$ 中的单调增列, 则

$$\sup_n g_n' = \sup_n \sup_\alpha \alpha V_\alpha g_n = \sup_\alpha \sup_n \alpha V_\alpha g_n$$

$$= \sup_\alpha \alpha V_\alpha (\sup_n g_n) = (\sup_n g_n)'.$$

又因 $\mathbf{E_V} \subset \mathbf{S_V}$, 故结论(2)成立.

若 $g \in \mathbf{S_V}$, $h \in \mathbf{E_V}$ 使得 $h \le g$，则由 $\mathbf{E_V}$ 的定义知,

$$h = \sup_\alpha \alpha V_\alpha h \le \sup_\alpha \alpha V_\alpha g = g'.$$

即结论(1)成立.

若$f \in \boldsymbol{B}_b^+(X)$, 则由(1)的子 Markov 性知, 对任意$\alpha > 0$ 有 $V_\alpha f \le \|f\| / \alpha$，从而由预解方程

$$\alpha V_\alpha V_0 f + V_\alpha f = V_0 f$$

推出 $V_0 f \in \mathbf{E}_V$. 因此，对一般的 $f \in \boldsymbol{B}^+(X)$,

$$V_0 f = \sup_n V_0(\inf\{f, n\}) \in \mathbf{E}_V. \ \square$$

5. 由核生成的预解族

定义 设 V 为 X 上的一个核. 称一个正的 Borel 函数 u 为 V 强函数，如果对所有有界 Borel 函数 f, 关系式 $Vf \le u$ 在 $\{f>0\}$ 成立蕴涵 $Vf \le u$.

若常数 1 是 V 强函数，则称 V 满足**完全的极大值原理**.

定理 8-2-13 设 $\mathbf{V} := (V_\alpha)_{\alpha>0}$ 为 X 上的子 Markov 预解族，而 V 为 $\mathbf{V}$ 的初始核，即 $V = V_0$. 那么每一个 $\mathbf{V}$ 上中位函数 u 都是 V 强函数；特别，V 满足完全极大值原理.

证明 任取一个有界的 Borel 函数 f, 并假定 $Vf \le u$ 在 $\{f>0\}$ 成立. 于是

$$Vf^+ \le Vf^- + u$$

在 $\{f>0\} = \{f^+>0\}$ 上成立. 对每个 $\alpha>0$, 由预解方程得

$$\alpha V_\alpha V_0 f^- \le V_\alpha f^- + \alpha V_\alpha V_0 f^- = V_0 f^-,$$

故 Vf^- 也是 $\mathbf{V}$ 上中位函数，故可以用 $u + Vf^-$ 来代替 u, 即可假定 $f \ge 0$. 由定理 8-2-2 之(2) 得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha V_\alpha)^n f = f + \alpha Vf,$$

故在 $\{f>0\}$ 上有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha V_\alpha)^n f \le \|f\| + \alpha u. \tag{2.3}$$

下面证明，对每个 $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ 有

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha V_\alpha)^i f \le \|f\| + \alpha u$$

事实上，$n = 0$ 时上式显然成立. 现假定上式对某个 $n \in \mathbf{N}$ 成立. 因为 $\alpha V_\alpha(\|f\| + \alpha u) \le \|f\| + \alpha u$ 故

$$\sum_{i=1}^{n+1}(\alpha V_\alpha)^i f \le \|f\| + \alpha u.$$

从而在$\{f=0\}$上有

$$\sum_{i=0}^{n+1}(\alpha V_\alpha)^i f = f + \sum_{i=1}^{n+1}(\alpha V_\alpha)^i f \le \|f\| + \alpha u. \qquad (2.4)$$

但据(2.3)式，(2.4)在$\{f>0\}$上也成立. 从而

$$f + \alpha V f = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha V_\alpha)^n f \le \|f\| + \alpha u.$$

两边同除 α 后，令 $\alpha \to \infty$ 得 $Vf \le u$. □

下面考虑逆问题. 假定V是X上的一个满足完全极大值原理的有界核. 其实，这也是存在一个相应的子 Markov 预解族的充要条件.

引理 8-2-14 设 $\alpha > 0$; $f, g \in \boldsymbol{B}_b(X)$，又假定 u 是 V 强函数使得$f \le u$ 且 $g + \alpha Vg = Vf$. 那么 $\alpha g \le u$.

证明 因 $V(\alpha(f - \alpha g)) = \alpha g \le f \le u$ 在$\{f - \alpha g \ge 0\}$上成立. 故

$$\alpha g = V(\alpha(f - g)) \le u. \ \square$$

引理 8-2-15 对每个 $\alpha > 0$，从 $\boldsymbol{B}_b(X)$ 到 $\boldsymbol{B}_b(X)$的线性映射 $I + \alpha V$ 是一个内射 (injection). 若$f, g \in \boldsymbol{B}_b(X)$且 $g = (I + \alpha V)^{-1}(Vf)$，则 $\alpha\|g\| \le \|f\|$.

证明 设 $\alpha > 0$; $f, g \in \boldsymbol{B}_b(X)$, 使得 $g + \alpha Vg = Vf$. 因为$\pm f \le \|f\|$ 且常数$\|f\|$是 V 强函数，由引理 8-2-14 得出 $\pm\alpha g \le \|f\|$，即 $\alpha\|g\| \le \|f\|$. 特取$f=0$，就有 $g=0$. 可见映射 $I+\alpha V$ 是一个内射. □

引理 8-2-16 对每个 $\alpha \ge 0$，$I+\alpha V$ 是从 $\boldsymbol{B}_b(X)$到 $\boldsymbol{B}_b(X)$的一个代数同构.

证明 当 $\alpha \ge 0$ 且 $\alpha\|V\| < 1$（$\|V\|$表示线性算子 V 的范数）时，由下式知结论成立：

$$(I+\alpha V)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha V)^n.$$

设 $\alpha_0 > 0$ 使得 $I+\alpha_0 V: \boldsymbol{B}_b(X) \to \boldsymbol{B}_b(X)$是一个代数同构. 令

$$0 < \alpha \le 2\alpha_0.$$

由引理 8-2-15 知，

$$\|(\alpha - \alpha_0)(I + \alpha_0 V)^{-1}V\| \le \frac{|\alpha - \alpha_0|}{\alpha_0} < 1 ,$$

从而 $I + (\alpha - \alpha_0)(I + \alpha_0 V)^{-1}V$: $\boldsymbol{B}_b(X) \to \boldsymbol{B}_b(X)$是一个同构. 故

$$I + \alpha V = (I + \alpha_0 V)\,(I + (\alpha - \alpha_0)(I + \alpha_0 V)^{-1}V)$$

也是一个同构. □

下面我们将利用这种满足完全极大值原理的、有界核 V 来产生一个预解族. 为此对每个 $\alpha \ge 0$ ，定义 V_α : $\boldsymbol{B}_b(X) \to \boldsymbol{B}_b(X)$ 为

$$V_\alpha := (I + \alpha V)^{-1}V ; \tag{2.5}$$

特别， $V_0 := V$.

引理 8-2-17 对每个 $\alpha > 0$, 线性映射 V_α : $\boldsymbol{B}_b(X) \to \boldsymbol{B}_b(X)$是正的且$\|\alpha V_\alpha\| \le 1$; 对所有 $\alpha, \beta \ge 0$ 有

$$V_\alpha - V_\beta = (\beta - \alpha)\, V_\alpha V_\beta . \tag{2.6}$$

证明 由引理 8-2-15 知，$\|\alpha V_\alpha\| \le 1$. 若$f \in \boldsymbol{B}_b(X)$且$f \le 0$, 因为 0 是 V 强函数，由引理 8-2-14 知 $V_\alpha f \le 0$, 故 V_α是正的. 下设 $\alpha, \beta \ge 0$. 因

$$\begin{aligned}&(I + \alpha V)(V_\alpha - V_\beta)\\ &= (I + \alpha V)\, V_\alpha - (I + \beta V)\, V_\beta + (\beta - \alpha)\, V\, V_\beta\\ &= (\beta - \alpha)(I + \alpha V) V_\alpha V_\beta .\end{aligned}$$

故(2.6)式成立. □

定理 8-2-18 设 V 是 X 上的有界核. 那么 X 上存在一个子 Markov 预解族$\mathbf{V} := (V_\alpha)_{\alpha > 0}$ 使得 $\sup\limits_\alpha V_\alpha = V$ 的充要条件是 V 满足完全的极大值原理. 这个预解族 $\mathbf{V}$ 由 V 唯一的确定.

证明 必要性由定理 8-4-1 得到. 下证充分性. 考虑(2.5)式定义的映射 V_α : $\boldsymbol{B}_b(X) \to \boldsymbol{B}_b(X)$. 当 $\alpha > 0$ 时，对每个 $f \in \boldsymbol{B}_b^+(X)$ 有

$$\mathrm{V}f - \mathrm{V}_\alpha f = \alpha \mathrm{V}_\alpha \mathrm{V}f \geq 0 .$$

即 $\mathrm{V}_\alpha f \leq \mathrm{V}f$. 因 $\boldsymbol{K}^+(X)$ 在 $\boldsymbol{B}^+(X)$ 中稠密， V_α可唯一地延拓成为 X 上的一个有界核，仍记之为 V_α.

对每个 $f \in \boldsymbol{B}_b^+(X)$，由上一引理

$$0 \leq \mathrm{V}f - \mathrm{V}_\alpha f = \alpha \mathrm{V}_\alpha \mathrm{V}f \leq \alpha \mathrm{V}\mathrm{V}f.$$

因此 $\lim_{\alpha\to 0} \|\mathrm{V}f - \mathrm{V}_\alpha f\| = 0$. 对 $f \in \boldsymbol{B}^+(X)$，令

$$f_n := \inf\{f, n\}, \quad n \in \mathbf{N},$$

得到

$$\begin{aligned} \sup_\alpha \mathrm{V}_\alpha f &= \sup_\alpha \sup_n (\mathrm{V}_\alpha f_n) \\ &= \sup_n (\sup_{\alpha>0} \mathrm{V}_\alpha f_n) \\ &= \sup_n \mathrm{V}f_n = \mathrm{V}f. \end{aligned}$$

类似地，(2.6)式可以延拓到 $\boldsymbol{B}^+(X)$，即预解方程成立. 这时 ，$\|\lambda \mathrm{V}_\lambda\| \leq 1$ 仍成立. 总之 $\mathbf{V} := (\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha>0}$ 满足定理的要求.

再证唯一性. 假定另有预解族 $\mathbf{U} := (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha>0}$ 满足

$$\sup_\alpha \mathrm{U}_\alpha = \mathrm{V}.$$

设 $\alpha>0$ ，$f \in \boldsymbol{B}_b(X)$. 于是

$$\mathrm{V}_\alpha f + \alpha \mathrm{V}\,\mathrm{V}_\alpha f = \mathrm{V}f = \mathrm{U}_\alpha f + \alpha \mathrm{V}\,\mathrm{U}_\alpha f,$$

令 $g := \mathrm{V}_\alpha f - \mathrm{U}_\alpha f$，得到 $g + \alpha \mathrm{V}g = 0$，由定理 8-2-15 知 $g = 0$. 因而 $\mathrm{V}_\alpha f = \mathrm{U}_\alpha f$. 由 f 的任意性就推出 $\mathrm{V}_\alpha = \mathrm{U}_\alpha$. □

§ 8.3 由连续位势构造的核

设 $X := (X, \mathcal{U})$是 $\mathbf{P}$ 调和空间.

依惯例，对 X 的点 x，用 ε_x表示集中在单点子集$\{x\}$的单位正质分布，即对任意一个 Borel 集 B （即 $B \in \mathbf{B}(X)$），当 $x \in B$

时, $\varepsilon_x(B)=1$ 时；而当 $x\in X\setminus B$ 时, $\varepsilon_x(B)=0$.

用 $\mathcal{PC}$ 表示 X 上所有实值连续位势组成的凸锥，$\mathcal{M}^+:=\mathcal{M}^+(X)$ 表示 X 上的测度全体. 令

$\mathcal{P}_c:=\{p\in\mathcal{PC}\mid$ 存在 X 的紧子集 K 使得 p 在 $X\setminus K$ 调和$\}$;

$\Lambda:=\{\mu\in\mathcal{M}^+\mid$ 每个 $p\in\mathcal{P}_c$ 关于 μ 可积$\}$.

显然 Λ 是一个凸锥，每个具有紧支柱的测度都属于 Λ.

引理 8-3-1 设 $\mu\in\mathcal{M}^+$, 如果存在一个关于 μ 可积的、取严格正值的、X 上的超调和函数 u, 则 $\mu\in\Lambda$.

证明 对任意 $p\in\mathcal{P}_c$, 假定它在紧集 K 之外调和, 那么可找到一个正数 α 使得在 K 上有 $p<\alpha u$. 注意到函数 $\sup\{p-\alpha u,0\}$ 是位势 p 的下调和下属, 知 $\sup\{p-\alpha u,0\}\le 0$, 从而 $p\le\alpha u$ 在 X 成立. 由此推出 p 关于 μ 可积. □

本节以下若无另加声明，都假定 $X=(X,\mathcal{U})$ 是具有可数基的 $\mathbf{P}$ 调和空间.

1. 严格位势

定义 X 上的一个位势 p 称为**严格位势**, 如果对任何两个 μ, $\nu\in\mathcal{M}^+$, 当它们满足下面两条件时就必有 $\mu=\nu$:

(a) $\int p\,d\mu=\int p\,d\nu<\infty$;

(b) 对 X 上每一个正的超调和函数 u 都有

$$\int u\,d\mu\le\int u\,d\nu\ .$$

由条件 a 、b, 就可以断定 $\mu,\nu\in\Lambda$. 事实上, 严格位势 p 在 X 上点点不为 0. 否则, 若存在 $x\in X$ 使得 $p(x)=0$, 那么可取 $\mu=0$, $\nu=\varepsilon_x$, 这时有 $\int p\,d\mu=\int p\,d\nu=0$.

条件 b 对此 μ, ν 显然满足, 据严格位势的定义必须有 $\varepsilon_x=0$, 矛盾. 于是由引理 8-3-1 知，$\mu,\nu\in\Lambda$.

注　即使不假定 X 具有可数基，下面结论也成立:

(1)有的文献(如[10])在条件 b 中考虑的是 u 的上积分，其实，根据广义 Riesz 表示定理(§ 2.6)，对任意正的 Borel 函数，特别是正的下半连续函数，关于 Radon 测度的积分与上积分都是有意义的，且二者相等. 因此，关于正的超调和函数，可以用积分代替上积分.

(2) 条件 b 等价于:

(b′) 对 X 上每一个位势 $p \in \mathcal{P}_c$ 都有

$$\int p\,\mathrm{d}\mu \le \int p\,\mathrm{d}\nu .$$

因为据定理 5-3-1 和推论 5-4-2，每个正的超调和函数 u 都是 $\mathcal{P}_c$ 的一个上定向子族的上确界函数，据定理 2-3-4, (b′)蕴涵(b). □

回顾 § 6.1　在正超调和函数凸锥 $\mathcal{U}_+ := \{ u \ge 0 \mid u \in \mathcal{U} \}$ 中定义的一个殊序"$\prec$"：对任意 $u, v \in \mathcal{U}_+$，

$$u \prec v \iff \text{存在 } w \in \mathcal{U}_+ \text{ 使得 } u + w = v .$$

定义　X 上的一个位势 p 称为**超严格位势**，如果对任何 $f \in \boldsymbol{K}^+(X)$ 及任何实数 $\varepsilon > 0$，存在 $p', p'' \in \mathcal{PC}$ 满足下面三条件:

A) 存在 $\alpha \in [0, \infty)$ 使得 $p' + p'' \prec \alpha p$；

B) p' 与 p'' 在 f 的支柱之外调和;

C) $0 \le p'' - p' \le f \le p'' - p' + \varepsilon$.

显然，超严格位势必为严格位势. 请读者自行验证（提示：只要证，对满足严格位势条件 a, b 的 μ 与 ν，若存在 $f \in \boldsymbol{K}^+(X)$, $f \ne 0$ 使得 $\int f\,\mathrm{d}\mu \ne \int f\,\mathrm{d}\nu$，则导出矛盾.）

定理 8-3-2 (Herve M M-Bauer H)　设 $\mu \in \Lambda$，u 是 X 上严格正的超调和函数，那么存在有 μ 可积的超严格位势 $p \in \mathcal{PC}$，使得

$$p \le u.$$

证明　据定理 1-4-8, $\boldsymbol{K}(X)$中存在一个可数的稠密子集$\{f_n\}$使得对任意$f \in \boldsymbol{K}(X)$，任意 $\varepsilon > 0$，存在某个f_n，使得 $d(f, f_n) < \varepsilon$ 且f_n 的支柱包含于 f 的支柱. 又据定理 5-4-13，对任意自然数 n，存

在 p_n、$q_n \in \mathcal{P}_c$ 使得 p_n，q_n 在 f_n 的支柱之外调和且

$$0 < p_n - q_n \le f_n \le p_n - q_n + 1/n .$$

因为 X 具有可数基，故存在由 X 的相对紧开集构成的一个增加列 $\{U_n\}$，使得

$$\cup_{n=1}^{\infty} U_n = X;\quad \overline{U_n} \subset U_{n+1}\ ,\quad n \in \mathbf{N}$$

对每个 $n \in \mathbf{N}$，令

$$\alpha_n := \sup_{U_n}(p_n + q_n),\quad \beta_n := \int (p_n + q_n)\mathrm{d}\mu$$

$$\gamma_n := \sup_X[(p_n + q_n)/u].$$

这些数都是有限的. 再令

$$p := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n + q_n}{2^{n+1}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + 1)}.$$

那么 $p \in \mathcal{PC}, p \le u$ 且 p 关于 μ 可积.

下证 p 是超严格的位势. 设 $f \in \mathcal{K}^+(X), \varepsilon > 0$. 那么存在自然数 n 使得

$$n\varepsilon > 2\ ,\quad f_n \le f \le f_n + \varepsilon/2.$$

于是相应的 p_n, q_n 具有下述性质:

a) $p_n + q_n \prec 2^{n+1}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + 1)p$;

b) p_n 与 q_n 皆在 f 的支柱之外调和;

c) $0 \le p_n - q_n \le f \le p_n - q_n + \varepsilon$.

故 p 是一个超严格位势. □

注意到 $u \equiv \infty$ 是严格正的超调和函数，故具有可数基的 **P** 调和空间必存在这样的超严格位势 p，它是连续的，取严格正值.

回顾 § 1-3 函数锥的定义，同时给出的记号

$$\Sigma(\mathcal{F}) := \{ v \mid v \text{ 是 } \mathcal{F} \text{ 中某个单调增加列的极限}\},$$

其中 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个数值函数族，容易得到

定理 8-3-3 $\mathcal{PC}$ 是一个函数锥且 $\Sigma(\mathcal{PC}) = \mathcal{U}_+$.

证明 由定理 8-3-2，凸锥 $\mathcal{PC}$ 中有严格正的位势 p；又由

定理 5-4-4 知, $\mathcal{PC}$ 能分辩 X 中的点. 因为 $\mathcal{PC} \subset \mathcal{U}_+$, 自控性显然满足. 故 $\mathcal{PC}$ 是函数锥.

对任意 $u \in \mathcal{U}_+$,因 X 有可数基, 据推论 5-4-2 , 存在由具有紧支柱的连续函数构成的单调增加列$\{g_n\}$使得

$$u = \sup_n Rg_n .$$

因为 X 是 $\mathbf{P}$ 调和空间,故 Rg_n 是连续位势,这蕴涵 $\Sigma(\mathcal{PC}) = \mathcal{U}_+$. □

2. Choquet 边界与位势的细支柱

定义 设 Y 是具可数基的局部紧空间, $\mathfrak{I}$ 是由 Y 上的下半连续函数组成的一个凸锥. 对任意 $y \in Y$, 令

$$\mathcal{M}_y(\mathfrak{I}) := \{\mu \in \mathcal{M}^+ \mid -\infty < \mu(g) \le g(y), \forall\, g \in \mathfrak{I}\}.$$

$$\mathrm{Ch}_{\mathfrak{I}}\, Y := \{y \in Y \mid \mathcal{M}_y(\mathfrak{I}) = \{\varepsilon_y\}\}.$$

$\mathrm{Ch}_{\mathfrak{I}}\, Y$ 称为 Y 上相对于$\mathfrak{I}$的 **Choquet 边界**.

注 $\mu(g)$表示 g 关于μ 的积分.

我们知道, 必有$\varepsilon_y \in \mathcal{M}_y(\mathfrak{I})$, 因此 $y \in Y$ 是 Y 上的 Choquet 边界点当且仅当 $\mathcal{M}_y(\mathfrak{I})$为单元素集.

Choquet 边界提供了一种一般形式的、关于函数锥的极小值原理. 限于篇幅, 对此书仅介绍一些较重要的结论而已. 有兴趣的读者可参见 Bliedtner J, Hansen W[6].

定理 8-3-4 假定上面所说凸锥$\mathfrak{I}$ 包含了一个函数锥 $\boldsymbol{W}$ ($\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{C}^+(X)$) , 使得每个 $f \in \mathfrak{I}$是 $\boldsymbol{W}$-下有界的, 即存在 $g \in \boldsymbol{W}$ 使得 $f \ge -g$. 如果 $f \in \mathfrak{I}$ 且在 $\mathrm{Ch}_{\mathfrak{I}}\, Y$ 上有 $f \ge 0$, 则 $f \ge 0$. □

以下考虑具可数基的 $\mathbf{P}$ 调和空间$(X, \mathcal{U})$, 仍设 $\mathcal{PC}$ 是 X 上的连续实位势全体构成的函数锥.

定义 令 $\mathbf{C}_{\mathcal{PC}}(X) := \{\, g \in C(X) \mid$ 存在 $p \in \mathcal{PC}$ 使得$|\, g \,| \le p\,\}$, 对任意 $f \in \mathbf{C}_{\mathcal{PC}}(X)$, 称

$$\delta(f) := \mathrm{Ch}_{\mathfrak{I}} X \tag{3.1}$$

为 f 的**细支柱**, 其中

$$\mathfrak{I} := \mathcal{PC} - R_+ f := \{p - \alpha f \mid p \in \mathcal{PC}, \alpha \in R_+\}, \quad R_+ := [0,\infty).$$

特别, 当 $q \in \mathcal{PC}$ 时, $\delta(q)$称为**位势** q **的细支柱** (下面将看到, 它是一个细闭的 Borel 集). 那么 X 中的点 $x \in \delta(q)$当且仅当ε_x是满足下面两条件的唯一测度$\mu \in \mathcal{M}^+$:

(1) $\mu(q) = q(x)$;

(2) 对每个 $p \in \mathcal{PC}$ 都成立$\mu(p) \le p(x)$.

进一步, 对一般的$f \in \mathbf{C}_{\mathcal{PC}}(X)$有

$$\delta(f) = \{x \in X \mid \varepsilon_x \text{是唯一满足} \mu(f) \ge f(x) \text{ 的 } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{PC})\}.$$

引理 8-3-5 若 $p, q \in \mathcal{PC}$ 且 $p \prec q$, 则$\delta(p) \subset \delta(q)$.

证明 假设 $x \in \delta(p)$ 且$\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{PC})$满足$\mu(q) \ge q(x)$. 因为 $\mu(p) \le p(x)$ 及

$$\mu(q - p) \le (q - p)(x)$$

(由(3.1)式及 $\mathcal{M}_x(\mathcal{PC})$的定义)并注意到 $q - p \in \mathcal{PC}$, 推出$\mu(p) = p(x)$. 因为 $x \in \delta(p)$, 故 $\mu = \varepsilon_x$. 这说明 $x \in \delta(q)$. □

引理 8-3-6 设$p \in \mathcal{PC}$, $\mathcal{V}$是$\mathcal{PC}$的一个上定向子集且每个 $q \in \mathcal{V}$满足 $q \prec p$, 则 $\sup\mathcal{V} \in \mathcal{PC}$ 且 $\sup\mathcal{V} \prec p$.

证明 令 $\mathcal{G} := \{p - q \mid q \in \mathcal{V}\}$, 则 $\mathcal{G} \subset \mathcal{PC}$ 且为下定向集,

$$p = \sup\mathcal{V} + \inf\mathcal{G}.$$

由定理 6-1-8 知, $\sup\mathcal{V} \in \mathcal{U}_+$. 因此 $p = \sup\mathcal{V} + \hat{\ }\inf\mathcal{G}$, 从而

$$\sup\mathcal{V} \in \mathcal{U}_+ \cap \mathbf{C}_{\mathcal{PC}} = \mathcal{PC}$$

且 $\inf\mathcal{G} = \hat{\ }\inf\mathcal{G} \in \mathcal{PC}$. □

定义 对每个 $p \in \mathcal{PC}$, $\mathrm{C}(p) := \overline{\delta(p)}$ 称为**位势** p **的支柱**.

定理 8-3-7 对每个 $p \in \mathcal{PC}$ 有 $R_p^{\delta(p)} = p$. 而且, $\mathrm{C}(p)$是满足

$$R_p^E = p$$

的最小闭集 $E (\subset X)$.

证明 若 $u \in \mathcal{U}_+$ 且在 $\delta(p)$ 上有 $u \geq p$. 据定理 8-3-4 知 $u \geq p$ 在 X 成立. 因此 $R_p^{\delta(p)} = p$.

再设 $E \subset X$ 为闭集且 $R_p^E = p$. 那么, 据定理 9-1-2 、 9-1-7 和 6-2-9 , 对每个 $x \in X \setminus E$, 有

$$\varepsilon_x^E \in \mathcal{M}_x(\mathcal{PC}) \setminus \{\varepsilon_x\}, \tag{3.2}$$

故 $x \in X \setminus \delta(p)$. 这里 ε_x^E 是 ε_x 在集 E 的扫除测度, 参看 § 9.1 (注意, 扫除测度的存在见定理 9-1-2, 该定理及定理 9-1-7 的证明不必用到本定理及本章此后的结论, 因此不会导致循环论证). 从而 $\delta(p) \subset E$, 进一步, $C(p) \subset E$.□

推论 8-3-8 对所有 $p, q \in \mathcal{PC}$ 有

$$C(p+q) = C(p) \cup C(q).$$

证明 由引理 8-3-5 知 $C(p) \cup C(q) \subset C(p+q)$. 另一方面, 若令 $E := C(p) \cup C(q)$, 则由定理 6-2-1 及 8-3-7 得

$$R_{p+q}^E = R_p^E + R_q^E = p + q\ ,$$

再次应用定理 8-3-7 , 推出 $C(p+q) \subset C(p) \cup C(q)$. □

3. 内逼限制函数与位势核

前面我们已看到, 缩减函数 R_u^E 在研究中起了很大作用, 它是在 E 上优于(按正常序) u 的正超和函数族的下确界. 下面为了利用位势的来构造核, 进而构造 Markov 半群与预解式, 引进所谓**内逼限制函数** p_B , 即一个位势 $p \in \mathcal{PC}$ 在 X 的一个子集 B 的内逼限制函数.

定义 设 $p \in \mathcal{PC}$, B 为 X 的子集. 令

$$p_B := \sup\{q \in \mathcal{PC} \mid q \prec p,\ C(q) \subset B\},$$

特别, 当 $B = \varnothing$ 时, $p_B := 0$.

显然, 当 $B = X$ 时, $p_B = p$.

定理 8-3-9 设 $p \in \mathcal{PC}$, 那么对 X 上的 Borel 集 B 有

$$p_B \in \mathcal{PC}, \quad p_B \prec p \quad \text{且} \quad \mathrm{C}(p_B) \subset B.$$

证明 令 $\mathcal{G} := \{q \in \mathcal{PC} \mid q \prec p, \mathrm{C}(q) \subset B\}$. 那么 $\mathcal{G}$ 是一个上定向族. 事实上, 设 $f, g \in \mathcal{G}$, 令

$$q := f + R(g - f).$$

显然 $q \geq f$ 且 $q \geq g$; 而且据定理 6-1-8 之(3)的证明过程知 $R(g - f) \in \mathcal{PC}$ 且 $R(g - f) \prec g$. 故由推论 8-3-8 知

$$\mathrm{C}(R(g - f)) \subset \mathrm{C}(g),$$

从而

$$\mathrm{C}(q) = \mathrm{C}(f) \cup \mathrm{C}(R(g - f)) \subset \mathrm{C}(f) \cup \mathrm{C}(g) \subset B.$$

因为

$$p - q = p - f - R(g - f) = (p - f) - R((p - f) - (p - g)),$$

其中 $p - f, p - g \in \mathcal{PC}$. 故 $p - q \in \mathcal{PC}$, 即 $q \prec p$, 从而 $q \in \mathcal{G}$.

故由引理 8-3-6 知 $p_B \in \mathcal{PC}$ 且 $p_B \prec p$.

下证 $\mathrm{C}(p_B) \subset B$. 对每个 $q \in \mathcal{G}$, 显然 $R^B_{p_B} \geq R^B_q = q$, 从而 $R^B_{p_B} \geq p_B$, 因 $p_B \in \mathcal{PC}$, 故 $R^B_{p_B} = p_B$. 由定理 8-3-7 知 $\mathrm{C}(p_B) \subset B$.□

注 类似证明的最后一段, 可推出: 设 A 为 X 的闭子集, $\mathcal{V} \subset \mathcal{PC}$. 若 $p := \sup \mathcal{V} \in \mathcal{PC}$ 且对每个 $q \in \mathcal{V}$ 有 $\mathrm{C}(q) \subset A$, 则 $\mathrm{C}(p) \subset A$.

推论 8-3-10 在定理的条件下,

$$p_B = \sup\{p_E \mid E \text{ 为闭集且 } E \subset B\}.$$

证明 对 $q \in \mathcal{G}$, 显然有 $q \leq p_{\mathrm{C}(q)}$. 其余显然. □

由定义及上述结论, 易推出一系列结果, 今罗列于下, 建议读者把它们作为练习补充完整.

命题 8-3-11 设 $p \in \mathcal{PC}$, $B, E, B_n\,(n \in \mathbb{N})$ 都是 X 的 Borel 子集.

(1)若 $p_1, p_2 \in \mathcal{PC}$ 使得 $p_1 \prec p$, $p_2 \prec p$ 且 $\mathrm{C}(p_1) \cap \mathrm{C}(p_2) = \varnothing$, 则

$$p_1 + p_2 \leq p;$$

(2)对 X 的每一个开集 U 有, $\mathrm{C}(p - p_U) \subset X \setminus U$; 从而

$$p_U + p_{X\setminus U} = p;$$

进一步，对每个 Borel 集 B 都有

$$p_B + p_{X\setminus B} = p.$$

更一般地，若 $B\cap E = \varnothing$，则 $p_B + p_E = p_{E\cup B}$;

(3) $p_B = \inf\{ p_V | V$ 为包含 B 的开集$\}$;

(4) $p_B = \sup\{p_K | K$ 为 B 的紧子集$\}$;

(5) 若$\{B_n\}$是一个增加集列且 $B = \cup_n B_n$，则

$$p_B = \sup\{ p_{B_n} | n \in \mathbf{N}\};$$

(6) 若 $B\cap\delta(p) = \varnothing$，则 $p_B = 0$;

(7) $\delta(p)$是细闭的 Borel 集且 $p_{X\setminus\delta(p)} = 0$; p 是严格位势当且仅当 $\delta(p) = X$. □

定理 8-3-12 对每个 $p\in\mathcal{PC}$，映射 V：$(x, B)\mapsto p_B$ 是 X 上的一个核且满足

a) $\mathrm{V}1 = p$;

b) 对每个有界的、正的 Borel 函数 f，有 $\mathrm{V}f\in\mathcal{PC}$ 且

$$\mathrm{C}(\mathrm{V}f)\subset \mathrm{S}(f).$$

核 V 是由条件(1),(2)唯一确定的，称 V 为关于 p 的位势核.

证明 先验证 V 是核. 对 $B\in\mathbf{B}(X)$，p_B是连续的位势，故为 Borel 可测. 对 $x\in X$，若用 μ 表示 $\mathbf{B}(X)$上的集函数: $B\mapsto p_B(x)$，由命题 8-3-11(2)知,

$$p_B(x) + p_{X\setminus B}(x) = p(x) = p_X(x)\text{. 即}$$

$$\mu(B) + \mu(X\setminus B) = \mu(X).$$

再由同一命题之(2),(5)知 μ 是 X 上的一个测度，故 V 是核.

$$\mathrm{V}1 = \mathrm{V}1_X = p_X = p.$$

若f是一个有界的 Borel 函数，先考虑f为阶梯函数. 由定理 8-3-9 知，$\mathrm{V}f\in\mathcal{PC}$. 且

$$\mathrm{C}(\mathrm{V}f)\subset \mathrm{S}(f),\qquad \mathrm{V}f + \mathrm{V}(\|f\| - f) = \|f\|\,p.$$

从而可由引理 8-3-6 及定理 8-3-9 之注推出 b)成立.

再证唯一性. 设 W 为 X 上的核, 满足条件 a), b); 又设 $B \in \mathbf{B}(X)$. 那么,

$$\mathrm{W}1_B = \sup\{\mathrm{W}1_K \mid K \text{ 为 } B \text{ 的紧子集}\}$$
$$\le \sup\{q \in \mathcal{PC} \mid \mathrm{C}(q) \subset B, q \prec p\} = p_B .$$

把 B 换成 B 的余集 $X \setminus B$, 就得到, $\mathrm{W}1_{X\setminus B} \le p_{X\setminus B}$. 因 W 是核且满足条件 a),

$$\mathrm{W}1_B + \mathrm{W}1_{X\setminus B} = \mathrm{W}1 = p = p_B + p_{X\setminus B}.$$

因此, $\mathrm{W}1_B = p_B$, 这说明 $\mathrm{W} = \mathrm{V}$. □

推论 8-3-13 对任意 $p, q \in \mathcal{PC}, \alpha, \beta \in [0, \infty)$ 及 $B \in \mathbf{B}(X)$ 有

$$(\alpha p + \beta q)_B = \alpha p_B + \beta q_B \ ;$$

对所有 $p \in \mathcal{PC}$ 及 $A, B \in \mathbf{B}(X)$ 有 $(p_A)_B = p_{A\cap B}$. □

注 定理 8-3-12 中位势核的直观背景是: 在 $\boldsymbol{R}^N$ $(N \ge 3)$的经典位势论中, 位势 p :

$$x \mapsto \int |x - y|^{2-N} \mathrm{d}\mu(y)$$

所对应的核 $p_B(x)$为

$$(x, B) \mapsto \int_B |x - y|^{2-N} \mathrm{d}\mu(y) .$$

§ 8.4 调和空间的子 Markov 半群

本节假定 X 是具有可数基的 $\mathbf{P}$ 调和空间.

本节的目的是构造一个子 Markov 半群 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}$ 超过函数全体 $\mathbf{E_P}$ 与正超调和函数全体 $\mathcal{U}_+$ 等同(参看定理 8-1-2). 因为这个半群具有一些特性, 保证了构造一个强 Markor 过程(具有连续轨道)成为可能. 这样一来, 调和空间的位势论与 Hunt 的位势论就可

以通过建立二者之间的一些关键性概念的对应而密切联系起来. 下面建立的对应是借助于一个有界的、连续的严格位势来构造一个半群, 其实有关的结果可以适用更一般的情形.

下面讲到一个函数f时, 若未指明定义域, 皆是X上的函数. 用简化的记号$\{f>0\}$代替$\{x\in X\,|\,f(x)>0\}$, 其余类似.

1. 位势核产生的预解族

引理 8-4-1 设Y是具有可数基的局数紧Hausdorff空间, $\mathbf{V}$是Y上的子Markov预解族, 其位势$\mathrm{V}:=\mathrm{V}_0$是有界核. 那么, $\mathbf{V}$上中位函数全体$\mathbf{E}_\mathbf{V}$满足

$\mathbf{E}_\mathbf{V}=\{g\,|\,$存在$\boldsymbol{B}_\mathrm{b}^+(X)$中的增加列$\{f_n\}$使得$\{\mathrm{V}f_n\}$收敛于$g\}$.

证明 由定理8-2-12知, 对每个$f\in\boldsymbol{B}_\mathrm{b}^+(X)$有$\mathrm{V}f\in\mathbf{E}_\mathbf{V}$; 而且当$\boldsymbol{B}_\mathrm{b}^+(X)$中存在单调增加列$\{f_n\}$使得$\{\mathrm{V}f_n\}$收敛于$g$, 则$g\in\mathbf{E}_\mathbf{V}$.

下面考虑反过来的情形. 取一个$g\in\boldsymbol{B}^+(X)$使得$g>0$且$\mathrm{V}g<\infty$. 那么, 对每个$\alpha>0$及$f\in\boldsymbol{B}^+(X)$, 在$\{\mathrm{V}g=0\}$上有$\mathrm{V}_\alpha f=0$, 这因为对任意$m\in\mathbf{N}$, 有

$$0\le\mathrm{V}_\alpha f\le\mathrm{V}f=\sup_m\mathrm{V}(\inf(mg,f))\le\sup_m m\mathrm{V}g.$$

现设$s\in\mathbf{E}_\mathbf{V}$. 那么$s=\sup_\alpha\alpha\mathrm{V}_\alpha s$, 从而在$\{\mathrm{V}g=0\}$上$s=0$. 令$s_n:=\inf\{n,s,n\mathrm{V}g\}$, 那么$\{s_n\}$是$\mathbf{S}_\mathbf{V}$中的一个增加列使得$s=\sup s_n$. 于是, 对每个$n\in\mathrm{N}$有

$$\begin{aligned}n\mathrm{V}_n s_n&\le(n+1)\mathrm{V}_{n+1}s_n\\&\le(n+1)\mathrm{V}_{n+1}s_{n+1}\\&\le s_{n+1}\le s,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\sup_n n\mathrm{V}_n s_n&\ge\sup_m\sup_n n\mathrm{V}_n s_m\\&=\sup_n n\mathrm{V}_n s=s\end{aligned}$$

因此$\{n\mathrm{V}_n s_n\}$单调增收敛于s.

对每个$n\in\mathbf{N}$，令 $f_n:=n(s_n-n\mathrm{V}_n s_n)$. 因V有界，由预解方程推出$\mathrm{V}f_n=n\mathrm{V}_n s_n$. 故$\mathrm{V}f_n$单调上升收敛于$s$.□

定理 8-4-2 设$1\in\mathcal{U}_+$，p为X上的有界连续位势，则存在唯一的子 Markov 预解族$\mathbf{V}$使得

$$\mathbf{E}_\mathbf{V}\subset\mathcal{U}_+\subset\mathbf{S}_\mathbf{V}\text{ 且 }\mathrm{V}_0 1=p;$$

其中V_0是关于p的位势核; $\mathbf{E}_\mathbf{V}$表示$\mathbf{V}$上中位函数全体, $\mathbf{S}_\mathbf{V}$表示$\mathbf{V}$超过函数全体.

证明 设$\mathrm{V}=\mathrm{V}_0$为关于p的位势核. 下面先证，每一个$u\in\mathcal{U}_+$都是V强函数. 为此，取定一个$u\in\mathcal{U}_+$ 假定$f\in\boldsymbol{B}_b(X)$使得$\mathrm{V}f\le u$在$\{f>0\}$ 上成立. 又设K为$\{f>0\}$的紧子集，于是$f1_K\le f^+$，从而在$\{f>0\}$上有$\mathrm{V}(f1_K)\le\mathrm{V}f^+\le\mathrm{V}f^-+u$. 因为

$$q:=\mathrm{V}(f1_K)\in\mathcal{PC},\quad C(q)\subset K\text{ 且 }\mathrm{V}f^-+u\in\mathcal{U}_+,$$

故由定理 8-3-7 推出$q\le\mathrm{V}f^-+u$. 因此$\mathrm{V}f^+\le\mathrm{V}f^-+u$，即$\mathrm{V}f\le u$. 这说明$u$是V强函数. 特别，$1\in\mathcal{U}_+$也是V强函数，即有界核V满足完全极大值原理. 于是由定理 8-2-18，存在唯一的子 Markov 预解族$\mathbf{V}:=(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha>0}$ 使得$\mathrm{V}_0=\mathrm{V}$. 据定理 8-3-12，$\mathrm{V}_0 1=\mathrm{V}1=p$.

据定理 8-3-12，$\mathrm{V}(\boldsymbol{B}_b^+(X))\subset\mathcal{PC}$，再由引理 8-4-1 知$\mathbf{E}_\mathbf{V}\subset\mathcal{U}_+$. 再设$u\in\mathcal{U}_+$，$\alpha>0$，那么对每个$n\in\mathbf{N}$，有界函数$u_n:=\inf\{u,n\}\in\mathcal{U}_+$是一个V强函数，故由引理 8-2-14 知 $\alpha\mathrm{V}_\alpha u_n\le u_n$，故$\alpha\mathrm{V}_\alpha u\le u$. 这说明$u$是上中位函数. 从而，$\mathcal{U}_+\subset\mathbf{S}_\mathbf{V}$.

再证预解族的唯一性，设$\mathbf{U}:=(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha>0}$是$X$上的一个预解族，满足$\mathbf{E}_\mathbf{U}\subset\mathcal{U}_+\subset\mathbf{S}_\mathbf{U}$且$\mathrm{U}_0 1=p$. 我们要证$\mathbf{U}=\mathbf{V}$. 据定理 8-2-18，只要证$\mathrm{U}:=\mathrm{U}_0=\mathrm{V}$即可.

设$f\in\boldsymbol{B}_b^+(x)$，再由引理 8-4-1 知$\mathrm{U}f\in\mathbf{E}_\mathbf{U}$，因而$\mathrm{U}f\in\mathcal{U}_+$. 类似地$\mathrm{U}(\|f\|-f)\in\mathcal{U}_+$. 因

$$\mathrm{U}f+\mathrm{U}(\|f\|-f)=\mathrm{U}(\|f\|)=\|f\|p,$$

这说明$\mathrm{U}f\in\mathcal{PC}$. 若$u\in\mathcal{U}_+$ 使得在f的支柱上有$u\ge\mathrm{U}f$. 由

定理 8-2-13 知 $u \geq \mathrm{U}f$. 再由定理 8-3-7 知 $\mathrm{C}(\mathrm{U}f) \subset \mathrm{S}(f)$. 据定理 8-3-12, U 就是 p 的位势核 V. □

定理 8-4-3 设 $1 \in \mathscr{U}_+$. **V** 是定理 8-4-1 中所述的、有界连续位势 p 所对应的预解族. 那么

(1) X 上每个有界连续的严格位势 q 满足:

$$\cap_u \{x \in X \mid u' = u\} = \{x \in X \mid q' = q\} = \delta(p).$$

其中 u 取遍 $\mathscr{U}_+$; u', q' 的定义见定理 8-2-12. 从而 $\delta(p)$ 是细闭集且为 Borel 集.

(2) $\mathbf{E}_\mathrm{V} = \mathscr{U}_+$ 当且仅当 $\delta(p) = X$ 或等价地, p 是严格位势.

证明 设 $x \in \delta(p)$, 由上一定理, $\mathscr{PC} \subset \mathbf{S}_\mathrm{V}$, 又由定理 8-2-12, 从 $\mathscr{PC}$ 到 $[0, \infty)$ 的映射(函数) T:

$$g \mapsto g'(x) := \sup_\alpha \alpha \mathrm{V}_\alpha g(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \mathrm{V}_\alpha g(x)$$

是可加的, 正齐次的, 单调增加的, 故由定理 2-6-13, 存在 X 上的测度 τ 使得 $T(g) = \int g \, \mathrm{d}\tau$, 对每个 $g \in \mathscr{PC}$ 成立. 显然, 对每个 $g \in \mathscr{PC}$ 有 $\int g \, \mathrm{d}\tau \leq g(x)$. 由定理 8-2-12 及上一定理, $p = \mathrm{V}1 \in \mathbf{E}_\mathrm{V}$, 故

$$\int p \, \mathrm{d}\tau = \sup_\alpha \alpha \mathrm{V}_\alpha \mathrm{V}1(x) = \mathrm{V}1(x) = p(x).$$

因 $x \in \delta(p)$, 故 $\tau = \varepsilon_x$. 这表明对每个 $g \in \mathscr{PC}$ 都成立:

$$\sup_\alpha \alpha \mathrm{V}_\alpha g(x) = g(x).$$

因为每个 $u \in \mathscr{U}_+$ 都可以表成连续的位势组成的单调增加列的极限(定理 8-3-3 或推论 5-4-2), 故

$$\sup_\alpha \alpha \mathrm{V}_\alpha u(x) = u(x).$$

这就证得了 $\delta(p) \subset \cap_u \{u' = u\} \subset \{q' = q\}$, 其中 q 是严格位势.

下证反向包含关系. 设 $x \in \{q' = q\}$. 令 $\nu := \varepsilon_x$, μ 是 X 上的测度满足 $\mu(p) = \nu(p) < \infty$ 且对每个 $g \in \mathscr{PC}$ 都有 $\mu(g) \leq \nu(g)$. 我们要证 $\mu = \nu$, 从而 $x \in \delta(p)$.

据定理 8-3-12, 对 $f \in B_\mathrm{b}^+(X)$, 有 $\mathrm{V}f$, $\mathrm{V}(\|f\| - f) \in \mathscr{PC}$, 从而

$$\mu(\mathrm{V}f) \le \nu(\mathrm{V}f) \text{ 且 } \mu(\mathrm{V}(\|f\| - f)) \le \nu(\mathrm{V}(\|f\| - f)).$$

因为 $\mathrm{V}1 = p$ 及 $\mu(p) = \nu(p)$，故 $\mu(\mathrm{V}f) = \nu(\mathrm{V}f)$. 因为

$$\alpha\mathrm{V}_\alpha q = \mathrm{V}(\alpha(q - \alpha\mathrm{V}_\alpha q)),$$

故特别有

$$\mu(\alpha\mathrm{V}_\alpha q) = \nu(\alpha\mathrm{V}_\alpha q),$$

从而

$$\mu(q') = \nu(q') = \nu(q),$$

上面后一个等式成立是由于 $x \in \{q' = q\}$ 而 $\nu = \varepsilon_x$.

另一方面，因为 $q \in \mathscr{U}_+ \subset \mathbf{S_V}$，故

$$\mu(q') \le \mu(q) \le \nu(q).$$

因而 $\mu(q) = \nu(q)$. 由于 q 是严格位势，故 $\mu = \nu$.

又，由定理 8-2-12，$q' \in \mathbf{E_V}$. 由上一定理，$\mathbf{E_V} \subset \mathscr{U}_+$. 故每个 q' 与 q 都是细连续的、Borel 函数，故 $\delta(p) = \{q' = q\}$ 为细闭的 Borel 集. 总之，结论(1)成立.

下证结论(2). 因为 $\delta(p)$ 是使得对所有 $u \in \mathscr{U}_+$ 都有 $u'(x) = u(x)$ 的所有 $x \in X$ 组成的，故第一个等价关系成立. 而且由上一段论证知，当 $q' = q$ 处处成立，即 $\delta(p) = X$ 时，则 p 是严格位势. 反之，若 p 是严格位势，当然有 $\delta(p) = X$. □

注　定理 8-4-2 与 8-4-3 关于 $1 \in \mathscr{U}_+$ 的假定并不是实质性的限制. 事实上，对于未作此限制的同一类型调和空间 X，必存在一个连续的严格正的函数(甚至是位势) f，如 § 4.1 附注所述那样，令 $\mathscr{U}_f := \{\frac{u}{f} \mid u \in \mathscr{U}_+\}$，考虑空间 $(X, \mathscr{U}_f)$，它将具有相同的细拓扑及相应的缩减函数；$p \in \mathscr{P}\mathscr{C}$ 也与相应的空间中的 $\frac{p}{f}$ 具有相同的细支柱 $\delta(p)$；且通过适当选取 f 可使 $\frac{p}{f}$ 为 $(X, \mathscr{U}_f)$ 中的有界位势. 这两个定理的结论在 $(X, \mathscr{U}_f)$ 中都相应成立. 因此，可以认为定理 8-4-3 已证明：对任意 $p \in \mathscr{P}\mathscr{C}$，$\delta(p)$ 是细闭集且为 Borel 集. 同

样,下一定理在没有限制 $1\in\mathcal{U}_+$ 的同类空间中也成立. □

这个定理关于$\delta(p)$的特征可对缩减函数给出一个描述：对任意取定的 $p\in\mathcal{PC}$，任意 $u\in\mathcal{U}_+$ 在$\delta(p)$的缩减函数仍在 $\mathcal{U}_+$.

定理 8-4-4 设 $p\in\mathcal{PC}$， $u\in\mathcal{U}_+$，令

$$\mathcal{F}:=\{\, q\in\mathcal{PC}\mid q\le u \text{ 且存在实数}\alpha\ge 0\text{ 使得 } q\prec\alpha p\}.$$

那么 $\mathcal{F}$ 是上定向集且 $\sup\mathcal{F}=R_u^{\delta(p)}$.

证明 设 $f, g\in\mathcal{F}$, 则 $q:=R(\sup\{f,g\})\in\mathcal{PC}$ 而且

$$\sup\{f,g\}\le q\le u.$$

设$\alpha,\beta\ge 0$ 使得 $f\prec\alpha p$, $g\prec\beta p$, 那么

$$q=R(f+g-\inf\{f,g\})\prec f+g\prec(\alpha+\beta)p.$$

这说明 $\mathcal{F}$ 是上定向集. 若 $q\in\mathcal{F}$, $\alpha>0$ 使得 $q\prec\alpha p$, 则

$$\delta(q)\subset\delta(\alpha p)=\delta(p).$$

故由定理 8-3-7 知， $R_u^{\delta(p)}\ge R_q^{\delta(p)}=q$. 从而

$$R_u^{\delta(p)}\ge\sup\mathcal{F}.$$

下证反向不等式, 由上一注, 不失一般性可假定 $1\in\mathcal{U}_+$ 且 p 有界, 于是由定理 8-4-3, X 上存在一个预解族$(V_\alpha)_{\alpha>0}$ 使得 $V:=V_0$ 是 p 的位势核. 对 $n\in\mathbf{N}$，令 $u_n=\inf\{u,n\}$, 那么

$$nV_n u_n\le u_n\le u,\ nV_n u_n=nV(u_n-nV_n u_n)\in\mathcal{PC}$$

$$\text{且}\quad nV_n u_n\prec nVn=n^2p,$$

即 $nV_n u_n\in\mathcal{F}$, 对每个 $n\in\mathbf{N}$ 成立. 据定理 8-4-3, 在$\delta(p)$上有

$$\sup_n nV_n u_n=u,$$

故在 $\delta(p)$上有 $\sup\mathcal{F}=u$. 因 $\mathcal{F}$ 是上定向族, 故 $\sup\mathcal{F}\in\mathcal{U}_+$, 从而

$$\sup\mathcal{F}\ge R_u^{\delta(p)}\ .\quad □$$

2. 预解族对应的 Markov 半群

引理 8-4-5 设 Y 是一个具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间,

$\mathbf{V}:=(V_\alpha)_{\alpha>0}$是$Y$上的子Markov预解族，若存在一个函数锥$\mathcal{G}$使得$\mathbf{E_V}\subset\Sigma(\mathcal{G})\subset\mathbf{S_V}$，则存在唯一的、$X$上的子Markov半群$\mathbf{P}:=(P_t)_{t>0}$使得$\mathbf{V}$是$\mathbf{P}$的预解族而且对每个$q\in\Sigma(\mathbf{P})$，映射$t\mapsto P_t q$是右连续的.

证明 利用关于Laplace变换的Bernstern定理，以及Laplece变换的唯一性来确定所需的半群时，由于证明过程繁锁且无须使用与位势论的有关工具，故未详述. 请有兴趣的读者参阅文献[6]或[10]. □

定理 8-4-6 设$(X,\mathcal{U})$为调和空间，$1\in\mathcal{U}_+$. p是X上有界的、连续的、严格位势. 那么存在唯一的、X上的、右连续的子Markov半群$\mathbf{P}:=(P_t)_{t>0}$使关于$\mathbf{P}$的超过函数锥$\mathbf{E_P}$等同于正超调和函数锥$\mathcal{U}_+$而且$\mathbf{P}$的位势核V（即$\mathbf{P}$的预解族$\mathbf{V}$的位势核V_0）就是关于有界位势p的位势核，$V1=p$.

证明 据定理8-4-2, 8-4-3 ,存在唯一的、X上的子Markov预解族$\mathbf{V}$使得$\mathbf{E_V}=\mathcal{U}_+\subset\mathbf{S_V}$而且$\mathbf{V}$的位势核V就是关于$p$的位势核. 它是一个有界核. 注意到$\mathcal{PC}$是$X$上连续位势全体，因$X$具可数基，每个$u\in\mathcal{U}_+$都可以表示成$\mathcal{PC}$中一个单调增加列的极限，即$\mathcal{U}_+=\Sigma(\mathcal{PC})$. 故引理8-4-5条件满足，从而存在唯一的$X$上子Markov半群$\mathbf{P}:=(P_t)_{t>0}$，使得$\mathbf{V}$是$\mathbf{P}$的预解族且对每个$q\in\mathcal{PC}$，映射$t\mapsto P_t q$为右连续的.

由于每个$f\in\mathbf{K}(X)$可以用$\mathcal{P}_c-\mathcal{P}_c$中的函数列来逼近，故上述Markov半群$\mathbf{P}$是(弱)右连续的. □

注 上一定理可推广到比调和空间更为一般的扫除空间$(X,\mathcal{W})$(见第十二章)上去，而且可要求相应的子Markov半群$\mathbf{P}:=(P_t)_{t>0}$满足：对每个$t>0$有

$P_t(\mathcal{PC})\subset\mathcal{PC}$;

$P_t(\mathbf{K}(X))\subset C_b(X)$ (X上有界连续函数空间);

$P_t(\mathbf{C}_{\mathcal{PC}}(X))\subset\mathbf{C}_{\mathcal{PC}}(X)=\{g\in C(X)\mid$ 存在$f\in\mathcal{PC}$ 使得$|g|\le f\}$.

第九章　测度的扫除与位势的细支柱

在各种形式的位势论中，测度的扫除始终是主要的研究内容之一．历史上，在经典位势论中，为了解 Dirichlet 问题，Poincare 给出了有重要意义的，后来以他名字命名的扫除法；而后 Cartan H 用泛函为工具来证明测度扫除的存在与唯一性．自从 Brelot M 利用缩减函数来定义上调和函数的扫除以后，在调和空间，甚至是更一般位势论空间，比如扫除空间等，就可以用缩减函数和扫除函数作工具来研究测度的扫除．

为叙述简便，本章设 $X:=(X,\mathcal{U})$是 $\mathbf{P}$ 调和空间．

继续采用第八章 § 8.3 的记号，如：$\mathcal{PC}$ 表示 X 上所有实值连续位势组成的凸锥，$\mathcal{M}^+:=\mathcal{M}^+(X)$表示 X 上的测度全体．

$\mathcal{P}_c:=\{p\in\mathcal{PC}\mid$ 存在 X 的紧子集 K 使得 p 在 $X\setminus K$ 调和$\}$；

$\Lambda:=\{\mu\in\mathcal{M}^+\mid$ 每个 $p\in\mathcal{P}_c$ 关于 μ 可积$\}$．

我们知道，Λ 是一个凸锥；每个具有紧支柱的测度都属于 Λ．对任何 $\mu\in\mathcal{M}^+$，如果存在一个取严格正值的、X 上的超调和函数 u 关于 μ 可积，则 $\mu\in\Lambda$．另外，由定理 5-4-1，若 f 为 $\mathbf{P}$ 调和空间 X 上的、具紧支柱的、正的连续函数，则 $Rf\in\mathcal{P}_c$．

§ 9.1　测度扫除的一般性质

引理 9-1-1　设 $p\in\mathcal{PC}$．令

$\mathbf{Q}_p:=\{q\in\mathcal{PC}\mid$ 存在 X 的紧集 K 使得 $q=p$ 在 $X\setminus K$ 成立$\}$．

那么 $\mathbf{Q}_p$ 是一个下定向集且下确界为 0 (恒等于 0).

证明 若 $q, w \in \mathbf{Q}_p$, 显然 $\inf\{q, w\} \in \mathbf{Q}_p$, 故 $\mathbf{Q}_p$ 为下定向集. 同时 $\mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}_q$. 任取 $f \in \boldsymbol{K}(X)$ 使得 f 取值于实区间[0, 1]. 那么, 对任意的 $q \in \mathbf{Q}_p$, 缩减函数 $s := R((1-f)q)$ 属于 $\mathbf{Q}_q$ 且 $s \le q$; 而且 s 在集 $\{x \in X \mid f(x) = 1\}$ 的内部调和(见定理 5-3-2). 因为 X 有一个由相对紧可解集构成的拓扑基, 当我们对所有上述形式的 f 作了同样考虑之后, 由 Perron 定理(定理 5-1-6)可推出, $\mathbf{Q}_p$ 的下确界函数是调和的. 又因为它是位势 p 的下属, 故恒等于 0. □

定理 9-1-2 对任意 $\mu \in \Lambda$, 任意 $A \subset X$, Λ 中存在唯一的测度, 记作 μ^A, 使得下式对每个 $p \in \mathcal{PC}$ 都成立.

$$\int p \, \mathrm{d}\mu^A = \int \hat{R}_p^A \, \mathrm{d}\mu \tag{1.1}$$

证明 将调和空间的基地 X 看作定理 2-6-10 中的 Y, $\mathcal{P}_c$ 看作其中的 $\mathfrak{I}$. 据定理 5-4-13, $\mathcal{P}_c$ 满足引理条件.

用 φ 表示从 $\mathcal{P}_c$ 到$[0, \infty)$ 的映射

$$p \mapsto \int \hat{R}_p^A \, \mathrm{d}\mu,$$

由 § 6.2 知 φ 满足定理 2-6-10 的条件 a 、 b 和 c . 因为对每个 $p \in \mathcal{P}_c$ 都有 $\varphi(p) \le \int p \, \mathrm{d}\mu$, 由引理 9–1–1 知条件 d) 也满足.

于是由定理 2-6-10 知, X 上有唯一的测度 μ^A 使得对任意 $p \in \mathcal{P}_c$ 都有下式成立:

$$\int p \, \mathrm{d}\mu^A = \varphi(p) = \int \hat{R}_p^A \, \mathrm{d}\mu. \tag{1.2}$$

现设 $p \in \mathcal{PC}$, 记 $\mathcal{Z} := \{s \in \mathcal{P}_c \mid s \le p\}$. $\mathbf{Q}_p$ 仍表示引理 9-1-1 所说的位势族. 对 $q \in \mathbf{Q}_p$, 显然有

$$s := R(p-q) \in \mathcal{Z} \text{ 且 } p \le q + R(p-q).$$

故

$$\hat{R}_p^A \le \hat{R}_q^A + \hat{R}_s^A \le \hat{R}_q^A + \sup\{\hat{R}_t^A \mid t \in \mathcal{Z}\}.$$

由引理 9-1-1 有

$$\inf\{R_q^A \mid q\in \mathbf{Q}_p\}=0,$$

故得到 $R_p^A=\sup\{\hat{R}_q^A \mid q\in \mathcal{Q}\}$.

对于 $\mathcal{Q}$ 中任意两个函数 q^1, q^2,由于 $R(\sup\{q^1, q^2\})\in \mathcal{Q}$ (见定理 5-3-2), 它是 q^1 与 q^2 的上界, 所以 $\mathcal{Q}$ 是上定向集. 因为 p 是 $\mathcal{Q}$ 的上确界函数, 故由(1.2)推出

$$\int p\mathrm{d}\mu^A=\sup_q\int q\,\mathrm{d}\mu^A=\sup_q\int \hat{R}_q^A\,\mathrm{d}\mu=\int \hat{R}_p^A\,\mathrm{d}\mu,$$

其中上确界是让 q 跑遍 $\mathcal{Q}$ 取的. □

定义 对任意 $\mu\in\Lambda$ 及 X 的任意子集 A, (1.1)式定义的测度 μ^A 称为 μ 在 A 上的**扫除测度**.

显然 $\mu^X=\mu$; $\forall\mu, \nu\in\Lambda$, $(\mu+\nu)^A=\mu^A+\nu^A$.

推论 9-1-3 设 $A\subset B\subset X$, 那么对任何 $\mu\in\Lambda$ 及 X 上的任何正的超调和函数 u 都有

$$\int u\,\mathrm{d}\mu^A\le\int u\,\mathrm{d}\mu^B.$$

证明 因为 $\{p\in\mathcal{P}_c \mid p\le u\}$ 是一个上定向集且以 u 为上确界函数(见推论 5-4-2), 可由定理 9-1-2 直接推出结论. □

推论 9-1-4 设 u 是 X 上的正的超调和函数, $\mu\in\Lambda$, 而 $A\subset X$. 那么

$$\int u\,\mathrm{d}\mu^A\le\int \hat{R}_u^A\,\mathrm{d}\mu.$$

若 X 具有可数基, 则上式等号成立, 即有

$$\int u\,\mathrm{d}\mu^A=\int \hat{R}_u^A\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 第一结论的证明与上一推论相同. 由于当 X 具可数基时, 由推论 5-4-2 , $\mathcal{P}_c$ 中有增加列收敛于 u , 由定理 9-1-2 直接推出等式成立. □

注 9-1-5 这一推论若无假设 X 具有可数基这条件, 等号可能不成立(见练习 § 7-4-9 之 4)和 5)).

推论 9-1-6 设 X 具有可数基, $A\subset X, x\in X$, 那么 $X\setminus\{x\}$

中的每一个极集都是 $\varepsilon_x^A := (\varepsilon_x)^A$ 零测集.

证明 设 B 是 $X\setminus\{x\}$ 的一个极集. 因为 X 具有可数基, 由可解性公理(§ 4.1), X 是 σ 紧的. 据推论 7-1-7,

$$\hat{R}_\infty^B = 0,$$

据定理 6-2-9, 存在 X 上一个正的超调和函数 u, 它在 x 取有限值而在 B 上点点取无限值. 由上一推论得

$$\int u\,\mathrm{d}\varepsilon_x^A = \hat{R}_u^A(x) \le u(x) < \infty,$$

从而 B 是 ε_x^A 零测集. □

定理 9-1-7 设 U 是 X 的子集 A 的内部, 测度 $\mu \in \Lambda$. 如果 $\mu(X\setminus U) = 0$, 则 $\mu^A = \mu$; 如果 $\mu(U) = 0$, 则 μ^A 的支柱包含于 ∂A. 因此 μ 的扫除测度 μ^A 的支柱包含于 $\overline{A}$.

证明 先考虑 $\mu(X\setminus U) = 0$ 的情形, 对任意 $p, q \in \mathcal{P}_c$, 首先假定 $p-q \in \boldsymbol{K}(X)$, 则

$$\int(p-q)\,\mathrm{d}\mu^A = \int(\hat{R}_p^A - \hat{R}_p^B)\mathrm{d}\mu = \int(p-q)\,\mathrm{d}\mu,$$

这因为在 U 上 $p=\hat{R}_p^A$, $q=\hat{R}_p^B$. 因为 $\boldsymbol{K}(X)\cap(\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_c)$ 在 $\boldsymbol{K}(X)$ 中稠密(定理 5-4-13), 故 $\mu^A = \mu$.

再设 $\mu(U) = 0$. 选取 $p, q \in \mathcal{P}_c$ 使得 $q \le p$, $p-q \in \boldsymbol{K}(X)$ 且使得 $p-q$ 的支柱 K 与 ∂A 不交, 设 u 是 X 上的正的超调和函数且在 A 上有 $u \ge q$ 成立. 由于在 U 上取 p 的值, 而在 $X\setminus(U\cap K)$ 上等于 $\inf\{p, u\}$ 的函数是正的超调和函数且在 A 上等于 p, 故在 $X\setminus U$ 上有 $\hat{R}_p^A \le u$.

因为 u 是任意的, 故在 $X\setminus U$ 上有

$$\hat{R}_p^A = \hat{R}_q^A,$$

从而

$$\int(p-q)\,\mathrm{d}\mu^A = \int(\hat{R}_p^A - \hat{R}_q^A)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

再次利用定理 5-4-13 推出 μ 的支柱含于 ∂A.

对任意 $\mu\in\Lambda$，令 $\mu_1:=\mu|_{X\setminus U}$，$\mu_2:=\mu|_U$，因 $\mu=\mu_1+\mu_2$，且

$$\mu^A=\mu_1^A+\mu_2^A,$$

由上述讨论知 μ^A 的支柱含于 $U\cup\partial A$．□

定理 9-1-8（Brelot M） 设 A 为 X 的子集，那么对任何取定的 $f\in\mathbf{K}(X)$，函数 $g:x\mapsto\varepsilon_x^A(f)$ 是 X 上细连续的 Borel 函数而且在 $X\setminus\overline{A}$ 调和，且对任意 $\mu\in\Lambda$ 满足

$$\mu^A(f)=\int\varepsilon_x^A(f)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

证明 设 $p_0\in\mathcal{P}_c$ 使得 p_0 在 f 的支柱上取严格正值．由定理 5-4-13，对任意自然数 n，存在 $p_n,q_n\in\mathcal{P}_c$ 使得

$$|f-(p_n-q_n)|<\frac{1}{n}p_0 \text{ 且 } p_n-q_n\in\mathbf{K}(X).$$

令 $v_n:=\hat{R}_{p_n}^A-\hat{R}_{q_n}^A$．那么，对任意 $x\in X$ 都有

$$|\varepsilon_x^A(f)-(\hat{R}_{p_n}^A(x)-\hat{R}_{q_n}^A(x))|\le\int|f-(p_n-q_n)|\mathrm{d}\varepsilon_x^A<\frac{1}{n}p_0(x).$$

故$\{v_n\}$ 在 X 的任意紧集上一致收敛于 g．因为 v_n 是 X 上的细连细的 Borel 函数且在 $X\setminus\overline{A}$ 调和(定理 6-2-6)，故 g 具有同样性质．据 Lebesgue 控收敛定理，g 是 μ 可积的且有

$$\begin{aligned}\int\varepsilon_x^A(f)\,\mathrm{d}\mu(x)&=\lim_{n\to\infty}\int(\hat{R}_{p_n}^A-\hat{R}_{q_n}^A)\,\mathrm{d}\mu\\&=\lim_{n\to\infty}\int(p_n-q_n)\,\mathrm{d}\mu^A=\int f\mathrm{d}\mu^A.\end{aligned}$$ □

定理 9-1-9(Herve M-Bauer H) X 的子集 A 是极集当且仅当对每个 $\mu\in\Lambda$ 有 $\mu^A=0$.

证明 若 A 为极集．则对所有 $p\in\mathcal{P}_c$ 恒成立 $\hat{R}_p^A=0$．故由(1.2)式推出 $\mu^A=0$．反之，设 $\mu^A=0$ 对每个 $\mu\in\Lambda$ 成立．任取一个相对紧开集 W 并取一个 $p\in\mathcal{P}_c$，使得 p 在 W 上取严格正值．记 $p':=p|_W$，则对 $x\in X$ 有

$${}^W\hat{R}_{p'}^{A\cap W}(x)\le\hat{R}_p^A(x)=\int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^A=0.$$

因为 W 是任意的, 故 A 为极集.□

注. 这定理说明极集关于测度的扫除具有绝对零测性.

定理 9-1-10 (Brelot M-Constantinescu C) X 的子集 A 在 $x \in X$ 瘦当且仅当 $\varepsilon_x^A \neq \varepsilon_x$.

证明 设 A 在 $x \in X$ 瘦. 由定理 7-2-2, 存在则存在 $p \in \mathcal{P}_c$ 使得

$$\hat{R}_p^A(x) < p(x),$$

由定理 9-1-2 知,

$$\int p \, \mathrm{d}\varepsilon_x^A = \hat{R}_p^A(x) \neq p(x) = \int p \, \mathrm{d}\varepsilon_x,$$

从而 $\varepsilon_x^A \neq \varepsilon_x$.

反之, 若 $\varepsilon_x^A \neq \varepsilon_x$, 则存在 $p \in \mathcal{P}_c$ 使得

$$\hat{R}_p^A(x) = \int p \, \mathrm{d}\varepsilon_x^A \neq \int p \, \mathrm{d}\varepsilon_x = p(x),$$

故 A 在 x 瘦(定理 7-2-2). □

推论 9-1-11 对 X 的任意开集 V 及任何 $x \in \partial V$, x 是 V 的正则边界点当且仅当 $\varepsilon_x^{X\backslash V} = \varepsilon_x$.

证明 由定理 7-2-10 及本定理直接推出. □

定理 9-1-12 对 X 的任意开集 V 及任何 $x \in V$ 有

$$\varepsilon_x^{X\backslash V} = \mu_x^V,$$

其中 μ_x^V 是调和测度 (见 § 4.1).

证明 由定理 5-4-15, V 是可解集. 对 $p \in \mathcal{PC}$, 由定理 6-2-9, 引理 6-2-10 推出,

$$\hat{R}_p^{X\backslash V}(x) = R_p^{X\backslash V}(x) = H_p^V(x).$$

故对任何 $p, q \in \mathcal{P}_c$, 当 $p - q \in \boldsymbol{K}(X)$时有

$$\varepsilon_x^{X\backslash V}(p - q) = H_p^V(x) - H_q^V(x) = \mu_x^V(p - q),$$

再由定理 5-4-13 推出 $\varepsilon_x^{X\backslash V} = \mu_x^V$. □

注 上一定理在经典位势论中曾由 ch.de la Vallee Poussin 及 Frostmnan O.等人证得.

定理 9-1-13 设 A、B 为 X 的子集，那么对任意 $\mu\in\Lambda$ 有

$$\mu^{A\cup B}\le\mu^{A}+\mu^{B}.$$

证明 选取 $p,q\in\mathcal{P}_c$ 使得 $q\le p$ 且 $p-q\in\mathcal{K}(X)$. 由定理 6-2-12 知 $\hat{R}_q^{A,B}\le\hat{R}_p^{A,B}$，且

$$\mu^{A\cup B}(p-q)=\int(\hat{R}_p^{A\cup B}-\hat{R}_q^{A\cup B})\mathrm{d}\mu$$

$$=\int[(\hat{R}_p^{A}-\hat{R}_q^{A})+(\hat{R}_p^{B}-\hat{R}_q^{B})-(\hat{R}_p^{A,B}-\hat{R}_q^{A,B})]\mathrm{d}\mu$$

$$\le\mu^{A}(p-q)+\mu^{B}(p-q).$$

再由 $\mathcal{P}_c-\mathcal{P}_c$ 在 $\mathcal{K}(X)$中的稠密性 (定理 5-4-13) 推出结论. □

§ 9.2 扫除的细性质

本节要揭示测度的扫除与细拓扑之间的联系. 为了叙述简便，§ 9.2 ~ 9.4 均设 $X=(X,\mathcal{U})$ 是具有可数基的 $\mathfrak{P}$ 调和空间.

定义 对 X 的子集 A，用 $\mathrm{b}(A)$表示 A 在该处不瘦的点 $x\in X$ 全体之集，或等价地，$\mathrm{b}(A)=\{x\in X\mid\varepsilon_x^A=\varepsilon_x\}$(参看定理9-1-10). $\mathrm{b}(A)$ 称为集 A 的基. 若 $\mathrm{b}(A)=A$，则称 A 是基本集或基本的.

定理 9-2-1 设 A,B 为 X 的子集，则

a) A 的细内部 $A^{\mathrm{of}}\subset\mathrm{b}(A)\subset\overline{A}$；

b) 当 $A\subset B$ 时 $\mathrm{b}(A)\subset\mathrm{b}(B)$，对一般的 A,B 有

$$\mathrm{b}(A\cup B)=\mathrm{b}(A)\cup\mathrm{b}(B).$$

证明 因 A 在细内部不瘦，在 A 的外点必瘦(据瘦的定义)，故 a)成立.

由定义，当 $A\subset B$ 时显然有 $\mathrm{b}(A)\subset\mathrm{b}(B)$成立，从而

由定义，当 $A \subset B$ 时显然有 $\mathrm{b}(A) \subset \mathrm{b}(B)$成立，从而

$$\mathrm{b}(A) \cup \mathrm{b}(B) \subset \mathrm{b}(A \cup B).$$

若 $x \notin \mathrm{b}(A)$且 $x \notin \mathrm{b}(B)$，则集 A 与 B 同时在 x 瘦，据定理 7-2-3，$A \cup B$ 也在 x 瘦，从而 $x \notin \mathrm{b}(A \cup B)$，故 $\mathrm{b}(A) \cup \mathrm{b}(B) \supset \mathrm{b}(A \cup B)$. 从而结论 b 也成立. □

定理 9-2-2 设 A 为 X 的子集，$p \in \mathcal{PC}$ 为严格实位势，则

(1) $\mathrm{b}(A) = \{ x \in X \mid \hat{R}_p^A(x) = p(x)\}$;

(2) $\mathrm{b}(A)$是细闭的 G_δ 型集且 $A \setminus \mathrm{b}(A)$是半极集.

证明 由推论 9-1-4，对每个 $q \in \mathcal{PC}$ 有

$$\varepsilon_x^A(q) = \hat{R}_q^A(x) \le q(x) = \varepsilon_x(q).$$

因为 p 为 X 上的严格实位势，若$\varepsilon_x^A(p) = p(x)$，则$\varepsilon_x^A = \varepsilon_x$. 故

$$\begin{aligned}
\mathrm{b}(A) &= \{ x \in X \mid \varepsilon_x^A(p) = p(x)\} \\
&= \{ x \in X \mid \hat{R}_p^A(x) = p(x)\} \\
&= \{ x \in X \mid \hat{R}_p^A(x) \ge p(x)\} \\
&= \cap_{n=1}^{\infty} \{ x \in X \mid \hat{R}_p^A(x) > p(x) - \frac{1}{n} \}.
\end{aligned}$$

那么由下式及 p 的连续性、$\hat{R}_p^A$ 的下半连续性和细连续性推出结论(1)及(2)的第一部分成立. 因

$$A \setminus \mathrm{b}(\mathrm{A}) = \{ x \in A \mid \hat{R}_p^A(x) < p(x)\},$$

由推论 7-2-9 知, $A \setminus \mathrm{b}(\mathrm{A})$是半极集.□

推论 9-2-3 X 的任意开集 U 的非正则边界点全体是一个 K_σ 型集且为半极集.

证明 由上一定理，$(X \setminus U) \setminus \mathrm{b}(X \setminus U)$是半极集且为 K_σ 型集，据定理 7-2-10，它正是 U 的非正则边界点全体. □

注 9-2-4 上述结论在具可数基的 S 调和空间也是对的. □

引理 9-2-5 设 A 为 X 的子集，u 为 X 上正的超调和函数，

那么对 X 的任何子集 B，当 $A\subset B\subset \widetilde{A}$（$A$ 的细闭包）时恒有

$$R_u^B = R_u^A.$$

证明 设 v 是正的超调和函数在 A 上有 $v\geq u$，则由于 u 与 v 的细连续性，在 $\widetilde{A}$ 上，特别在 B 上有 $v\geq u$. 再由缩减函数的定义推出结果. □

定理 9-2-6 对 X 的每个子集 A，有 $A\cup \mathrm{b}(A)=\widetilde{A}$. 特别，每个 Borel 集的细闭包与每个细开集的细闭包都是 Borel 可测集，X 上的每个细连续的数值函数是 Borel 可测的. 若 G 是细开集，则 $\mathrm{b}(G)$是基本集.

证明 设 $p\in \mathcal{PC}$ 是严格位势，由上一引理，在 $\widetilde{A}$ 上有下式成立：$R_p^A=R_p^{\widetilde{A}}=p$. 另一方面，由定理 6-2-9 的附注及定理 9-2-2 之(1) 知，在 $X\setminus(A\cup \mathrm{b}(A))$上有 $R_p^A=\hat{R}_p^A<p$，因此 $\widetilde{A}\subset A\cup \mathrm{b}(A)$.

反之，若 $x\notin\widetilde{A}$. 那么，由定理 7-2-5，A 在 x 瘦，从而 $x\notin(A\cup \mathrm{b}(A))$. 所以，$\widetilde{A}\supset(A\cup \mathrm{b}(A))$. 从而，$\widetilde{A}=(A\cup \mathrm{b}(A))$.

现设 f 是 X 上细连续的实值函数. 任意取定实数 α，则对每个自然数 n 有

$$\begin{aligned}\{f\geq\alpha\}\subset\{f>\alpha-\frac{1}{n}\}&\subset \mathrm{b}(\{f>\alpha-\frac{1}{n}\})\\ &\subset \mathrm{b}(\{f\geq\alpha-\frac{1}{n}\})\subset\{f\geq\alpha-\frac{1}{n}\},\end{aligned}$$

于是

$$\{f\geq\alpha\}=\cap_{n=1}^{\infty}\mathrm{b}\{f\geq\alpha-\frac{1}{n}\},$$

据定理 9-2-2，上式右边每个参加交运算的集都是 G_δ 型集，所以$\{f\geq\alpha\}$是 Borel 集. 由此推出 f 是 Borel 可测的.

最后，若 G 是细开集，那么由基的定义，$G\subset \mathrm{b}(G)\subset$

b(b(G)); 另一方面，因为 b(G)是细闭集，据上述结果，b(b(G))∪b(G) = b(G). 故 b(b(G)) = b(G). 即 b(G)是基本集. □

定理 9-2-7 对 X 的任意子集 A，存在一个包含 A 的细闭集 A'，它是 G_δ 型集且对每个 $\mu\in\Lambda$ 有

$$\mu^A=\mu^{A'}.$$

特别，对每个 $x\in X$ 有，$\varepsilon_x^A=\varepsilon_x^{A'}$； 对每个 $u\in\mathcal{U}_+$有，$\hat{R}_u^A=\hat{R}_u^{A'}$.

证明 设 $p\in\mathcal{PC}$ 是严格位势，注意到

$$R_p^A=\inf\{\,q\in\mathcal{P}\mid q\le p \text{ 且在 } A \text{ 上 } q=p\}.$$

据 Choquet 引理(定理 1-4-7)知，存在一列单调减的位势列$\{p_n\}$使得 $\hat{}\lim_n p_n=\hat{R}_p^A$. 令

$$A':=\cap_{n=1}^{\infty}\{\,x\in X\mid \frac{n}{n+1}p(x)<p_n(x)\}$$

那么显然有

$$A':=\cap_{n=1}^{\infty}\{\,x\in X\mid \frac{n}{n+1}p(x)\le p_n(x)\},$$

因此 A'是 G_δ 型集且为细闭集. 由于

$$A\subset A' \text{ 且 } R_p^{A'}\le\frac{n+1}{n}p_n$$

对任意自然数 n 都成立，故

$$\hat{R}_p^A\le\hat{R}_p^{A'}\le\hat{}\lim_n p_n=\hat{R}_p^A.$$

于是，据定理 9-1-2, 对任意 $x\in X$ 有，

$$\int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^A=\hat{R}_p^A(x)=\hat{R}_p^{A'}(x)=\int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A'}<\infty.$$

又由定理 9-1-3 知

$$\int u\,\mathrm{d}\varepsilon_x^A\le\int u\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A'}$$

对每个正的超调和数 u 成立，于是由严格位势的定义知，$\varepsilon_x^A=\varepsilon_x^{A'}$.

设 $\mu\in\Lambda$，那么对任意 $f\in\boldsymbol{K}(X)$有

(定理 9-1-8). 因此 $\mu^A=\mu^{A'}$. □

推论 9-2-8 每一个完全瘦集必包含于一个 G_δ 型的完全瘦集之中. 每个半极集必包含于一个半极的 Borel 集之中.

证明 设 A 是完全瘦, A'如定理所述,那么对任意 $x\in X$, 有

$$\varepsilon_x^{A'}=\varepsilon_x^A\neq\varepsilon_x ,$$

故 A' 在 x 瘦(定理 9-1-10). 由 x 的任意性推出 A' 完全瘦. 由此及半极集的定义推出后一个结论. □

下一定理精确化了定理 9-1-7.

定理 9-2-9 (Brelot M- Herve R M -Constantinescu C) 对 X 的任意子集 A 及任意 $\mu\in\Lambda$, $X\setminus A$ 的细内部是 μ^A 零内测(度)集. 特别, 当 A 是 Borel 集时, $X\setminus A$ 的细内部为 μ^A 零测集, 即 μ^A 的质量集中在(或称细支撑是)A 的细闭包.

证明 设 K 是包含于 $X\setminus A$ 的细内部的任一紧集, p 是 μ 可积的、严格实位势(存在性由定理 8-3-2 得出). 任取实数 $\varepsilon>0$. 据定理 6-2-9, 存在 X 上的一个正的超调和函数 v 使得 $v\leq p$ 且在 A 上有 $v=p$, 同时在 K 上满足 $v\leq\hat{R}_p^A+\varepsilon$. 于是

$$\int v\,\mathrm{d}\mu^A=\int\hat{R}_v^A\,\mathrm{d}\mu=\int\hat{R}_p^A\,\mathrm{d}\mu=\int p\,\mathrm{d}\mu^A\leq\int p\,\mathrm{d}\mu<\infty .$$

因此

$$0\leq\int_K(p-v)\mathrm{d}\mu^A\leq\int p\,\mathrm{d}\mu^A-\int v\,\mathrm{d}\mu^A=0 .$$

故

$$\int_K p\,\mathrm{d}\mu^A=\int_K v\,\mathrm{d}\mu^A\leq\int_K\hat{R}_p^A\,\mathrm{d}\mu^A+\varepsilon\,\mu^A(K)$$

因 ε 是任意的, 所以

$$\int_K(p-\hat{R}_p^A)\mathrm{d}\mu^A=0.$$

但由定理 9-2-2 和定理 7-2-5, $p-\hat{R}_p^A$ 在 K 上是严格正的, 因此 $\mu^A(K)=0$. 当 A 为 Borel 集时, $X\setminus A$ 的细内部也是 Borel 集(定

$\mu^A(K)=0$. 当 A 为 Borel 集时, $X\setminus A$ 的细内部也是 Borel 集（定理 9-2-6），为可测，故为 μ^A 零测集. □

推论 9-2-10 设 A 为 X 的子集, 且在某一点 $x\in X\setminus A$ 瘦. 则 $\varepsilon_x^A(\{x\})=0$.

证明 因为 A 在 x 瘦，故 $x\in X\setminus\widetilde{A}$（定理 7-2-5），即 $\{x\}$ 为 $X\setminus A$ 的细内部的紧子集. □

引理 9-2-11 设 A 为 X 的 Borel 子集使得 $A\subset \mathrm{b}(A)$, K 是 A 的紧子集. 则对所有 $p, w\in\mathcal{PC}$，当 $\inf_K w(x)>0$ 时，存在一个位势 $q\in\mathcal{PC}$ 及 A 的一个紧子集 L 使得

$$R_p^K\le q\le R_p^A \text{ 且 } q\le R_q^L+w.$$

证明 设 E 是 K 的一个紧邻域且满足 $\inf_E w>0$.令

$$\mathcal{Q}:=\{q\in\mathcal{PC}\mid R_p^K\le q\le R_p^A \text{且 } R_q^E=q\}$$

那么 $\mathcal{Q}$ 是一个下定向集且

$$\inf\mathcal{Q}=R_p^K.$$

事实上，设 v 是 X 上的正的超调和函数且在 K 上有 $v\ge p$，那么 X 上存在一个正的连续函数 f 使得 $p1_K\le f\le 1_E\inf\{v, R_p^A\}$, 所以 $Rf\in\mathcal{Q}$ 且 $Rf\le v$，这就证明了 $\inf\mathcal{Q}=R_p^K$. 另一方面，$\mathcal{Q}$ 显然是下定向集. 实际上, 对 $q, q'\in\mathcal{Q}$ 有 $\inf\{q,q'\}\in\mathcal{PC}$ 且 $\inf(q,q')\ge p$ 在 K 上成立.

因此，对 E 上的任一测度$\lambda\ne 0$，必存在 $q\in\mathcal{Q}$ 使得

$$\lambda(q)<\lambda(R_p^K)+\lambda(w) \tag{2.4}$$

且 $R_p^K=R_q^K\le R_q^A$. 所以若用 $\mathcal{F}$ 表示函数族

$$\{(R_q^A-q+w)\mid q\in\mathcal{Q}\},$$

在 E 上的限制，则(2.4)表明，对 E 上任意测度$\lambda\ne 0$，存在函数 $f\in\mathcal{F}$ 使得$\lambda(f)>0$. 因为 $\mathcal{F}$ 是一个由下半连续函数组成的凸锥, 据引理 2-6-14，存在严格正的函数 $f\in\mathcal{F}$，即存在一个 $q\in\mathcal{Q}$ 使

得

$$R_p^A + w > q$$

在E上成立. 另一方面, 据定理 6-3-8 及推论 6-3-7 知,

$$R_p^A = \sup\{ R_p^F \mid F \text{为} A \text{的紧子集}\},$$

故存在一个紧集 L 使得在 E 上有

$$R_q^L + w > q.$$

从而 $\hat{R}_q^L + w \geq R_q^U = q$. □

引理 9-2-12 设$\{q_n\}$是$\mathcal{PC}$中函数列, $\{A_n\}$是单调减小的X的子集列, $w \in \mathcal{PC}$. 又设 $B_n \subset A_n$ 使得对每个自然数 n 有

$$R_{q_n}^{B_n} \leq q_{n+1} \leq R_{q_n}^{A_n} \quad \text{及}\ q_n \leq R_{q_n}^{B_n} + 2^{-n} w.$$

那么$\{q_n\}$在X上局部一致收敛到一个位势 $q \in \mathcal{PC}$, 而且对每个自然数 n 有 $R_q^{A_n} = q$.

证明 因为 $R_{q_n}^{A_n} \leq q_n$. 由定理条件知, 对每个自然数 n 有

$$0 \leq q_n - q_{n+1} \leq 2^{-n} w.$$

所以$\{q_n\}$是单调减少的且局部一致收敛到一个位势 $q \in \mathcal{PC}$. 任意取定一个自然数 n, 则对每个自然数 $k > n$ 有

$$q_k \leq q + \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} w = q + 2^{-k+1} w := s \ \text{且}\ B_k \subset A_k \subset A_n,$$

因此

$$q \leq q_k \leq R_{q_k}^{B_k} + 2^{-k} w$$
$$\leq R_s^{A_n} + 2^{-k} w \leq R_q^{A_n} + 3 \cdot 2^{-k} w,$$

由 k 的任意性推出 $R_q^{A_n} = q$. □

定理 9-2-13 设A是X的子集使得$A \subset \mathrm{b}(A)$. 又设K为A的紧子集, 而$p \in \mathcal{PC}$, 那么存在一个位势 $q \in \mathcal{PC}$使得

$$R_p^K \leq q \leq R_p^A \quad \text{且} \quad R_q^A = q.$$

证明 据定理 9-2-6, 对每个正的超调和函数 u 有

$$R_u^A = R_u^{A \cup b(A)} = R_u^{b(A)} .$$

所以，我们可用 b(A)代替 A. 因此可以假定 A 是 Borel 集. 设 $p_0 \in \mathcal{PC}$ 是严格位势. 令 $K_0 = K$ ， $q_0 = p$. 据引理 9-2-11 ，对每个自然数 n 可找到 $q_n \in \mathcal{PC}$ 及 A 的紧子集 K_n 使得

$$K_n \subset K_{n+1}\ , \quad R_{q_n}^{K_n} \le q_{n+1} \le R_{q_n}^A \quad 及$$

$$q_{n+1} \le R_{q_{n+1}}^{K_{n+1}} + 2^{-n-1} p_0\ , \qquad n = 0,1,2,3,\cdots$$

据上一引理知，单调减少的序列$\{ q_n \}$收敛于一个位势 $q \in \mathcal{PC}$ 且满足 $R_q^A = q$. 因为在 K_n 上有 $q_{n+1} = q_n$ ，故在 K 上 $q = p$ 成立，从而 $R_p^K \le q$. 再由 $q \le q_1 \le R_{q_0}^A = R_p^A$ 推得 $q \le R_p^A$. □

推论 9-2-14 对 X 的任意子集 A ，当 $A \subset$ b(A) 时，对任意 $p \in \mathcal{PC}$ 有

$$R_p^A = \sup\{ q \in \mathcal{PC} \mid q \le p\ , R_q^A = q \} .$$

证明 由定理 9-2-13 及定理 6-3-8 推出. □

下面定理与定理 7-2-8 一块给出半极集的特性.

定理 9-2-15 设 S 是 X 的半极集，则存在一个正的上调和函数族 $\mathcal{V}$ 使得

$$S = \{ \hat{\ }\inf \mathcal{V} < \inf \mathcal{V} \}.$$

证明 设 $p \in \mathcal{PC}$ 是严格位势，$S = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$，其中每个 B_n 是完全瘦的. 对每个自然数 n，令

$$\mathcal{V}_n := \{ g \in \mathcal{U}_+ \mid g \le p \text{ 且在 } B_n \text{ 上有 } g = p \}.$$

那么 $\mathcal{V}_n$ 非空且 $\inf \mathcal{V}_n = R_p^{B_n}$. 故由定理 6-2-9 之注及定理 9-2-2 有

$$B_n = \{ \hat{\ }\inf \mathcal{V}_n < \inf \mathcal{V}_n \}.$$

令

$$\mathcal{V} := \{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n \mid g_n \in \mathcal{V}_n \}.$$

那么 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_+$ 且

$$\inf \mathcal{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\inf \mathcal{V}_n), \quad {}^\wedge\inf \mathcal{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} ({}^\wedge\inf \mathcal{V}_n),$$

从而

$$S = \cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid ({}^\wedge\inf \mathcal{V}_n)(x) < (\inf \mathcal{V}_n)(x)\}$$
$$= \{{}^\wedge\inf \mathcal{V} < \inf \mathcal{V}\}. \ \square$$

定理 9-2-16 细拓扑是拟 Lindelof 拓扑, 即对 X 的每一个细开集族$\{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$, 存在 I 的一个可数子集 J ,使得$\cup_{i \in \mathrm{I}} G_i \setminus (\cup_{j \in \mathrm{J}} G_j)$是半极集.

证明 设 $p \in \mathcal{PC}$ 是一个严格位势, 定义 $E_i := X \setminus G_i$, $i \in \mathrm{I}$. 据 Chopuet 引理 (定理 1-4-7), 存在 I 的一个可数子集 J 使得

$${}^\wedge\inf_{j \in J} \hat{R}_p^{E_j} = {}^\wedge\inf_{i \in I} \hat{R}_p^{E_i},$$

因为

$$S := \{x \in X \mid {}^\wedge\inf_{i \in \mathrm{I}} \hat{R}_p^{E_i}(x) < \inf_{j \in \mathrm{J}} R_p^{E_j}(x)\}$$
$$\subset \{{}^\wedge\inf_{i \in \mathrm{I}} \hat{R}_p^{E_i} < \inf_{j \in \mathrm{J}} \hat{R}_p^{E_j}\} \cup [\cup_{j \in \mathrm{J}} \{\hat{R}_p^{E_j} < R_p^{E_j}\}],$$

由定理 7-2-8 知集 S 是半极集. 如果 $x \in \cap_{j \in \mathrm{J}} E_j$, 但存在 $i \in \mathrm{I}$ 使得 $x \notin E_i$, 那么由定理 7-2-5 及定理 7-2-2, 有

$$\hat{R}_p^{E_i}(x) < p(x) = \inf_{j \in \mathrm{J}} R_p^{E_j}(x).$$

故 $x \in S$. 因此

$$\cup_{i \in \mathrm{I}} G_i \setminus (\cup_{j \in \mathrm{J}} G_j) = \cap_{j \in \mathrm{J}} E_j \setminus (\cap_{i \in \mathrm{I}} E_i\}) \subset S. \ \square$$

定理 9-2-17 设 S 是半极集, $p \in \mathcal{PC}$, 则 $p_S = 0$.

证明 由推论 9-2-8, 不妨设 S 为半极的 Borel 集且可表示成可数个完全瘦的 G_δ 型集之并. 利用命题 8-3-11 之(5), 只须对完全瘦的 Borel 集 B 证明 $p_B = 0$ 即可. 设 K 是 B 的紧子集. 考虑凸锥

$$\mathcal{F} := \mathcal{PC} - \mathbf{R}_+ \cdot p_K.$$

令 $x \in X$, 因 K 完全瘦, 故$\varepsilon_x^K \neq \varepsilon_x$. 据定理 8-3-7 和推论 9-1-4 有

$$\varepsilon_x^K(p_K) = \hat{R}_{p_K}^K(x) = p_K(x),$$

因此$\varepsilon_x^K \in \mathcal{M}_x(\mathcal{F})$(见§ 8.3 第 2 段), 故 $\mathrm{Ch}_{\mathcal{F}}\ X = \varnothing$. 据定理 8-3-4 知, 每个$f \in \mathcal{F}$都是正的, 特别, $-p_K \geq 0$, 即 $p_K = 0$. 从而由命题 8-3-11 之(4)知 $p_B = \sup\{p_K \mid K$ 为 B 的紧子集$\} = 0$. □

§ 9.3 扫除测度的收敛与聚点

仍用$\mathcal{M}^+$表示 X 上的 (Radon) 测度全体. 按 § 2.8 的定义, $\mathcal{M}^+$上的一个测度网$\{\mu_\alpha \mid \alpha \in Q\}$淬收敛于$\mu \in \mathcal{M}$ 当且仅当, 对任意 $f \in \mathbf{K}(X)$ 恒有 $\mu_\alpha(f) \to \mu(f)$.

定理 9-3-1 设 A 是 X 的一个子集, $\{A_n\}$是一个 X 的子集列, $x \in X$. 那么当下面两条件之一满足时$\{\varepsilon_x^{A_n}\}$淬收敛于 ε_x^A:

a) $\{A_n\}$是单调增加列且 $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

b) $\{A_n\}$是单调减小列, $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ 并且(1)对 A 的任一邻域 V 都存在某个自然数 n, 使得 $A_n \subset V$; 同时(2)要么

$$x \in \mathrm{b}(A) \cup (X \setminus A),$$

要么存在 x 的一个邻域 V, 使得

$$A \cap V = A_n \cap V$$

对每个自然数 n 成立.

证明 因为 $\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_c$在 $\mathbf{K}(X)$ 中稠密 (定理 5-4-13) 且

$$\varepsilon_x^{A_n}(p) = \hat{R}_p^{A_n}(x) \ , \ \ \varepsilon_x^A(p) = \hat{R}_p^A(x)$$

对任一 $p \in \mathcal{P}_c$成立, 我们只要证明, 对任一 $p \in \mathcal{P}_c$有下式

$$\lim_n \hat{R}_p^{A_n}(x) = \hat{R}_p^A(x) \tag{3.1}$$

成立即可. 于是, 对情形 a), 可由定理 6-2-5 推得. 下证情形 b)也成立.

如果 $x \in b(A)$, 由定理 9-2-2 知, 对任意 $p \in \mathcal{P}_c$ 及任意自然数 n 有

$$\hat{R}_p^{A_n}(x) = \hat{R}_p^{A}(x) = p(x).$$

故(3.1)式显然成立.

若 $x \in X \setminus A$. 设 $p \in \mathcal{P}_c$ 而 p_0 是 X 上的严格实位势. 任意取定实数 $\varepsilon > 0$. 于是, 存在 X 上的一个正的超调和函数 v, 使得 v 在 A 上与 p 相等且满足

$$v(x) < \hat{R}_p^{A}(x) + \varepsilon.$$

(定理 6-2-9). 因为

$$G := \{ y \in X \mid p(y) < v(y) + \varepsilon p_0(y)\}$$

是包含 A 的开集, 据题设存在自然数 m 使得 $G \supset A_m$. 故得

$$\begin{aligned}\lim_n \hat{R}_p^{A_n}(x) &\le \hat{R}_p^{A_m}(x) \le v(x) + \varepsilon p_0(x) \\ &\le \hat{R}_p^{A}(x) + \varepsilon p_0(x) + \varepsilon,\end{aligned}$$

因为 ε 是任意的, 故(3.1)成立.

下设存在 x 的一个邻域 V 使得 $A \cap V = A_n \cap V$ 对每个自然数 n 成立. 对每个自然数 n, 令

$$B_n := A_n \setminus V, \quad B := A \setminus V, \quad C := A \cap V$$

设 $p \in \mathcal{P}_c$. 据定理 6-2-12, 对每个自然数 n 有

$$\hat{R}_p^{A_n}(x) + \hat{R}_p^{B_n, C}(x) = \hat{R}_p^{B_n}(x) + \hat{R}_p^{C}(x),$$

$$\hat{R}_p^{A}(x) + \hat{R}_p^{B, C}(x) = \hat{R}_p^{B}(x) + \hat{R}_p^{C}(x), ,$$

$$\hat{R}_p^{B, C}(x) \le \hat{R}_p^{B_{n+1}, C}(x) \le \hat{R}_p^{B_n, C}(x).$$

因为 $\{B_n\}$ 单调减收敛于 B, 而 $x \in X \setminus B$, 应用上段的结论得

$$\lim_n \hat{R}_p^{B_n}(x) = \hat{R}_p^{B}(x).$$

从而

$$\hat{R}_p^{A}(x) + \hat{R}_p^{B, C}(x) \le \lim_n \hat{R}_p^{A_n}(x) + \lim_n \hat{R}_p^{B_n, C}(x)$$

$$= \lim_n \ \hat{R}_p^{B_n}(x) \ + \hat{R}_p^{C}(x)$$
$$= \hat{R}_p^{B}(x) \ + \hat{R}_p^{C}(x)$$
$$= \hat{R}_p^{A}(x) + \hat{R}_p^{B,C}(x).$$

故(3.1)成立. □

定理 9-3-2 设A是X的 Borel 子集且包含于X的子集B中. 那么, 对任意$x \in X \setminus [\mathrm{b}(B) \setminus \mathrm{b}(A)] \cap A$, 那么当限制在$A$的细闭包$\widetilde{A}$时, $\varepsilon_x^B \le \varepsilon_x^A$.

这定理启示我们, 虽然推论 9-1-3 成立, 但不能保证$\mu^A \le \mu^B$.

证明 先证, 当限制于$\widetilde{A} \setminus \{x\}$时有$\varepsilon_x^B \le \varepsilon_x^A$. 设K是$\widetilde{A} \setminus \{x\}$的一个紧子集 又设 $\{K_n\}$ 是K的单调减小的紧邻域列, 使得

$$K = \cap_{n=1}^{\infty} K_n \ .$$

对每个n, 令

$$A_n := (A \cup K_n) \cap B \ , \ \ B_n := B \setminus K_n .$$

据定理 9-1-13 有

$$\varepsilon_x^B(K) \le \varepsilon_x^{A_n}(K) + \varepsilon_x^{B_n}(K)$$

又据定理 9-1-7 , $\varepsilon_x^{B_n}(K) = 0$. 由上一定理知, $\{\varepsilon_x^{A_n}\}$浑收敛于ε_x^A , 故

$$\varepsilon_x^B(K) \le \limsup_n \varepsilon_x^{A_n}(K) \le \varepsilon_x^A(K).$$

若 $x \notin \widetilde{A}$, 那么上述已证得命题 . 下面假设 $x \in \widetilde{A}$. 如果$x \in \mathrm{b}(A)$, 那么

$$\varepsilon_x^A = \varepsilon_x^B = \varepsilon_x \ ,$$

这时, 结论自然成立. 下设$x \in A \setminus \mathrm{b}(A)$, 那么由推论 9-2-10 得

$$\varepsilon_x^{B \setminus A}(\{x\}) = 0 \ .$$

再由定理 9-1-13 得到

$$\varepsilon_x^B(\{x\}) \le \varepsilon_x^A(\{x\}) + \varepsilon_x^{B \setminus A}(\{x\}) = \varepsilon_x^A(\{x\}) \ . \qquad \square$$

定理 9-3-3 (Constantinescu C) 对 X 的任意子集 A, B 及任意 $\mu\in\Lambda$，有

$$\mu^{A\cup B}\leq \sup(\mu^{A}, \mu^{B}),$$

这里 $\sup\{\mu^{A}, \mu^{B}\}$ 表示比 μ^{A} 与 μ^{B} 都大的 X 上的最小测度.

证明 据定理 9-2-7 可不妨假定 A, B 都是细闭的 Borel 集.

设 K 为 $\mathrm{b}(A)$ 的一个紧子集. 那么由定理 9-1-8 得

$$\begin{aligned}\mu^{A\cup B}(K) &= \int \varepsilon_x^{A\cup B}(K)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_E \varepsilon_x^{A\cup B}(K)\,\mathrm{d}\mu + \int_F \varepsilon_x^{A\cup B}(K)\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

其中 $E:=\mathrm{b}(A\cup B)\setminus \mathrm{b}(A)$，$F:=X\setminus[\mathrm{b}(A\cup B)\setminus \mathrm{b}(A)]$.

对 $x\in E$，据定理 9-1-10，有 $\varepsilon_x^{A\cup B}(K)=\varepsilon_x(K)=0$. 另一方面，对 $x\in F$，由上一定理知

$$\varepsilon_x^{A\cup B}(K)\leq\varepsilon_x^{A}(K).$$

因此

$$\begin{aligned}\mu^{A\cup B}(K) &\leq \int_F \varepsilon_x^{A}(K)\,\mathrm{d}\mu\leq \int \varepsilon_x^{A}(K)\,\mathrm{d}\mu\\ &= \mu^{A}(K)\leq(\sup(\mu^{A}, \mu^{B}))(K).\end{aligned}$$

将 K 设为 $A\setminus \mathrm{b}(A\cup B)$的紧子集时也有同样结论. 因此, 同时限制在 $\mathrm{b}(A)$ 上时有 $\mu^{A\cup B}\leq\sup(\mu^{A}, \mu^{B})$. 两测度同时限制于

$$A\setminus \mathrm{b}(A\cup B),\quad \mathrm{b}(B) \text{ 与 } B\setminus \mathrm{b}(A\cup B)$$

这三个集之中的任一个之上时, 都有同样不等式成立. 由于

$$A\cup B=\mathrm{b}(A)\cup \mathrm{b}(B)\cup(A\setminus \mathrm{b}(A\cup B))\cup(B\setminus \mathrm{b}(A\cup B)),$$

注意到 $X\setminus(A\cup B)$是 $\mu^{A\cup B}$ 零测集(定理 9-2-9), 可推出本定理的结果. □

推论 9-3-4 设$\{A_n\}$是X的子集列, 其并集记作A, 并设$\mu\in\Lambda$. 如果 $\sup\{\mu^{A_n}\mid n\in\mathbf{N}\}$ (即比每个 μ^{A_n} 都大的最小测度)存在, 则必大于 μ^{A}.

证明 对有限个子集的情形, 可据上述定理采用归纳法证

之. 对于一般的情形, 可由定理 9-3-1 推出 . □

为了推广上述结果, 我们考虑 Λ 的一个子族:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{PC}} := \{ \mu \in \mathcal{M}^+ \mid \text{存在严格正的 } q \in \mathcal{PC} \text{ 使得} \mu(q) < \infty \}.$$

这里 $\mathcal{M}^+$ 仍表示 X 上的测度全体, $\mathcal{PC}$ 是 X 上的连续(有限)位势全体, 注意到关于 Λ 的定义的说明(本章开头或 § 8.3)就知道 $\mathcal{M}_{\mathcal{PC}} \subset \Lambda$. 对某个取定的 $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{PC}}$, 令

$$\mathcal{P}_\mu := \{ p \in \mathcal{PC} \mid \mu(p) < \infty \}.$$

显然 $\mathcal{P}_\mu$ 是一个凸锥, 据定义及定理 8-3-2, 存在一个严格位势 $p_0 \in \mathcal{P}_\mu$.

那么 $\mathcal{P}_\mu$ 是一个函数锥(函数锥的定义见 § 1.4), 实际上, 由 $\mathcal{M}_{\mathcal{PC}}$ 定义知其中条件 F1 满足, 由 $\mathcal{P}_\mu \supset \mathcal{P}_c$ 知 F2 满足($\mathcal{P}_c$ 定义见 § 8.3) . 为证 F3 也成立, 考虑 X 的一个由紧集构成的穷尽列 $\{K_n\}$, 使得

$$K_n \subset \overline{K}_n \subset K_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N} \text{ 且} \cup_{n=1}^{\infty} K_n = X,$$

取定 $p \in \mathcal{P}_\mu$, 那么 $\mathcal{V} := \{q \in \mathcal{P}_\mu \mid q \le p\}$ 是一个下定向族, 据 Choquet 引理(定理 1-4-7), 可选取 $\mathcal{V}$ 中一个单调减少列 $\{p_n\}$, 使得 $\lim_n p_n = 0$ 且每个 p_n 在某个紧集外等于 p (参见 § 9.1). 因此可不妨假设, 在 K_n 上 $p_n < 2^{-n}$ 且 $\mu(p_n) < 2^{-n}$, 于是 $g := \sum_{n=1}^{\infty} p_n \in \mathcal{P}_\mu$ 且 $p = o(g)$, 即对任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 K 使得

$$|p(x)| \le \varepsilon g(x), \quad x \in X \setminus K.$$

注意到, 关于严格正位势 w 及每个 $s \in \mathcal{P}_c$, $\inf\{s, w\} \in \mathcal{P}_\mu$; 令 $s_n := \inf\{s, nw\}$, 那么 $\{s_n\}$ 单调增加收敛于 s.

引理 9-3-5 设 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{PC}$ 是 X 上的一个函数锥, $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_c$; $\{\mu_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ 是 $\mathcal{M}_{\mathcal{PC}}$ 上的一个点网使得对每个 $p \in \mathcal{Q}$, $\lim_\alpha \mu_\alpha(p)$ 都存在且有限, 则存在唯一的 $\nu \in \Lambda$ 使得

$$\lim_\alpha \mu_\alpha(p) = \nu(p)$$

对每个 $p \in \mathcal{Q}$ 成立. 进一步, 若令

$$CQ:=\{s \in C(X) \mid \text{存在 } g \in Q \text{ 使得} |s| \le g\} ,$$

则对每个 $f \in CQ$ 都有 $\lim_\alpha \mu_\alpha(f) = \nu(f)$.

证明 第一个结论可直接从定理2-6-13得出, 对第二个结论, 只要注意到 CQ 中的每个正函数 s 可用 $K^+(X)$中单调增加列来逼近. 因$|s| \le g \in Q$, 泛函 ν 的延拓是可能的. □

定理 9-3-6 设 A 是 X 的子集, $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{PC}}$. 假定下面两条件成立:

a) $\{A_n\}$是由 X 的子集构成的单调增加列且每个 $A_n \subset A$, 或单调减少列但每个 $A_n \supset A$;

b) 存在一个严格位势 $p \in \mathcal{P}_\mu$ 使得

$$\lim_n \mu^{A_n}(p) = \mu^A(p) , \tag{3.2}$$

则对每个 $f \in C\mathcal{P}_\mu$ 有

$$\lim_n \mu^{A_n}(f) = \mu^A(f) .$$

特别, 当$\{A_n\}$是单调增加列且$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ 时条件 b)自然满足, 从而有同样结论.

证明 据上一引理, 存在 $\nu \in \Lambda$ 使得对每个 $f \in C\mathcal{P}_\mu$ 有

$$\lim_n \mu^{A_n}(f) = \nu(f).$$

结合条件 b)说明 $\mu^A(p) = \nu(p)$; 条件 a)说明 $\nu(q) \le \mu^A(q)$, 对所有 $q \in \mathcal{PC}$ 成立或 $\nu(q) \ge \mu^A(q)$, 对所有 $q \in \mathcal{PC}$ 成立. 因 p 是严格位势, 故 $\nu = \mu^A$.

当$\{A_n\}$是单调增加列且并集为 A 时, 对每个 $q \in \mathcal{P}_\mu$ 有

$$\lim_n \mu^{A_n}(q) = \lim_n \int \hat{R}_q^{A_n} \, d\mu$$

$$= \int \hat{R}_q^A \, d\mu = \mu^A(q) ,$$

故(3.2)式成立. □

推论 9-3-7 设 A 是 X 的 Borel 集, 则存在 A 的一个单调增加的紧子集列 $\{K_n\}$, 使得对每个$\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{PC}}$ 和每个$f \in C\mathcal{P}_\mu$ 有

$$\lim_n \mu^{K_n}(f) = \mu^K(f) = \mu^A(f), \quad \text{其中 } K := \cup_{n=1}^{\infty} K_n .$$

证明 因为X具有可数拓扑基，Borel 集为K-解析集. 据定理 6-3-8，对$\mathcal{PC}$中的严格位势p，存在A的一个单调增加的紧子集列$\{K_n\}$使得$\hat{R}_p^A=\lim\limits_{n\to\infty}\hat{R}_p^{K_n}$. 这说明

$$\lim_{n\to\infty}\mu^{K_n}(p)=\mu^A(p).$$

由上一定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\mu^{K_n}(q)=\mu^A(q)$ 对每个$q\in\mathcal{PC}$成立, 从而对每个$q\in\mathcal{PC}$,

$$\lim_{n\to\infty}\mu^{K_n}(q)=\mu^K(q)=\mu^A(q).$$

故对每个$f\in C\mathcal{P}_\mu$也有类似的式子成立的. □

定理 9-3-8 若$\mu\in\mathcal{M}_{\mathcal{PC}}$使得$A\setminus\mathrm{b}(A)$的外测度为0，则存在$A$的开邻域的单调减少列$\{V_n\}$使得对每个$f\in C\mathcal{P}_\mu$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mu^{V_n}(f)=\mu^A(f).$$

证明 据定理 9-2-7 及定理 9-2-2, 不妨设A是 Borel 集. 设$p\in\mathcal{P}_\mu$是严格位势, 据定理 6-3-12, 存在A的单调减少的开邻域列$\{V_n\}$使得

$$\lim_{n\to\infty}\int R_p^{V_n}\,\mathrm{d}\mu=\int R_p^A\,\mathrm{d}\mu$$

因为在$\mathrm{b}(A)\cup(X\setminus A)$上有$R_p^A=\hat{R}_p^A$且$\mu(A\setminus\mathrm{b}(A))=0$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\mu^{V_n}(p)=\lim_{n\to\infty}\int\hat{R}_p^{V_n}\,\mathrm{d}\mu=\int\hat{R}_p^A\,\mathrm{d}\mu=\mu^A(p).$$

从而可由定理 9-3-6 推出结果. □

下面均设A为X的子集, $x, y\in X$, 我们将研究: 当y趋于x (以各种形式)时, ε_y的性质. 首先考虑$x\in X\setminus\overline{A}$, 或$x\in\mathrm{b}(A)$的简单情形.

定理 9-3-9 若$x\in X\setminus\overline{A}$, 则对每个

$$f\in\mathrm{C}_{\mathcal{PC}}:=\{g\in C(X)\mid \text{存在 } s\in\mathcal{PC} \text{ 使得 } |g|\le s\},$$

有$\lim\limits_{y\to x}\varepsilon_y^A(f)=\varepsilon_x^A(f)$.

证明 设$p\in\mathcal{PC}$, 由定理 6-2-6, $\hat{R}_p^A(x)$ 在$X\setminus\overline{A}$调和，从而连续，故

$$\lim_{y\to x}\varepsilon_y^A(p)=\lim_{y\to x}\hat{R}_p^A(y)=\hat{R}_p^A(x)=\varepsilon_x^A(p),$$

再由引理 9-3-5 可得出结论. □

定理 9-3-10 下面三个命题等价:

(1) A 在 x 不瘦;

(2) 对每个$f\in\mathbf{C}_{\mathcal{PC}}$有$\lim\limits_{y\to x}\varepsilon_y^A(f)=f(x)$;

(3) $x\in A^0$(A 的内部) 或对每个$f\in\mathbf{C}_{\mathcal{PC}}$,有

$$\lim_{y\to x,y\in X\setminus A}\varepsilon_y^A(f)=f(x).$$

证明 (1)⇒2) 因A在x不瘦，故$\varepsilon_x^A=\varepsilon_x$，从而对每个$p\in\mathcal{PC}$有

$$\begin{aligned}p(x)=\hat{R}_p^A(x)&=\liminf_{y\to x}\hat{R}_p^A(y)\\&\le\limsup_{y\to x}\hat{R}_p^A(y)\\&\le\limsup_{y\to x}p(y)=p(x).\end{aligned}$$

故$\lim_{y\to x}\varepsilon_y^A(p)=p(x)$. 再利用引理 9-3-5 得出(2).

(2)⇒(3) 显然成立 .

(3)⇒(1) 若$x\in A^0$, 当然A在x不瘦. 所以下设$x\notin A^0$且对每个$f\in\mathbf{C}_{\mathcal{PC}}$都有

$$\lim_{y\to x,y\in X\setminus A}\varepsilon_y^A(f)=f(x).$$

据此，考虑严格位势$p\in\mathcal{PC}$, 由定理 6-2-9 得出，

$$\lim_{y\to x,y\in X\setminus A}R_p^A(y)=\lim_{y\to x,y\in X\setminus A}\hat{R}_p^A(y)=p(x).$$

因为在A上有$R_p^A=p$，故结合上式推得

$$\lim_{y\to x}R_p^A(y)=p(x).$$

即 $\hat{R}_p^A(x)=p(x)$，故由定理 9-2-2 推出，A 在 x 不瘦. □

下面考虑 y 沿着 X 上一个收敛于 x 的滤子 $\boldsymbol{F}$ 趋近于 x 时 ε_y^A 的性质. 回忆 § 1.1.8 所介绍的有关知识，$\boldsymbol{F}$ 收敛于 x 等价于与 $\boldsymbol{F}$ 相关联的点网$(y_\alpha \mid \alpha\in\Pi)$ (Π 是一个定向集)收敛于 x . 因此上述问题可化成考虑测度族 Λ 上的网$(\varepsilon_{y_\alpha}^A \mid \alpha\in\Pi)$ 的性质来研究. 不过，下面仍按多数文献在考虑这问题时的习惯，采用滤子来叙述，并用 " $\lim_F$ " 或用 " $\lim_{y,F}$ " 表示当 y 沿 $\boldsymbol{F}$ 趋近于 x 时的极限.

若 $\boldsymbol{F}$ 收敛于 x , $p\in\mathcal{PC}$ 且使 $\lim_F\hat{R}_p^A$ 存在(有限)，则

$$\hat{R}_p^A(x)=\liminf_{y\to x}\hat{R}_p^A(y)\le\lim_F\hat{R}_p^A$$
$$\le\lim_F p(y)=p(x)\quad ,$$

因此，存在某个 $\alpha\in[0,1]$使得

$$\lim_F\hat{R}_p^A=\alpha p(x)+(1-\alpha)\hat{R}_p^A(x)\,.$$

上式中的 α 看去似应与 p 的选取有关，但下面定理告诉我们这样的事实，α 不依赖于 p 的选取 .

定理 9-3-11 (Boboc N-Cornea A) 设 A 为 X 的子集，x 为 X 的一点，$\boldsymbol{G}$ 是 X 上的超滤子且收敛于 x，那么存在 X 上的一个测度 $\lambda\in\Lambda$ 满足：

A)每个 $p\in\mathcal{PC}$ 都是 λ 可积函数且有下式成立

$$\lim_G\ \hat{R}_p^A=\int p\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{3.3}$$

左边的极限是沿超滤子 $\boldsymbol{G}$ 取的，而且 $y\mapsto\varepsilon_y^A$ 沿滤子浑收敛于 λ .

B) $\lambda(\{x\})\in[\varepsilon_x^A(\{x\}),1]$;

C) $\lambda=\lambda(\{x\})\varepsilon_x+[1-\lambda(\{x\})]\,\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}$

证明 用φ 表示 $\mathcal{PC}$ 上的实泛函:

$$p\mapsto\lim_G\ \hat{R}_p^A\ .$$

据定理 5-4-13, 函数锥 $\mathcal{PC}$ 满足定理 2-6-10 的条件. 泛函 φ 显然满足该定理的条件 a, b 和 c; 因为对任意 $p \in \mathcal{PC}$, $\varphi(p) \le p(x)$, 由引理 9-1-1 知 φ 也满足条件 d . 故由定理 2-6-10 知, 存在 X 上唯一的测度 λ 使得

$$\varphi(p) = \int p \, \mathrm{d}\lambda$$

对任意 $p \in \mathcal{PC}$ 成立, 即本定理结论 A)的第二部份已证得. A)的其余结论可用定理 5-4-13 推出.

下面先证 C) .令 $\alpha := \lambda(\{x\})$. 那么对每个 $p \in \mathcal{P}_c$, 有

$$\alpha p(x) \le \int p \, \mathrm{d}\lambda \le p(x).$$

故 $\alpha \le 1$.

先假定 $\alpha = 1$. 由上一不等式推出

$$\int p \, \mathrm{d}\lambda = p(x)$$

对每个 $p \in \mathcal{P}_c$ 成立, 从而 $\lambda = \varepsilon_x$ (定理 5-4-13). 即此时有 C) 成立.

再设 $\alpha < 1$. 令

$$\mu := \frac{1}{1-\alpha}(\lambda - \alpha\varepsilon_x). \tag{3.4}$$

于是, 对每个 $p \in \mathcal{P}_c$, 有

$$\begin{aligned}\int p \mathrm{d}\mu &= \frac{1}{1-\alpha}\int p \, \mathrm{d}\lambda - \frac{1}{1-\alpha}p(x) \\ &\le \frac{1}{1-\alpha}p(x) - \frac{\alpha}{1-\alpha}p(x) = p(x).\end{aligned}$$

因此, 据推论 5-4-2, 对 X 上任何正的超调和函数 u, 有

$$\int u \, \mathrm{d}\mu \le u(x).$$

我们要证, 对每个 $p \in \mathcal{P}_c$, 有

$$\int p \, \mathrm{d}\mu = \int p \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}.$$

由此可推出 $\mu = \varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}$.

设 V 是 x 的一个开邻域, 对任意 $y \in X$, 据定理 9-1-13, 有

$$\varepsilon_y^A \le \varepsilon_y^{A\cap V} + \varepsilon_y^{A\setminus V}.$$

于是，对每个$f\in \boldsymbol{K}^+(X)$，当f在V的闭包的一个邻域上的值恒为0时，有

$$\varepsilon_y^A(f) \le \varepsilon_y^{A\setminus V}(f).$$

故由定理 9-1-7 及 9-1-8 得

$$(1-\alpha)\,\mu(f)=\lambda(f)=\lim_{y,G}\varepsilon_y^A(f)\le \lim_{y,G}\ \varepsilon_y^{A\setminus V}(f)=\varepsilon_x^{A\setminus V}(f).$$

设u为X上的正的超调和函数，$u\le p$且在$A\setminus V$上有$u=p$；又设$f\in \boldsymbol{K}^+(X), f\le 1$且在$V$的闭包的一个邻域上$f$恒为0，则

$$0\le(1-\alpha)\int f(p-u)\mathrm{d}\mu\le\int f(p-u)\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus V}$$
$$\le\int(p-u)\mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus V}=\hat{R}_p^{A\setminus V}(x)-\hat{R}_u^{A\setminus V}(x)=0.$$

这里用到了推论 9-1-4. 因此

$$\int fp\,\mathrm{d}\mu=\int fu\,\mathrm{d}\mu\le\int u\,\mathrm{d}\mu\le u(x).$$

因为u是任意的，故由定理 9-1-2 得

$$\int fp\,\mathrm{d}\mu\le R_p^{A\setminus V}(x)=\hat{R}_p^{A\setminus V}(x)$$
$$\le R_p^{A\setminus\{x\}}(x).$$
$$=\int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}.$$

又因V与f是任意的且$\mu(\{x\})=0$，故

$$\int p\,\mathrm{d}\mu\le\int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}.$$

其反向不等式可由定理 9-1-2 定理 6-2-5 推出. 再次应用定理 5-4-13 得 $\mu=\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}$，代入(3. 4)式就得到 C).

再证 B). 我们已证得 $\lambda(\{x\})\le 1$. 若A在x不瘦，显然有 $\lambda=\varepsilon_x, \varepsilon_x^A=\varepsilon_x$. 故 B)成立.

下设 A 在 X 瘦. 设 F 是一个包含了$\{x\}$的超滤子，那么$y\mapsto \varepsilon_y^A$沿着超滤子F浑收敛于ε_x. 据结论 C)有

$$\varepsilon_x^A = \varepsilon_x^A(\{x\})\varepsilon_x + (1 - \varepsilon_x^A(\{x\}))\,\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}.$$

因为A在x瘦，故$A\setminus\{x\}$也在x瘦，从而由定理 9-1-2 及 7-2-2 存在一个$p\in\mathcal{P}_c$，使得

$$\int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}} = \hat{R}_p^{A\setminus\{x\}}(x) < p(x).$$

从而

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x^A(\{x\})\,(p(x) - \int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}) + \int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}\\
&= \int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^A = \hat{R}_p^A(x) \le \lim_{\mathcal{F}} \hat{R}_p^A = \int p\,\mathrm{d}\lambda\\
&= \lambda(\{x\})\,(p(x) - \int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}) + \int p\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}},
\end{aligned}$$

于是

$$\varepsilon_x^A(\{x\}) \le \lambda(\{x\}). \qquad \square$$

上面这一定理的重要性之一，体现在研究 Dirichlet 问题的解的边界性质，下面的推论就是一个例证，它在古典位势论中的相应结果由 Frostmann O 得出.

推论 9-3-12 设x是X的开集V的一个边界点，$\mathcal{F}$是V上收敛于x的一个超滤子. 那么存在一个实数$\alpha\in[0,1]$使得对∂V上的任何连续的实函数f，当X上存在某个位势p使得$|f|\le p$在∂V上成立时，我们有

$$\lim_{\mathcal{F}} H_f^V = \alpha f(x) + (1-\alpha)\int f\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{X\setminus(V\cup\{x\})}.$$

证明 设λ是定理所说的测度，$\alpha := \lambda(\{x\})$. 据定理 9-1-2 有，$\varepsilon_x^{A\setminus V} = \mu_x^V$. 因此，若$f$具有紧支柱，则由定理马上推出所要的结论.

设$g\in\mathcal{K}(X)$, $0\le g\le 1$， $g(x)=1$. 那么在V上有

$$H_{|f|(1-g)}^V \le R(|f|(1-g))$$

$$\int |f|(1-g)\,\mathrm{d}\varepsilon_x^{X\setminus(V\cup\{x\})} \le R(|f|(1-g))(x).$$

从而

$$|\lim_F H_f^V - \alpha f(x) - (1-\alpha)\int f \mathrm{d}\varepsilon_x^{X\setminus(V\cup\{x\})}|$$
$$\le |\lim_F H_{f\cdot g}^V - \alpha(fg)(x) + (1-\alpha)\int fg\,\mathrm{d}\,\varepsilon_x^{X\setminus(V\cup\{x\})}|$$
$$+\lim_F H_{|f|(1-g)}^V + (1-\alpha)\int |f|(1-g)\mathrm{d}\varepsilon_x^{X\setminus(V\cup\{x\})}$$
$$\le 2R(|f|(1-g))(x).$$
因为$|f|\,g\le p$，故$\inf R(|f|(1-g))(x)=0$，这里下确界是对所有满足条件的函数g取的. □

定理 9-3-13 设F是X上收敛于$x\in X$的滤子, $\alpha\in[0,1]$. 则下面三个命题等价:

(1) 存在一个严格位势p满足
$$\lim_F \hat{R}_p^A = \alpha p(x) + (1-\alpha)\hat{R}_p^A(x);$$
(2) 对每个$f\in C_{\mathcal{PC}}$，
$$\lim_{y,F}\varepsilon_y^A(f) = (\alpha\,\varepsilon_x + (1-\alpha)\,\varepsilon_x^A)(f);$$
(3) $\lim_{y,F}\varepsilon_y^A = \alpha\varepsilon_x + (1-\alpha)\varepsilon_x^A$

证明 设 $\nu := \alpha\,\varepsilon_x + (1-\alpha)\,\varepsilon_x^A$，又设$G$是$X$上的、包含$F$的超滤子. 据上一定理, 存在唯一的测度λ, 使得
$$\lambda := \beta\,\varepsilon_x + (1-\beta)\,\varepsilon_x^A$$
满足
$$\lim_{y,G}\ \varepsilon_y^A(f) = \lambda(f)$$
对每个$f\in \mathbf{C}_{\mathcal{PC}}$成立, 其中$\beta := \lambda(\{x\})$ (这因为对每个$p\in\mathcal{PC}$都有(3.3)式成立, 由引理 9-3-5 推出). 故
$$\lim_{y,G}\ \varepsilon_y^A = \lambda\,.$$

同时我们注意到, 当$\alpha\le\beta$时有 $\nu\le\lambda$ 而当 $\alpha\ge\beta$时$\lambda\le\nu$. 因此, 若(1)或(3)成立, 则 $\nu=\lambda$. 这说明(1)蕴涵(2)且(3)蕴涵(2). 反之, 当(2)成立时, 显然必有(1)及(3)成立. □

§ 9.4 极性与瘦性公理，基与本性基

仍设$(X, \mathcal{U})$为具可数基的 **P** 调和空间.

1. 极性公理

定义 称$(X, \mathcal{U})$满足**极性公理**，若X的每个半极集都是极集.

定理 9-4-1 下面四个命题等价

a) $(X, \mathcal{U})$ 满足极性公理;

b) 对X的每个子集A, $A \setminus b(A)$是极集;

c) 对X的每个子集A及每个$\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{PC}}$, μ^A的细支撑是$b(A)$.

d) 对X的每个子集A及每个$\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{PC}}$, $(\mu^A)^A = \mu^A$.

证明 a) $\Rightarrow$ b)由定理 9-2-2 推出.

b)$\Rightarrow$c) 因为$A \setminus b(A)$是极集，而$\widetilde{A} = A \cup b(A)$，所以对每个$p \in \mathcal{PC}$有

$$\hat{R}_p^{b(A)} \le \hat{R}_p^{\widetilde{A}} = \hat{R}_p^A \le \hat{R}_p^{A \setminus b(A)} + \hat{R}_p^{b(A)} = \hat{R}_p^{b(A)}.$$

故$\mu^A = \mu^{b(A)}$. 由定理 9-2-9 知μ^A的细支撑是$b(A)$的细闭包，即$b(A)$ (因$b(A)$本身是细闭集，见定理 9-2-2).

c) $\Rightarrow$ d) 设$p \in \mathcal{PC}$, 那么在$b(A)$上有$\hat{R}_p^A = p$, 故

$$(\mu^A)^A(p) = \int \hat{R}_p^A \, d\mu^A = \int p \, d\mu^A = \mu^A(p).$$

因p是任意的，故$(\mu^A)^A = \mu^A$.

d) $\Rightarrow$ a) 假定 a)不成立. 则存在一个完全瘦的集E不是极集. 于是，存在$x \in X$使得$\varepsilon_x^E \ne 0$. 设$p \in \mathcal{PC}$是严格位势. 因为$\hat{R}_p^E < p$, 故

$$(\varepsilon_x^E)^E(p)=\int \hat{R}_p^E\,\mathrm{d}\,\varepsilon_x^E<\int p\,\mathrm{d}\,\varepsilon_x^E,$$

得$(\varepsilon_x^E)^E\neq\varepsilon_x^E$，即 d)不成立. □

下面定理的一个应用是，为经典位势论提供一个关于瘦性的精细判别法. 我们已经知道，在经典位势论中，极性公理是满足的.

定理 9-4-2 设 A 是 X 的子集，$\{x\}$是 X 的极集，又设 $s>0$ 是连续的上调和函数. 则下述命题等价:

(a) A 在 x 不瘦;

(b) 对 x 的任意开邻域 V，都有 $\hat{R}_s^{A\cap V}(x)=\hat{R}_s^A(x)>0$;

(c) 对 x 的任意开邻域 V，$\hat{R}_u^A(x)=\hat{R}_s^A(x)>0$，其中

$$u:=R_s^V=\hat{R}_s^V.$$

证明 a) ⇒b) 因 A 在 x 不瘦，x 的邻域 V 当然也在 x 不瘦，故 $A\cap V$ 在 x 不瘦，从而 $\hat{R}_s^{A\cap V}(x)=s(x)=\hat{R}_s^A(x)$.

b) ⇒ c) 对 x 的开邻域 V 有（因在 V 上 $u:=R_s^V=s$）

$$R_s^{A\cap V}=R_u^{A\cap V}\le R_u^A\le R_s^A.$$

故当 b)成立时，当然有(c)成立.

c) ⇒ a) 设$\{V_n\}$是一个单调减开集列且为 x 的一个邻域基，对每个自然数 n，令 $u(n):=R_s^{V_n}$，则

$$\int R_s^{V_n}\,\mathrm{d}\,\varepsilon_x^A=\int u(n)\mathrm{d}\,\varepsilon_x^A=\hat{R}_{u(n)}^A(x)=\hat{R}_s^A(x).$$

据引理 6-2-1,

$$\int R_s^{\{x\}}\,\mathrm{d}\,\varepsilon_x^A=\lim_{n\to\infty}\int R_s^{V_n}\,\mathrm{d}\,\varepsilon_x^A=\hat{R}_s^A(x)>0.$$

因为$\{x\}$是极集，故在 $X\setminus\{x\}$上有 $R_s^{\{x\}}=0$. 从而可由上式推出定理$\varepsilon_x^A(\{x\})>0$.另一方面，因$\{x\}$是极集，有 $\varepsilon_x^A=\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}$（定理 9-1-9 与 9-1-13). 这时，若 $x\notin \mathrm{b}(A)$，则 x 不属于 $A\setminus\{x\}$的细闭包，据定理 9-2-9 知，$\varepsilon_x^{A\setminus\{x\}}(\{x\})=0$，从而 $\varepsilon_x^A(\{x\})=0$. 矛盾. 因此

$x \in \mathrm{b}(A)$, 即 A 在 x 不瘦. □

2. 本性基与瘦性公理

定义 设 A 为 X 的子集, $x \in X$. 若对 x 的任意细邻域 G, $A \cap G$ 都不是半极集, 就说 A 在 x **无半极性**; 否则, 就说是 A 在 x 具有半极性. 令

$$\beta(A):=\{x \in X \mid A \text{ 在 } x \text{ 无半极性}\},$$

称之为 A 的**本性基**.

从定义看到, 半极性与本性基是局部性质且可立即推出: (1) $\beta(A)$ 是细闭集; (2) A 的内部的细闭包 $\widetilde{A}^0 \subset \beta(A) \subset \widetilde{A}$; (3) 若 B 也是 X 的子集, 则 $\beta(A \cup B)=\beta(A) \cup \beta(B)$.

定理 9-4-3 对 X 的任一子集 A, 本性基 $\beta(A)$ 是使得其关于 A 的余集具有半极性的诸细闭集中最小者, 即: $A \setminus \beta(A)$ 是半极集且若 F 是使得 $A \setminus F$ 成为半极集的细闭集, 则 $\beta(A) \subset F$.

特别, $\beta(A) \subset \mathrm{b}(A)$; 当且仅当 A 是半极集时有 $\beta(A)=\varnothing$.

证明 据定义

$$X \setminus \beta(A)=\cup\{G \mid G \text{ 是细开集且 } A \cap G \text{ 是半极集}\} \tag{4.1}$$

据定理 9-2-16, 存在一列 X 的细开集列 $\{G_n\}$, 使得每个 $A \cap G_n$ 都是半极集且 $E:=(X \setminus \beta(A)) \setminus \cup_n G_n$ 也是半极集. 因为

$$A \setminus \beta(A) \subset E \cup (\cup_n (A \cap G_n)),$$

故 $A \setminus \beta(A)$ 也是半极集.

反之, 设 F 是细闭集且 $A \setminus F$ 是半极集. 那么 $X \setminus F$ 是细开集且 $A \cap (X \setminus F)$ 是半极集, 由(4.1)式知 $X \setminus \beta(A) \supset A \cap (X \setminus F)$, 即 $\beta(A) \subset F$.

因为 $A \setminus \mathrm{b}(A)$ 是半极集且 $\mathrm{b}(A)$ 是细闭集, 故 $\beta(A) \subset \mathrm{b}(A)$. 其余结论显然. □

推论 9-4-4 对 X 的每个子集 A, $\beta(\beta(A)) = \mathrm{b}(\beta(A)) = \beta(A)$. 特别, $\beta(A)$是基本集.

若$\{A_n\}$是 X 的子集列, A 是它的并集, 又记 $A' = \cup_n \beta(A_n)$. 则 $\beta(A) = \widetilde{A}' = \mathrm{b}(A') = \beta(A')$.

证明 显然$\beta(\beta(A)) \subset \mathrm{b}(\beta(A)) \subset \beta(A)$. 另一方面, $A \setminus \beta(A)$ 和 $\beta(A) \setminus \beta(\beta(A))$ 都是半极集, 因此 $A \setminus \beta(\beta(A))$是半极集. 因 $\beta(\beta(A))$是细闭的, 应用定理 9-4-3 知$\beta(A) \subset \beta(\beta(A))$. 所以, 二者相等.

下设 $A = \cup_n A_n$, $A' = \cup_n \beta(A_n)$. 因每个$\beta(A_n) \subset \beta(A)$, 故 $A' \subset \beta(A)$. 又因$\beta(A')$是细闭的, 故

$$\beta(A') \subset \mathrm{b}(A') \subset \widetilde{A}' \subset \beta(A).$$

同时, $A \setminus A' = \cup_n (A_n \setminus \beta(A_n))$, 故 $A \setminus A'$ 是半极集, 从而 $A \setminus \beta(A)$ 是半极集, 推出$\beta(A) \subset \beta(A')$. 即$\beta(A) = \beta(A')$. □

我们看到 b 与 β 都是从 2^X 到 2^X 的映射, 如果对 X 的每个子集 A 都有 $\mathrm{b}(A) = \beta(A)$, 则记 $\mathrm{b} = \beta$. 对一般的调和空间而言, $\mathrm{b} \neq \beta$. 例如, 考虑 $\boldsymbol{R}^1$ 上的位移相应的位势论, 则 $\mathrm{b} \neq \beta$, (见 Bliedtner J ,Hansen W[6]) . 但在经典位势论中, $\beta = \mathrm{b}$, 这因为有如下命题:

定理 9-4-5 在一个 **P** 调和空间 X 中, $\beta = \mathrm{b}$ 当且仅当 X 满足瘦性公理, 即每个半极集是完全瘦的.

证明 ⇒: 若 $E \subset X$ 是半极集, 那么 $\mathrm{b}(E) = \beta(E) = \varnothing$.

⇐:设 $E \subset X$, 那么半极集 $E \setminus \beta(E)$是完全瘦的, 故

$$\mathrm{b}(E) \subset \mathrm{b}(E \setminus \beta(E)) \cup \mathrm{b}(\beta(E)) = \mathrm{b}(\beta(E)) = \beta(E) \subset \mathrm{b}(E).$$

从而$\beta(E) = \mathrm{b}(E)$. □

引理 9-4-6 设 $q \in \mathcal{PC}$, E 是 X 的细闭子集, 则下面四个命题等价:

(a) $q = q_E$;

(b) $R_q^{\beta(E)} = q$;

(c) $R_q^E = q$；

(d) $\delta(q) \subset E$.

证明 设K为 $\beta(E)$ 的紧子集, 由定理 8-3-7 知

$$q_K = R_{q_K}^K \le R_q^{\beta(E)};$$

又因为$B := E \setminus \beta(E)$是半极集, 据定理9-2-17知$p_B = 0$. 若 (a) 成立, $q = q_E$, 据命题 8-3-11,

$$\begin{aligned} q &= q_E = q_{\beta(E) \cup B} = q_{\beta(E)} \\ &= \sup\{ q_K | K \text{ 为} \beta(E) \text{的紧子集} \} \\ &\le R_q^{\beta(E)} \le q . \end{aligned}$$

即(b)成立.

假定命题(b)成立. 因为E是细闭的, 故有 $\beta(E) \subset E$, 从而 $R_q^{\beta(E)} \le R_q^E \le q$, 推出 (c) 成立.

若 (c) 成立, 则对每个 $x \in X \setminus E$ 有 $\varepsilon_x^E(q) = q(x)$ 且 $\varepsilon_x^E \ne \varepsilon_x$. 因此 $\delta(q) \cap (X \setminus E) = \varnothing$, 从而$\delta(p) \subset E$. 即 d)成立.

若 d)成立, 据命题 8-3-11 之 (5) 及 (2) 知 (a) 成立. □

注 上面 c)⇒ d) 说明了, 对任意 $q \in \mathcal{PC}$, $\delta(q)$是使得 $R_q^E = q$ 成立的最小细闭集 E.

下面定理说明基本集与本性基本集是一致的.

定理 9-4-7 设A是X的子集, 则$\mathrm{b}(A) = A$当且仅当$\beta(A) = A$.

证明 设$A = \mathrm{b}(A)$, $p \in \mathcal{PC}$是严格位势. 于是, 由定理 9-2-14 知,

$$R_p^A = \sup\{ q \in \mathcal{PC} \mid q \le p, R_q^A = q \}.$$

因 $A = \mathrm{b}(A)$ 为细闭集, 再由上一定理知

$$R_p^A = \sup\{ q \in \mathcal{PC} \mid q \le p, R_q^{\beta(A)} = q\} = R_p^{\beta(A)}.$$

因此 $\mathrm{b}(A) = \mathrm{b}(\beta(A))$. 由推论 9-4-4 知 $A = \beta(A)$.

反之, 若 $A = \beta(A)$, 则 $\mathrm{b}(A) = \mathrm{b}(\beta(A)) = \beta(A) = A$. □

推论 9-4-8 设 A 是细闭集，则$\beta(A)$是满足 $B \subset \mathrm{b}(B)$的、A 的子集 B 中的最大者.

证明 据定理 9-4-3 、推论 9-4-4，$\beta(A)$是 A 的基本子集. 设 B 是 A 的子集且满足 $B \subset \mathrm{b}(B)$，则 $\mathrm{b}(B) \subset \mathrm{b}(\mathrm{b}(B)) \subset \mathrm{b}(B)$，据定理 9-4-7 有$\beta(\mathrm{b}(\beta)) = \mathrm{b}(B)$. 故 $B \subset \mathrm{b}(B) = \beta(\mathrm{b}(B)) \subset \beta(\mathrm{b}(A)) \subset \beta(A)$.
□

3. 位势细支柱的特征

在 § 8.3 、§ 8.4 及本节上段，我们已经研究过位势细支柱 $\delta(q)$的一些特征，例如，对任意 $q \in \mathcal{PC}$，$\delta(p)$是细闭的 Borel 集，$\delta(q)$是使得 $R_q^E = q$ 成立的最小细闭集 E. 现在用基与基本集的概念来作进一步刻画.

引理 9-4-9 设$\{q_n\}$是 $\mathcal{PC}$ 中的列使得 $q := \sum_{n=1}^{\infty} q_n \in \mathcal{PC}$，则

$$\delta(p) = \mathrm{b}(\cup_{n=1}^{\infty} \delta(q_n)).$$

特别，对任意 $f, g \in \mathcal{PC}$ 都有

$$\delta(f+g) = \delta(f) \cup \delta(g).$$

证明 因 $q_n < q$，由引理 8-3-5 知$\delta(q_n) \subset \delta(q)$, $n \in \mathbf{N}$. 从而

$$E := \mathrm{b}(\cup_{n=1}^{\infty} \delta(q_n)) \subset \mathrm{b}(\delta(q)) = \delta(q).$$

另一方面，对每个 $n \in \mathbf{N}$ 有 $R_{q_n}^E = q_n$. 利用定理 6-2-5 推出 $R_q^E = q$ 和 $\delta(q) \subset E$(定理 8-3-7). □

下一定理给出细支柱$\delta(q)$在各种意义下的细特征.

定理 9-4-10 设 $p \in \mathcal{PC}$，$x \in X$，则下面四个命题等价:

(a) $x \in \delta(p)$;

(b) $R_p^{X \setminus V}(x) < p(x)$，对 x 的每个细邻域 V 成立;

(c) $p_V := \sup\{q \in \mathcal{PC} \mid q \prec p, \mathrm{C}(q) \subset V\} \neq 0$，对 x 的每个 Borel

细邻域 V 成立.

(d) $p_V(x) \neq 0$, 对 x 的每个 Borel 细邻域 V 成立.

证明 (a)⇒(b):设 V 是 $x \in \delta(p)$ 的一个细邻域. 因为 $\varepsilon_x^{X\setminus V} \neq \varepsilon_x$, 故 $R_p^{X\setminus V}(x) < p(x)$.

(b)⇒(a) $V := X \setminus \delta(p)$ 是细开集, $R_p^{X\setminus V} = R_p^{\delta(p)} = p$.

(a)⇒(c) 设 V 是 x 的细邻域且为 Borel 集使得 $p_V = 0$, 那么 $\delta(p) = \delta(p_{X\setminus V})$ 包含于 $X \setminus V$ 的细闭包, 故 $x \notin \delta(p)$.

(c)⇒(a) $V := X \setminus \delta(p)$ 是细开集, $p_V = p - p_{\delta(p)} = 0$.

(c) ⇒(d) 设 V 是 x 的细邻域且为 Borel 集使得 $p_V(x) = 0$. 易证明, 每个吸收集(§ 7.4)是细开的, 故 $\{p_V = 0\}$ 是细开集, 从而存在一个 x 的紧细邻域 K 使得 $K \subset \{p_V = 0\} \cap V$, 于是在 K 上有 $p_K \leq p_V = 0$. 因此 $p_K = 0$.

(d) ⇒(c) 显然. □

下面定理给出基本集的一个特征:

定理 9-4-11 X 的子集 E 是基本集的充要条件是, 存在一个位势 $p \in \mathcal{PC}$ 使得 $E = \delta(p)$.

证明 充分性: 设存在 $p \in \mathcal{PC}$, 使得 $E = \delta(p)$. 由定理 8-4-3 之注知, E 是细闭的 Borel 集; 再由定理 8-4-4, 对任意 $u \in \mathcal{U}_+$, $R_u^E \in \mathcal{U}_+$. 特别, 对严格位势 q, 有 $q = R_q^E = \hat{R}_q^E$ 在 E 成立. 由定理 9-2-2 得 $E \subset \mathrm{b}(E)$, 从而 $E = \mathrm{b}(E)$. 即 E 是基本集.

必要性的证明需用到较复杂的工具, 例如核的收缩等概念与性质, 此处略去. 有兴趣读者可阅文献[6].□

关于第九章内容的深化, 诸如扫除的细性质, 扫除测度的聚点等的更进一步的研究, 以及 Martin 边界理论的相应推广——如极端表现测度等, 读者可参见[6]和[10]. 关于 Dirichlet 问题的研究, 本书将在第十二章扫除空间中简要介绍.

第三篇　现代位势论概述

本篇是第二篇所述内容的拓广与深化，目的是使已掌握或基本了解调和空间论的读者对现代位势论的发展概况有一个基本的认识，以便尽快接近科学研究的前沿.

第十章　位势论的发展与近况

§ 10.1　位势论发展简史

位势论起源于物理学的万有引力学说和静电学. 远在 1773 年, Lagrange J 就注意到力场是一函数(称为 Newton I 位势)的梯度. 在三维欧氏空间, 一个单位质点 ε_y 的引力场在点 $x(x \neq y)$的 Newton 位势等于把一个单位质点从无穷远移到点 x 所做的功, 其值为

$$\frac{1}{|x-y|}.$$

因此, 一个质量分布 μ 的引力场在 x 的 Newton 位势是

$$U^{\mu}(x) = \int \frac{1}{|x-y|} \mathrm{d}\mu(y)$$

1772 年, Laplace R S 证明了, 在不分布质量的地方, 位势满

足 Laplace 方程. 这样, 物理问题便化为求解偏微方程的数学问题.

从 18 世纪到 19 世纪末, 位势论的研究限于 N 维欧氏空间 R^N 的 Newton 位势($N\geq 3$)和对数位势($N=2$), 即所谓经典位势论. 其中心问题之一是古典 Dirichlet 问题的求解. 1823 年, Poisson S D 给出了球域的积分公式; 1828 年, Green G 对边界充分光滑的有界区域, 从物理直观并借助于 Green 函数给出了解; 1840 年, Gauss C F 利用变分法解了平衡问题并得到了 Dirichlet 问题的新解法. 这两个问题与扫除问题相关联, 它们被称为位势论三大基本问题. 1855 年. Dirichlet G L 和 Riemann B 利用所谓 Dirichlet 原理给出了解. 此外, 还有 Poincare H 的扫除法, Schwarz H A 交错法等. 但是, 由于缺乏足够的数学工具, 这些解法是不严密的, 需要附加条件的.

另外, 在这个时期的主要成果还有: 1839 年 Earnshaw E 证明了 Dirichlet 解的极值原理; 1850 年, Rieman 把位势论与函数论做统一处理, 揭示了 Green 函数和位势与保形映射之间的密切联系; 1886 年, Harnack A 建立 Harnack 不等式与 Harnack 收敛原理. 此外, 关于 Neunann K G 问题及多重调和函数的研究也有不少成果. 这样一来, 到了 19 世纪末, 位势论的三个基本原理, 即极小值原理, 收敛性质及 Dirichlet 问题已基本建立, 它为现代位势论的发展做了很好的准备.

本世纪以来, 由于深入运用现代函数论、测度和积分理论、泛函分析、一般拓扑学、抽象代数以及现代概率论等分支的思想方法, 位势论得到了蓬勃发展, 开辟了新的研究方向, 创造了新的方法, 成为分析领域中比较彻底完成了现代化变革的一个分支, 也促进了其它数学分支的发展.

本世纪初, 一个重要发现是 1909 年 Zarmba S 所揭示的事实:

“去心球体的 Dirichlet 问题未必可解”. 更有深刻意义的不可解区域的反例于 1913 年由 Lebesgue H 利用所谓“ Lebesgue 刺”给出，这导致了对区域边界不正则点的研究和广义 Dirichlet 问题的提出. 前者由 Kellogg O, Bouligand G 和 Wiener N 等人完全解决；关于后者， Perron O 于 1923 年提出了关于一般区域 Dirichlet 问题并给出新的解法，经过 Wiener（ 1925 年），特别是 Brelot M（ 1939 年）的改进和推广，得到了解的存在与唯一性定理的一般形式. 此外， Keldysh M V 等人在 30 年代还研究了 Dirichlet 解的稳定性.

1925 年， Riesz F 引进了上（下）调和函数的概念，这为位势论研究提供了新的方法； Riesz 分解定理建立了上调和函数与位势之间的紧密联系；而对上调和函数连续性的研究导致了细拓扑概念的引入.

二十年代， Vallée-Poussin 用现代观点改进并发展了 Poincaré扫除法； Frostmann O 发展了 Gauss 变分法，成功解决了紧集的平衡问题和扫除问题. 同期，位势论已推广到非古典核的情况，特别是 Riesz M 核，它对应于非局部微分积分算子，已不属于通常偏微分方程所关联的位势核了.

从四十年代起，泛函分析与拓扑学的方法系统引入位势论并使它发展到一个新水平. 1941 年， Cartan H 利用 Hilbert 空间理论研究具有有限能量的测度等，得到很大的成功；同年, Martin R S 建立了 Martin 边界理论，导致了关于正上调和函数及理想边界理论的深入研究; 1950 年, Deny J 用 Schwartz 广义函数论解决了完备化问题； 1955 年， Choquet G 建立了一般容量理论及可容性定理，并用紧凸集的极端点理论改进了 Martin 定理的证明. 此外，对于更一般的空间(例如流形、 LCA 群)和更一般形式的位势核的位势论也有了深入的探讨.

§ 10.2 现代位势论研究的特点与近况概述

50年代后，位势论迅速发展，除了它越来越广泛地与复分析，拓扑学，几何测度论，调和分析，微分方程，微分几何，泛函分析等相邻数学分支相互结合，相互渗透且发挥着日益增加的作用外，还具有如下两个显著特点：

其一是，各种公理体系的位势论不断建立和完善. 为了了统一处理已有的理论并加以推广，使之适用于一般椭圆和抛物型方程或随机过程，自五十年代中期起，Tautz G, Doob J, Brelot M, Bauer H, Bony J M, Constantinesca C 和 Cornea A 等人分列给出不同的公理系统，建立各种形式的调和空间位势论(最近，关于多重调和空间的公理系统也建立起来)；而 Deny J 等人则从能量和 Dirichlet 积分等概念出发建立了称为 Dirichlet 空间的公理理论. 八十年代， H 锥理论与扫除空间位势论把调和空间论的发展推进了一大步；当今的狄氏型(Dirichlet form)因其与马氏过程的紧密结合而大大地超越了 Deny 等人当年的工作. 与此同时，非线性公理体系也逐步发展，越来越引人注目.

其二是，位势论与随机过程的内在联系逐步深入研究，同时促进了分析与概率论这两个在 40 年代前仍被视为互不相干的数学领域的发展. 40 年代中期，Kakutani S, Kac M 和 Doob J 等人先后发现经典位势论与 Brown 运动之间存在一种对应关系. 50 年代起，Doob 等人为揭示二者之间的联系做了大量工作(见[11])；1957 年 Hunt G A 进一步推广到较一般的 Markov 过程 (亦称 Hunt 过程). 从此，位势论的基本概念获得了明确的概率解释，而分析工具又大大促进了概率论的发展. Martin 边界被翻译成概

率语言并用于研究 Markov 过程，由于调和空间，Dirichlet 形式(狄氏型)等各种公理体系位势论中都引入了 Markov 半群，因而构造相关联的 Markov 过程，公理位势论使随机过程的研究提高到一个新的水平. 80 年代，Mckean C P 和 Ito S 等人在流型上用随机微分方程来建立扩散过程，提供了用概率来研究位势论的一种方法. 在 Doob, Hunt, Meyer P A，钟开莱(Chong K L)和 Fukushima M 等人一系列出色工作的基础上，80 年代已形成了"概率位势论"这样一个把分析位势论与 Markov 过程论有机地结合在一起的新兴理论.

四十年来，位势论的研究在中国也有很大发展，值得提起的是，国内位势论研究的先驱、长期从事这个领域的科研与教学的、故厦门大学教授张鸣镛、云南大学卫念祖教授所做的重要的贡献；王梓坤教授等概率专家为发展概率与位势的联系所做的杰出工作以及马志明院士等在狄氏型方面的出色研究.

关于近期位势论研究状况，可以说是五彩缤纷. 为便于初学者有个大体的了解，下面分五个方面来考察:

1. 一般核位势论的研究仍受重视

这里指的是在 $\boldsymbol{R}^N$、Riemann 流形(包括曲面)、$\mathbf{C}^N$ 及其中的多圆柱等具体空间上关于一般核(单核)的位势及相关联的问题的研究. 这是经典位势论的直接发展. 例如:

自 1965 年 Landkof L 的名著《现代位势论基础》[32]问世至今，前苏联一直有大批学者在从事 Riesz 位势的研究，成果不断. 法国 Ancona A 等人从 1978 年至今对 R^N 上区域的 Martin 边界，Green 函数(及其商)的边界性质、Harnack 性质等有一系列创造性工作；武汉大学章逸平 1986 年对边界的两种瘦性作了比较[72].

英国 Armitage D A 与 Gardiner S J 等一批学者发表了许多关于 R^N 的超平面等一些特殊区域上的调和与上调和性质（包括平均值与积分）的研究[4].

关于调和与上调和函数的细边界值与角形边界值的研究曾十分引人注目，因位势论名家 Doob 研究了该问题且提出一些猜想. 80 年代 Jerison D S 与 Kenig C E 的工作非常出色[31]；台湾黄俊雄也做了许多重要的工作，日本 Mijuta Y 等人也有不凡的研究；厦门大学高琪仁 1986 年至 1989 年发表的论文[13-15]把 Doob 与黄俊雄的工作推进一步. 同时还有 Kuran U, Schiff J L, Stoll M 等人关于边界极限与唯一性定理的研究.

从 1974 年至 1991 年日本 Nakai M 与 Tada T 等关于与方程 $\Delta u=Pu$ 相关联的 Martin 边界与 Picard 原理做了大量深入的研究；1983 至 1989 吴炯圻的几篇论文[51-53]发展了 Nakai 等人的工作；1994 年高琪仁与邱曙熙又发展了吴的部分结果[46]. Boukricha A 在解决这一类问题采用了高明的方法，从 1979 年起发表多篇不凡的研究， 1995 年还与 Hansen W 一块就 P 是较一般测度的情形研究了有关该方程的 Picard 原理与 Martin 边界[7-8]). Hansen W 等人还研究满足局限平均值性质的函数成为调和函数的条件[24]; Kral J 研究位势论的算子及位势的逆问题等，另辟一块天地[29].

在 1990 年国际位势论会议上,Taylor J C 与 Gowrisankaran K 分别报告了《关于多圆柱的正谱底部的 Martin 紧致化》与《关于多圆柱的非切极限》的研究. 对于多重调和函数的研究，中科学院马志明等学者也做了重要工作.

此外，近期还有不少关于位势论在流体力学，静力学等方面应用的研究.

2. **位势论的公理系统不断发展完善**

(1) **关于调和空间位势论**: 1990 年 Netuka I 报告了在 P 空间上研究 Dirichlet 问题的边界行为的成果, 1991 年吴炯圻与高琪仁在不用限制可数基的调和空间上研究了位势延拓与广义容量([50]); 而后高琪仁关于广义容量又有新的成果并研究了广义权的正则性等问题([17]), 吴炯圻、邱曙熙也从不同角度探讨了广义权问题(见[21],[59],[43,45]); 从 70 年起对细调和, 细解析函数作出深入研究的 Fuglede B 近年来在调和空间之间的调和映射方面获得很好的成果[12]; Lukes J 等学者于 1986 年发表了专著《实分析与位势论中的细拓扑方法》[36], 近年来对调和空间的细拓扑又有新的研究[30]. 80 年代, 日本 Maeda F Y 对调和空间上的 Dirichlet 积分有一系列研究, 并发表了专著([38]).

(2) **关于 Dirichlet 形式(狄氏型)**. 自 1971 年 Fukushima M 首次由局部紧空间上的正则狄氏型构造出强 Markov 过程以来, 迄今已从 Beurling 与 Deny 1959 年的、基本上局限于分析领域的 Dirichlet 空间发展成与 Markov 过程紧密结合的新兴狄氏型理论, 并反过来对位势论与 Markov 过程的发展促进作用, 同时在相关数学物理分支, 如伪微分方程、随机微分方程、 Malliavin 算法, 子力学、量子场论等领域得到了应用. Albeverio S , 马志明与 Rockner M 从 80 年末到 90 年初发表的一系列论文[2,3], 解决了非正则(拟正则)狄氏型与 Markov 过程的联系. 1995 年, 马志明等出版了《非对称狄氏理论导引》[40]. 近年来, 常有各种形式的、狄氏型理论的专题国际性会议或研讨会召开. 本书第十三章将简略介绍狄氏型.

(3) **关于扫除空间与 H 锥理论.** 它们都是调和空间位势论的进一步发展. 扫除空间由 Bliedtner J 与 Hansen W 提出来并作了

许多深刻的研究，他俩的专著《位势论－扫除的分析与概率方法》1986 年出版后在国际上影响深远. 近年来时有这个方面论文问世. Boboc N 、 Cornea A 和 Bucur G 发表了专著《位势论中的次序与凸性： H-锥》[5]，是他们从事这个方向研究的总结，他们及他们的学生在这个方向不断有新的成果发表. 本书在十二章及 § 13.1 将分别介绍扫除空间及 H 锥理论.

(4) 非线性位势论公理系统. 这也是当前引人注目的研究方向之一. 1987 年的国际位势论会议上， Laine I 作了《公理化非线性系统》的综合报告，总结他本人及 Lindqvist P, Martio O 和 Lehtola P 等人的工作； 1990 年国际位势论会议上 Bertin E M 等人又做了关于非线性与拟线性位势论的专题研究报告， Lp 位势论是较新的一个研究课题. 1990 年 Adam D R 发表了《 Lp 位势论方法与非线性 PDE 》，瑞典 Hedberg L I 报告了《非线性位势论》. 许多位势论名家都对非线性系统表示了很大的兴趣. 1993 年 Heinonen J, Kilpelainen T 与 Martio O 出版了专著《关于退化椭圆方程的非线性位势论》.

3. 函数论中的位势论起反哺作用

从函数论中脱胎出来的现代位势论反过来用现化的分析工具从各方面来加强函数论，促进位势论的发展. 位势论向函数论供的工具主要有两大类：一类是由扫除法建立起来的，关于调和测度，平衡分布等精致的存在定理和极值定理；另一类是细拓扑， Martin 边界等描写函数的边界行为的、清晰的新概念.

从 20 年代 Nevanlinna 理论产生以来，位势论方法在复函数值分布理论上的重要作用是众所周知的，目前聚值理论, Riemann 曲面分类理论等等实际上已经与位势分不开了.

在研究共形映射的存在性问题上，位势论方法比古典方法优越也是显然可见的. 由 Green 函数、平衡位势的存在定理直接可以推出有关的各种标准的共形映射的存在定理，并且超越了关于联结重数和边界光滑性等等限制.

在几何函数论的基本原理上，用位势论也可以得到深入得多的结论. 例如，用 Schwarz 引理或从属原理只能得到一个单联区域的映射半径不少于任何一个子区域的映射半径，而两个区域没有这种包含关系时，就没有有效的方法来比较它们的映射半径. 但是，用位势论方法容易证明，一个包含原点 O 的有界单联区域 D 在 O 点的映射半径 r_0 满足 $r_0 r_0^* \le 1$，这里 r_0^* 表示 D 的外部关于单位圆的对称区域在 O 点的映射半径，等号成立除非 D 是以 O 为中心的圆. 因此假如 $r_0^* \ge \ r_0$，那么 $r_0 \le 1$，等号成立除非 D 是开单位圆. 由上述结论可直接得到 Koebe 定理及其推广. 这一结果属于张鸣镛.

上调和函数和多重调和函数在多复变函数论中的作用也是很明显的.

1985 年美国《当代数学》杂志以 Riemann 曲面为题介绍了张鸣镛等中国学者在 Riemann 曲面位势论方面所做的工作[67]. 其中，张鸣镛的工作主要体现在共形映射与极大 Riemann 曲面的研究；其它方面的工作有：理想边界(吴炯圻)；Riemann 曲面分类理论(邱曙熙)；广义对数位势(张洵)；下调和延拓(龚显宗)；细解析函数与细边界极限(高琪仁、林勇)等.

日本许多学者在 Tsuji M 的重要著作《现代函数论中的位势论》的推动下，就这一方向做了许多很好的工作. Sakai S 对求积域有深入研究.

在拟共形映射研究中越来越多地应用位势论. 特别突出的是 1987 年 Drasin D 在研究拟共形映射的同时结合了位势论的方

法，出色地解决了 Nevanlinna F 的一个猜想，在数学界影响较大[73].

80年代与90年代初在这个方面一个十分引人注目的课题是美籍华人吴徵眉(Wu J M) 以及前苏联 Makorov N G 所进行的关于边界畸变、边界密度与 Green 函数、调和测度的性质等与共形映射、几何测度论有关的研究(c.f.[49]，[74]). 在 1990 年的国际位势论会上，他们两人都做了长达 1 小时的特邀报告，受到与会者的一致关注和欢迎.

1993 年，在加拿大召开一个题为《复位势论》的数学 Seminar，涉及实与复位势论，复动力系统， Banach 代数与无限维全纯等专题.

4. 概率与分析的结合发展喜人

除了上述特点 2 中谈及的工作外， 1990 年法国 Dellachrie C 和 Mokobodzki G 两位很有影响的概率位势论专家分别发表了《 Hunt 过程的非线性模式》和《位势论与遍历收敛定理》，对这个方向的发展产生重大影响.

近年来， Taytor J C， Ito K， Øksendo B 等人关于 Brown 运动与扩散过程的研究颇引人注目.

非局部紧 Abel 群上的位势论的研究也有新的发展.

国内概率论大家王梓坤教授 1983 年发表了专著《布朗运动与位势》[47]，他及他的学生们的一系列出色的工作对推进国内在这个方向的研究影响深远；杨向群对离散随机过程的 Martin 边界有深入研究，并有专著发表[65]；武汉大学有一批学者在这个方向也有很好的工作，厦门大学叶仰明、吴春章也发表了有关的研究(见[66]、[48]).

Doob J L 于 1983 年发表了学术水平极高的专著《 Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart 》[11]已被译成中文.

严加安、何声武等概率专家在研究随机分析、鞅论时也都研究了位势论[64].

5. 位势论与其它分支相互促进

位势论对度量拓扑(metric topology)的影响由来已久. 点集的超限直径， Hausdorff 测度和非整数维数等等概念跟位势论的关系非常明显. Kolmogorov 定义的、函数空间的熵的概念是又一个例子.

由于几何测度论的产生和发展,位势论与同伦论的关系也得到发展,位势论方法的应用将在微分拓扑或流形上的分析取得有意义的进展.

由于位势与它的核的关系可以用 Fourier 变换来说明 (参见 § 11.1.6 及 § 11.2.2 等), 位势论与调和分析的关系目前越来越多地受到注意.

在椭圆型和抛物型方程的研究中, 已相当广泛地采用位势论方法, 各种理想边界的概念已常被应用. 1990 年国际位势论会上,美国 Kenig C E 的特邀报告《非光滑系数椭圆方程的 Dirichlet 问题与 Neumann 问题》及会上 Hansen W 等人关于 Schrodinger 方程(算子)的论文都集中探讨了位势论.

其他, 近来关于 Sobolev 空间， Hilbert 空间， Hardy 空间, 一般线性拓扑空间,关于积分方程和其他算子(如 Helmholty 算子)的研究都有许多与位势论相结合的内容. 1996 年, Adams D A 与 Hedberg 合著出版了《函数空间与位势论》, 给出了泛函, 位

势论与方程三者一体的研究，影响之大远远超出这三个领域．

总之，从当前位势论的发展趋势来看，今后，它与相邻数学分支的相互渗透和结合必将进一步深入，这将导致此前有关领域的一些猜想与难题的解决；公理系统，特别是非线性公理系统将有新的突破；位势与概率的结合有广阔的前景，它将大大超过当前的范围．

国内杰出的函数论、位势论专家—已故张鸣镛教授 1979 年曾对位势论与函数论的关系做了一个展望．他认为“应该看到位势论面临的新的重大任务．”

“位势是向场的不定积分，在一维的情况下，不定积分跟定积分的概念是一致的，关于它的存在和各种性质在实函数中已有充分的讨论．但在高维的情况，向量场的不定积分的存在要求向量场的外微分等于 0，在二维的情况，一个向量场有自己的对偶向量场，一个外微分与反外微分都等于 0 的向量场叫做调和场．它的位势就是原调和场的位势的共轭调和函数，Riemann 就是通过这个事实把函数论与位势论联系在一起．

“在 N ($N \geq 3$)维的情况，仍有向量场的对偶和调和向量场的概念．并已建立了多重向量场的初步理论系统，留数定理也推广到它上面去了．但至今尚未有人把扫除法等推广到多重向量位势上去，也还没有人利用扫除法所建立的 Green 多重向量场来推广 Riemann 函数论的观点．

“Riemann 的思想为建立单值化定理开辟了道路，这个单值化定理实际上是二维流形拓扑学的基本定理，高维流形的拓扑学的基本定理是否也应该用类似方法建立？ Riemann 函数论的观点是否是以启发我们建立一门新的同调分析呢？”张先生说，“希望不久能看到这个问题的解答．”

张先生已不幸去世十余年，但他的话仍然没有过时，我们希望这些话能给后来人带来一种启迪和激励.

限于本人的学识水平及手头的资料，上面概述难免主观片面和错误，引用文献或介绍有关结果的疏漏也是自然的. 尽管如此，为了让读者了解一个概况(不要求全面和高准确度)，达到抛砖引玉的目的，作者认为作这样的一介绍还是很有必要的. 至于缺点方面，欢迎专家行家们批评指正；并请求各方的理解和谅解.

第十一章　单核位势论

本章主要介绍一般核的位势论(§ 11.1—7)，同时简略叙述广义函数核(§ 11.6)与 LCA 群上测度核的位势论(11.8). 它们都是由某个取定的简单而具体的核（单核）出发来定义位势并研究关于该核的位势论性质. 这区别于调和空间的所谓“无核位势”（抽象核位势），这种单核也异于扫除空间的多核（“调和核系”——不同意义下的核）及随机过程的核族（如子 Markov 半群或预解族）.（参看 § 8.2 的例子和 § 8.3 的注与例子.）

设$(\Omega, \Im)$是一个可测空间, $K(x, y)$ 是从 $\Omega \times \Omega$ 到 $[-\infty, \infty]$ 的 $\Im$可测函数, μ 是$(\Omega, \Im)$上的带符号测度. 若对每个 $x \in \Omega$, 积分 $\int K(x, y)\,\mathrm{d}\mu(y)$有意义, 则记之为 $U^{\mu} := U^{\mu}(K; x)$且称为 μ 的以 K 为一般核的一般位势. 通常考虑 Ω 为局部紧的 Hausdorff 空间, 核 K 为从 $\Omega \times \Omega$ 到$(-\infty, \infty]$的下半连续函数, μ 为带符号的 Radon 测度(当 $\mu \geq 0$ 时称为 Radon 测度, 简称测度), U^{μ} 在 Ω 的一个稠密子集上取有限值. 为叙述简便, 以下若无特别申明均作此假定.

显然, 当核 K 不同时所得位势一般说来具有不同性质. 若 $K(x, y) \geq 0$ 在 $\Omega \times \Omega$ 恒成立, 称 K 为正核; 若 ${}^{\vee}K(x, y) := K(y, x)$ 恒成立, 则称 ${}^{\vee}K$ 为 K 的转置核; 当 ${}^{\vee}K = K$ 时, 称为对称核; 当 Ω 为 Abel 群而核 K 满足 $K(x, y) = K(x - y)$时, 称 K 为平移不变核; 若对任何具有紧支柱 (Compact support)的测度μ，能量

$$I_K[\mu] := \int\int K(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) \geq 0,$$

则称 K 为正定核, 若上式等号成立仅当 $\mu = 0$, 则说 K 是严格正

定核或**满足能量原理**. 具体地, 当 Ω 为 $\boldsymbol{R}^N(N\geq 2)$,

$$K(x,y):=|x-y|^{\alpha-N}(0<\alpha<N)$$

称为α-核或 **Riesz 核**. 它是一个正的、对称的、平移不变的严格正定核, α-核的位势常记作 U_α^μ, 称为α-位势或 **Riesz 位势**. 当 $N\geq 3$, $\alpha=2$ 时, α-位势就是 Newton 位势; 而当 $N=2$ 时,

$$K(x,y):=-\log|x-y|$$

为对数核, 其位势 U^μ 就是对数位势, 它在一定的意义下可看成 α-位势当$\alpha\to 0$ 时的极限. Newton 位势与对数位势合称为**经典位势**. 它们与 Laplace 方程有直接联系; 而一般的α-位势则联系于非局部的微分积分算子.

§ 11.1 一般核位势论的基本原理

对一种固定的核 K, 常考虑其对应的位势 $\mathrm{U}^\mu=\mathrm{U}^\mu(K;x)$是否满足下述一些称为原理的基本性质. 若对任意带符号测度μ,λ,ν,

(1) U^μ 限于μ 的支柱 $\mathrm{supp}(\mu)$为连续 (指有限连续即实连续, 下同)蕴涵 U^μ在 Ω 为连续, 则称 K 满足**连续性原理**;

(2) $\mathrm{U}^\mu\leq M$ (M 为实常数) 在 $\mathrm{supp}(\mu)$成立蕴涵同一不等式在 Ω 成立, 则称 K 满足**第一极大值原理**;

(3) 若存在常数 $c:=c(K)\geq 0$ 使得在 $\mathrm{U}^\mu\leq M$ 在 $\mathrm{supp}(\mu)$ 成立蕴涵 $\mathrm{U}^\mu\leq cM$ 在 Ω 成立, 则称 K 满足**广义极大值原理**.

(4) 若 $\mathrm{U}^\mu\leq\mathrm{U}^\lambda$ 在 $\mathrm{supp}(\mu)$ 成立蕴涵该不等式在 Ω 成立, 则称 K 满足**第二极大值原理**或**控制原理**.

(5) 若对任何满足 $\mathrm{I}_K[\mu]<\infty$ (即能量有限) 的测度 μ 与 λ, $\mathrm{U}^\mu=\mathrm{U}^\lambda$ 在 $\mathrm{supp}(\mu)\cup\mathrm{supp}(\lambda)$ 似乎处处成立蕴涵 $\mu=\lambda$, 则称 K 满足**唯一性原理**;

(6)若对任意测度μ, λ，存在测度ν使得

$$U^{\nu}(x)=\min\{U^{\mu}(x), U^{\lambda}(x)\}, \quad x\in\Omega$$

则称 K 满足**下包络原理**.

此外, 除上述的六个原理和(7)能量原理外, 还有(8)**弱平衡原理**、(9)**平衡原理**和 (10)**扫除原理** (见后). 在一定条件下, 一些原理之间有蕴涵 $\Rightarrow$ 或 等价 $\Leftrightarrow$ 关系. 下面用"甲⇓乙"表示甲原理成立蕴涵乙原理成立且存在满足乙原理而不满足甲原理的例子, 那么(2) ⇓ (3), (10) $\Rightarrow$ (4), (9) $\Rightarrow$ (8); 当 K 是正的广义连续 (即作为从 $\Omega\times\Omega$ 到 $[0,\infty]$ 的映射连续)的对称核且当 $x\neq y$ 时取有限值时, 有(3) ⇓ (1), (2) $\Leftrightarrow$ (9), (4) $\Leftrightarrow$ (10). $\boldsymbol{R}^N$的 α-核满足(1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)、(8)、(10); 当 $0<\alpha\leq 2, \alpha<N$ 时, α-核还满足(2)、(9), 但当 $2<\alpha<N$时, 存在不满足(2)的例子. 深入研究核与各原理之间的关系是位势论的一大课题. Choquet G 及日本一些学者在这方面有许多研究成果.

§ 11.2 K-容量与平衡原理

本节限定μ, λ, ν为测度, 对一个取定的核 K, 令

$$\phi(\mu):=\sup\{U^{\mu}(x)\mid x\in \operatorname{supp}(\mu)\}.$$

称 $C_K(F):=\sup\{\mu(\Omega)\mid \phi(\mu)\leq 1, \operatorname{supp}(\mu)\subset F\}$为紧集 F 的 ***K*-容量**. C_K是定义在 Ω 的紧子集全体$\{F\}$上的一个正的集函数, 在一定条件下, C_K可延拓成 Ω 上的一个 Choquet 容量(见 § 6.3). 称一个性质 $P=P(x)$为 K-**近乎处处成立**, 指的是使 P 不成立的、Ω中的点全体 A 满足

$$\phi_{\bullet}(A):=\inf\{\phi(\mu)\mid \mu(\Omega)=1, \operatorname{supp}(\mu)\subset A\}=\infty.$$

若对于任何紧集 $F\subset\Omega$, 存在支柱包含于 F 的单位正测度 μ 使得 $U^{\mu}(x)$在 F 上 K-近乎处处等于某个常数 $E_K(F)$, 则称核 K

满足弱平衡原理；若同时有 $U^{\mu}(x) \le E_K(F)$ 在 Ω 上处处成立，则称 K 满足平衡原理. 一个正的、对称的、广义连续的核 K 满足平衡原理的充要条件是它满足第一极大值原理. 一般地，当 $E_K(F) > 0$ 时，$C_K(F) = (E_K(F))^{-1}$.

若核 K 满足弱平衡原理，那么，把关于紧集 F 满足弱平衡原理的单位测度 μ 称为 F 的平衡测度；当 $E_K(F) > 0$ 时，

$$\lambda = \lambda(F) := \frac{1}{E_K(F)} \mu$$

称为 F 的**容量分布**. 这时，$U^{\lambda}(x)$在 F 上近乎处处等于 1，故有的文献也把这里的容量分布称为平衡测度，这是因为 Gauss 平衡问题就是求满足 U^{λ}在 F 上处处等于 1 的测度λ.

特别，在 $\boldsymbol{R}^N$考虑α 核，把μ 的α 能量 $I_K[\mu]$ 记作 $I_{\alpha}[\mu]$. 令

$$W_{\alpha}(F) := \inf\{ I_{\alpha}[\mu] \mid \mu(\boldsymbol{R}^N) = 1, \operatorname{supp}(\mu) \subset F \};$$

当 $W_{\alpha}(F) > 0$ 时，记 $C_{\alpha}(F) := \dfrac{1}{W_{\alpha}(F)}$，称之为紧集 F 的α-**容量**. 它是一种 Choquet 容量且为 F 关于α-核的 K-容量；$\alpha = 2$ 时为 **Newtow 容量**. 可定义α-外(内)容量(参看 § 6.3，通常，一个集的外容量定义为包含这个集的开集的容量的下确界，内容量定义为这个集的紧子集的容量的上确界)，α-**零外容集**及α-**零内容集**等概念. α-核满足平衡原理；这时 F 的容量分布λ 满足 $I_{\alpha}[\lambda] = C_{\alpha}(F) = \lambda(\boldsymbol{R}^N)$. 当$C_{\alpha}(F) > 0$时，$\lambda$ 可看成下列各变分问题的唯一解:

(1) $\lambda(\boldsymbol{R}^N) = \max\{ \nu(\boldsymbol{R}^N) \mid \nu$是测度, $\phi(\nu) = 1, \operatorname{supp}(\nu) \subset F \}$,
其中

$$\phi(\nu) := \sup\{ U_{\alpha}^{\mu}(x) \mid x \in \operatorname{supp}(\nu) \}.$$

(2) $\phi(\lambda) = \min\{\phi(\nu) \mid \nu$是测度 $\operatorname{supp}(\nu) \subset F$, $\nu(\boldsymbol{R}^N) = C_{\alpha}(F) \}$;

(3) $\mathrm{I}_\alpha(\lambda)-2\lambda(\boldsymbol{R}^N)=\min\{\mathrm{I}_\alpha[\nu]-2\nu(\boldsymbol{R}^N)\mid \mathrm{supp}(\nu)\subset F\}$.

又，α-容量与 Newtow 容量或对数容量一样，也可用广义超限直径来描绘它的度量性质且α-容量也满足容量压缩原理：设 K 为 $\boldsymbol{R}^N$的紧子集，f 为从K到$\boldsymbol{R}^N$ 的压缩映射，即f 满足$|f(x)-f(y)|\le|x-y|, \forall x,y\in K$，则有

$$\mathrm{C}_\alpha(f(K))\le \mathrm{C}_\alpha(K),.$$

与容量，特别是零外容集密切关联的一个概念是极集. 对Ω的子集 A 及取定的核 K，若存在测度 μ 使得位势 $\mathrm{U}^\mu(x)$在 A 上点点取 ∞ 值，则称 A 为 (关于核 K 的) **极集**. 据假定，K 为下半连续，故$\{x\mid \mathrm{U}^\mu(x)>n\}$是开集，$\{x\mid \mathrm{U}^\mu(x)=\infty\}$为 G_δ 型集，而且极集必为 K-零外容集.

特别，关于 $\boldsymbol{R}^N(N\ge 3)$的 Newton 核，Evans 定理指出，若 A 为G_δ 型零容集，则必存在一个集中在A上的正测度 μ 使得$\mathrm{U}^\mu(x)$在A上且仅在A上取值为 ∞. 而对α-核，E为α-极集的定义为，存在测度μ使得 U^μ_α 在 E 且仅在 E 取值为∞. 因此，E 为α-极集当且仅当 E 为α-零容的 G_δ集. 这个结论也称为广义 **Evans 定理**.

§ 11.3 扫除问题

扫除问题与平衡问题及 Dirchlet 问题为经典位势论的三大基本问题，也是现代位势论研究的重要内容，只是在现代的框架下问题的提法更为一般.

称核 K 满足扫除原理，指的是对Ω的任何紧子集 F 及满足 U^μ不恒等于 ∞ 的测度μ，扫除总是有解，即存在测度$\beta_F\mu$，简记作μ'(在调和空间记作 μ^A)，满足 $\mathrm{supp}(\mu')\subset F$ 且

$$\mathrm{U}^{\mu'}(x)\le \mathrm{U}^\mu(x)\ ,\qquad x\in\Omega\ ,$$

且其中等号在 F 上 K-近乎处处成立. 这样的μ'，即$\beta_F\mu$ 称为把正质量(测度) μ 扫到 F 的**扫除测度**(balayaged measure), $U^{\mu'}$称为**扫除位势**，求解扫除测度的过程叫做**扫除** (balayage 或 sweeping out), 当$\Omega = \boldsymbol{R}^N$, $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha < N$ 时, α-核满足扫除原理; 而当 $2 < \alpha < N$时，关于α-核的测度扫除一般无解, 但可采用 Deny J 的方法求广义函数的扫除 (见 § 11.6).

本节仅涉及 $0 < \alpha \leq 2$ 的测度扫除. 对于一般的 Borel 集 E, 如果仅要求$\mu' = \beta_E\mu$ 集中的在 $\overline{E}$ 上, 即$\mu'(\boldsymbol{R}^N \setminus \overline{E}) = 0$时, 关于$\alpha$-核的测度扫除也有解, 但可能不唯一. 为此, 把其中测度网

$$\{\, \beta_F\mu \mid F \in \mathcal{R} \,\}$$

(这里 $\mathcal{R}$ 是 E 的紧子集全体以反包含关系为序的定向集) 的浑极限 μ' 作为μ 的扫除测度, 它具有如下特征: $U^{\mu'}$ 是在 E 上似乎处处 (即除去一个α-外容量为零的子集外) 满足 $U_\alpha^\lambda \geq U_\alpha^\mu$ 的位势族$\{U_\alpha^\lambda\}$的下确界函数.

对于α-能量有限的测度μ，即测度μ 满足:

$$I_\alpha[\mu] := \iint |x-y|^{\alpha-N} d\mu(x) d\mu(y) < \infty,$$

α-扫除与经典位势中的扫除一样, Cartan H 定理成立. 由于α-核满足能量原理, α-能量有限的带符号测度全体 $\mathcal{M}_\alpha$ 以α-相互能量

$$I_\alpha(\lambda,\mu) := \iint |x-y|^{\alpha-N} d\lambda(x) d\mu(y)$$

为内积构成实的准Hilbert空间. 其中测度全体$\mathcal{M}_\alpha^+$及支柱包含于紧集 F 的测度全体 $\mathcal{M}_\alpha^+(F)$ (即子空间 F 上α-能量有限的测度全体) 都是$\mathcal{M}_\alpha$的完备凸子锥. 于是, $\mu \in \mathcal{M}_\alpha^+$ 在$\mathcal{M}_\alpha^+(F)$ 的正交投影存在且唯一, 它就是 μ 到 F 的α-扫除测度. 这个结论称为**广义 Cartan 定理**.

关于 α-核的扫除, Dirac测度 (即单位正质量集中在$x \in \boldsymbol{R}^N$) 到 Borel 集 A 的扫除测度$\beta_A\varepsilon_x$ (在调和空间记作ε_x^A) 称为 A 的 **α-Green 测度**. 对任意有限测度 μ有

$$\beta_A\mu = \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \beta_A\varepsilon_x \, d\mu(x).$$

2-Green 测度又称 **Green** 测度. 进一步, 一个点 $x\in \overline{A}$ 若满足$\beta_A\varepsilon_x = \varepsilon_x$ 则称为 Borel 集 A 的α-正则点. 当上式不成立时, 称 x 为 A 的α-非正则点. A 的内点必为 A 的α-正则点, 故 A 的α-非正则点必为 A 的边界点. 一个 Borel 集 A 的α-非则点全体 A_1 可能比集 A 还大, 甚至存在这样的 A, 使得α-容量 $C_\alpha(A_1)$ 与 $C_\alpha(A)$之比大于任意事先指定的正数. 但是 **Kellogg** 引理指出, $A\cap A_1$ 必为α-零容集.

值得注意的是, 一个开集 W 的α-正则点与α-正则边界点的含义是不同的, 后者指的是 $\boldsymbol{R}^N\setminus W$ 的α-正则点, 它与α-调和函数的 Dirichlet 问题有关.

2-正则点就是通常关于 Newton 核的正则点. 著名的 Wiener 判别法指出, $x_0\in\partial A$ 为 A 的α-非正则点的充要条件是, 对 $q\in(0,1)$ 及 $A_k:=\{x \mid q^{k+1}\le |x-x_0|<q^k\}\cap A$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_\alpha(A_k)}{q^{k(N-\alpha)}} < \infty.$$

它还有一些别的等价形式.

利用 α-核的扫除还可以定义α-Green 函数. 对 $\boldsymbol{R}^N$ 的开子集 D 中的点 y, 用ε_y'表示ε_y 到 $\boldsymbol{R}^N\setminus D$ 的扫除测度, 那么

$$G^{(\alpha)}(x, y) := \mathrm{U}_\alpha^{\varepsilon_y}(x) - \mathrm{U}_\alpha^{\varepsilon_y'}(x)$$

称作以 y 为极、D 的**α-Green** 函数. 特别, 2-Green 函数就是通常的 Green 函数. $G^{(\alpha)}$具有如下性质: (1) 在 D 中, $G^{(\alpha)}>0$, 在 $\boldsymbol{R}^N\setminus D$, $G^{(\alpha)}$ 似乎处处为 0; (2) 在 $D\setminus\{y\}$, 作为 x 的函数, $G^{(\alpha)}$ 为 α-调和且在 y 的邻域与 α-核具有阶数相同的奇性; (3) 对称性, 即 $G^{(\alpha)}(y,x)=G^{(\alpha)}(x,y)$. 这些性质与通常的 Green 函数相似.

§ 11.4 上调和函数与细拓扑

从上(超)调和函数的概念出发来定义与研究位势是 Riesz F 与 Brelot M 等人开创的、叙述现代位势论的另一种方式. 不过,这里着重叙述 $\mathcal{E}$ 空间与 Green 空间上的情形, 它们与经典位势论密切关联; 同时也介绍α-上调和函数. 对于更一般情形, 可参见第三至第九章及本篇公理位势论部分.

1. $\mathcal{E}$ 空间与 Green 空间

Brelot M 等人定义并深入研究了函数在 $\boldsymbol{R}^N$ 的无穷远点 ∞ 的调和性, 并把 $\boldsymbol{R}^N$ 上的位势论推广到 $\mathcal{E}$ 空间上去.

若从 $\boldsymbol{R}^N (N \geq 2)$ 到$(-\infty, \infty)$的函数f 在 ∞ 的邻域调和且可表示为

$$f(x) = \text{const} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k(x)}{|x|^{2k+1}}$$

其中 $H(x)$为调和的齐 k 次 (关于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$的分量 x_i) 的多项式, 那么 f 在 ∞ 有有限的极限$f(\infty)$, 它等于在以任何一点 $x_0 \in \boldsymbol{R}^N$ 为中心、半径充分大的球面$\partial B(x_0, r)$上f 的平均值, 这时称 f 在 ∞ 调和. 进一步, f 在 ∞ 的上(下、超、亚)调和等概念也可用球面平均值来相应定义.

一个连通的、可分的 Hausdorff 空间Ω 若满足下述条件则称为 $\mathcal{E}$ 空间: 对Ω 每个点 x 都存在一个开邻域 V_x 和一个从 V_x 到 $\boldsymbol{R}^N \cup \{\infty\}$ ($\boldsymbol{R}^N$的单点紧致化) 的一个开集的同胚映射 $p \mapsto m_x(p)$, 使得对任何两点 $x, y \in \Omega$, 它们所对应的开邻域 V_x与 V_y 之交 $V_x \cap V_y$ 的同胚像 $m_x(V_x \cap V_y)$ 与 $m_y(V_x \cap V_y)$在映射$(m_y) \circ (m_x)^{-1}$之下是共形的(当$N = 2$)或保距的且保持 ∞ 不变 (当$N \geq 3$;此时∞的

原象称为 Ω 上的无穷远点). 于是 $\boldsymbol{R}^N\cup\{\infty\}$上的调和、超(亚)、上(下)调和等局部性概念可通过上述同胚映射在$\boldsymbol{\mathcal{E}}$空间上相应地定义. 不难看到局部的 Riesz 分解也成立.

在$\boldsymbol{\mathcal{E}}$空间或它的开子集上, 一个正的上调和函数u如果它的最大调和下属(必存在)为常数 0 时, 则称 u 为**位势**. 两个位势之和或下包络（下确界函数）仍为位势.

一个 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 空间Ω 称为 **Green** 空间, 指的是 Ω 上存在一个位势$p>0$ 或等价地, 存在一个非常数的上调和函数$u>0$. 例, $\boldsymbol{R}^N$, $\overline{R^N}$ 及 Riemnn 曲面都是$\boldsymbol{\mathcal{E}}$空间; 当$N\geq 3$ 时, $\boldsymbol{R}^N$及其子区域都是 Green 空间. $\boldsymbol{R}^2$或复球面不是 Green 空间, 但从中除去一个具有正容量的闭集后的连通成份是 Green 空间

对$\boldsymbol{\mathcal{E}}$空间Ω常用到局部极集的概念. 对子区域 $\omega, A\subset\omega$ 称为 ω 的**极集**指的是, 存在 ω 上的一个正的上调和函数 u , 它至少在 A 上点点取 ∞ 值, (从下面 Riesz 分解定理知, 这里的定义与 § 11.2 所述一致). 若 ω是一般的开集, 而A在ω的每个连通成份上都是极集, 则称A是**开集 ω 中的极集**. 进一步, $A\subset\omega$称为开集ω中的**局部极集**(Locally polar set), 指的是对每个 $x\in\omega$, 存在开邻域V_x使得$A\cap V_x$是V_x中的极集. 单点集$\{x_0\}$不是局部极集当且仅当x_0是$\boldsymbol{R}^N$ $(N\geq 3)$的无穷远点的原像. 性质 P 称为**似乎处处成立**, 如果 P 除了一个局部极集外成立. 若A是区域ω的、闭的局部极集, 则 $\omega\setminus A$ 仍为区域且 $\omega\setminus A$ 上的任何局部下有界的上调和函数可唯一地延拓成ω上的上调和函数.

Green 空间的子区域仍为 Green 空间; $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 空间Ω_1若非 Green 空间, 则其子区域ω是Green空间当且仅当$\Omega_1\setminus\omega$ 不是局部极集. 在 Green 空间 Ω 中, 局部极集等价于极集; 对$y\in\Omega$, Ω上的、在$\Omega\setminus\{y\}$调和的位势都是成比例的; 其中满足下面条件的位势称为 **Green 函数**, 记作 G_y^Ω 或 G_y: 若令 $x':=m_y(x)$, $h(r)=r^{2-N}$(当 N

≥ 3)或 $-\log r\ (N=2)$，其中 $r>0$，那么在 y 的邻域，$G_y(x)$ 作为 x 的函数可表为

$$G_y(m_y^{-1}(x'))=\begin{cases}h(|x'-y'|)+h_1(x'), & \text{当} y\neq\infty,\\ -h(|x'|)+h_2(x'), & \text{当} y=\infty,\end{cases}$$

其中 h_1, h_2 调和. Green 函数满足对称性，即

$$G(x,y):=G_x(y)=G_y(x).$$

在 Green 空间 Ω 上，对任何(正)测度 μ，$\int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$ 为超调和函数，它要么为位势（称为 **Green 位势**），要么恒等于∞；反之，Ω 上的任何位势都是 Green 位势，这时，$G(x, y)$称为 Green 核. 在 Ω 上，**Riesz 分解定理**成立，即 Ω 上的任何一个有调和下属的上调和函数 u 必对应唯一的正测度 μ.（称为相关测度，associated measure)使得

$$u(x)=\int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)+h_u(x), \qquad x\in\Omega$$

此处 h_u 是 u 在 Ω 的最大调和下属. 这个分解还具有局部特征，即在 Ω 的任何子区域 ω 上，μ 的限制也是 u 的相关测度. 又，Green 核满足扫除原理，而且关于测度的扫除可通过下面给出的扫除函数来定义. 缩减函数与扫除函数是用来研究上调和函数位势论的有力工具，它们可在更一般的空间上定义（见 § 5.1 及 § 12.1, § 13. 1).

设 Ψ 是一族从拓扑空间$(X, \mathcal{T})$到$[0, \infty]$的下半连续函数所组成的凸锥. 对于 X 的子集 E 和在 E 上有定义的数值函数 f，称

$$R_f^E(x):=\inf\{u(x)\mid u\in\Psi \text{ 且 } u|_E\geq f\},\quad x\in X$$

为 f 在 E 的缩减函数(reduced function).

在 Green 空间 $X:=\Omega$ 上，常取 Ψ 为正超调和函数全体. 对上调和函数$f\geq 0$，R_f^E 似乎处处等于上调和函数 $\hat{R}_f^E$，这里

$$\hat{R}_f^E:=\liminf_{y\to x} R_f^E(y)\quad ,\ x\in X,$$

称为f的扫除函数，它在$\Omega\setminus\overline{E}$调和而且$\hat{R}_f^E\le f$在$\Omega$上点点成立. 这时，测度$\mu$的位势$u:=U^{\mu}(x)=\int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$的扫除函数$\hat{R}_u^E$为另一个测度(记作$\mathrm{b}_\mu^E$)的位势，$\mathrm{b}_\mu^E$称为$\mu$到$E$的**扫除测度**，它集中在$E$的基$B_E:=\{x\mid E$在$x$不瘦$\}\subset\overline{E}$. 故当$E$为闭集时，$\mathrm{b}_\mu^E$就是关于Green核的扫除问题的解$\mu':=\beta_\mu^E$. 此外，$E$是极集当且仅当对任意上调和函数$f>0$，有$\hat{R}_f^E=0$. 上调和函数$f\ge 0$到一个区域$\omega$的余集$X\setminus\omega$的扫除函数$\hat{R}_f^{X\setminus\omega}$在$\omega$的限制就是以$f$为边值的广义Dirichlet问题的解；不过，若$\omega$的闭包非紧，则应补充定义在$\omega$的Alexadroff边界点$\infty$上$f$的值为0，即$f(\infty):=0$. 又，当$E$为紧且非极集，则$\hat{R}_1^E$给出了Gauss平衡问题的解，它在$E$上似乎处处等于1.

2. 细拓扑与Ψ-瘦

设(X,τ)为拓扑空间，Ψ是一族从X到$[0,\infty]$的下半连续函数所组成的凸锥，必要时还设$\infty\in\Psi$. 若把形如

$\{x\in X|f<\alpha\}$，其中$f\in\Psi$，α是正实数，

的集全体记作τ'，那么由$\tau\cup\tau'$为子基所生成的拓扑τ_1是使Ψ中每个函数都连续的最粗拓扑，称τ_1为X上的（相对于Ψ的）**细拓扑**或**Ψ-细拓扑**. 细拓扑下的开集、闭集、闭包、极限等分别称作**细开集、细闭集、细闭集、细极限**等. 在Green空间，总取Ψ为正调和函数全体，特别当考虑$\boldsymbol{R}^N$的Green区域时，就得到通常的细拓扑.

与Ψ-细拓扑密切关联的是**Ψ-瘦**（简称"瘦"）的概念. X的子集E称为在点$x\notin E$**瘦**，指的是下面两种情形之一：(1) $x\notin E\cup\partial E$（∂E为τ拓扑下E的边界）；(2) $x\in\partial E$且存在$u\in\Psi$使得

$$\liminf_{y \to x, y \in E} u(y) > u(x) .$$

进一步，称集 E 在 $x \in E$ 为瘦，指的是 $E \setminus \{x\}$在 x 瘦且 E 在 x 为弱瘦，即对恒等于 1 的函数 f，关于 Ψ 的扫除函数 $\hat{R}_1^E$ 满足:

$$\inf\{ \hat{R}_1^{E \cap V}(x) \mid V \text{为} x \text{的邻域}\} < 1 .$$

若 $X \setminus E$ 在 E 的每一点都瘦，则称 E 为肥集. 推广的 **Cartan** 定理指出, E是细开集当且仅当E是肥集. 因此，也可把肥集全体定义作细拓扑 τ_1. 又，集 E 的非正则点可定义作 “ E 在该点瘦” .

若集 E 可表示为在每一点 $x \in X$都弱瘦的集之可列并，则称 E 为半极集. Brelot 下包络定理指出，对 Ψ 中的元素列$\{u_i\}$，集

$$\{ x \in X \mid \hat{}\inf_i u_i(x) < \inf_i u_i(x)\}$$

为半极集. 半极集的概念是为了在一般空间上推广极集的概念而引入的. 但在Green空间$X:= \Omega$上, E为极集当且仅当为半极集，它在空间的每一点都瘦; 一个开集的非正则边界点全体为极集; 另，前面已谈及测度 μ 到集 E 的扫除测度 b_μ^E 集中在 E 的基 $b(E) := \{ x \in \Omega \mid E \text{在} x \text{不瘦}\}$. 另外，在 $\boldsymbol{R}^N$ 的 Green 区域上也还引入半瘦及相应的半细拓扑的概念.

细拓扑与半细拓扑等概念常用于研究函数的边界性态. 一个区域 D 上的函数 $f(x)$当 x 从 D 内趋于边界点 x_0 时有 $f(x) \to l$ ，则称 l 为 f 在 x_0 的边界值. 当 f 在 x_0 的边界值不存在时，若限制 x 沿 D 的某个子集趋于 x_0 时，可能有极限，特当 $D \cup \partial D$ 上有细拓扑时，若限制 x 在 $x_0 \in \partial D$ 的一个细邻域趋于 x_0 时有 $f(x) \to q$, 则称 f 在 x_0 有细极限 q . 半细极限值可类似定义.

又，在 $\boldsymbol{R}^N$ 的 Lipschitz 区域 D 上常考虑所谓不相切的边界值，它是 $\boldsymbol{R}^2$ 上 Stoltz 边界极限值的推广，若 D 上的函数 f 当 $x \in D$ 沿着任何以 $x_0 \in \partial D$ 为顶点的不相切内锥Γ (即存在以 x_0 为顶点的锥Γ'使得 $\overline{\Gamma} \setminus \{x_0\} \subset \Gamma' \subset D$ 趋于 x_0 时, $f(x)$有相同的极限值 l ，则称 f 在 x_0 有不相切的边界值 l .

经典的 **Fatou** 定理称，$\boldsymbol{R}^N$ 的球内的正调和函数在边界上几乎处处有不相切的极限. Doob定理把它推广到远为一般的情形，即关于 Green 空间 D 附加其 Martin 边界Δ后 (见后 § 11.7) 所得紧空间 $D\cup\Delta$ 上的细拓扑，D 中的上调和函数 $u>0$ 与调和函数 $h>0$ 的商 u/h 在Δ上除去一个μ_h零测集 (其中μ_h为 h 的 Martin 表现测度) 外处处有细边界值. 作为特例，在 Lipschitz 区域 D 内的上调和函数 $u>0$ 在∂D 上除一个调和测度为零的集外处处有细边界值 .

1968-1971 年，Hunt R A 与 Wheeden R L[28] 深入研究了 Lipschitz 区域 D 上不相切边界值与细(半细)边界值的关系，指出 D 中任何函数若在 $x_0\in\partial D$ 有不相切边界值，则在 x_0 有与之相等的(半)细边界值；若正上调和函数在 x_0 有半细边界值，则在 x_0 有相等的不相切边界值. 高琪仁等人(见[13-15]、[35]等)把后面一个的结论推广到较一般的区域上的一般调和函数，并结合α-细边界值做了许多有趣的工作.

3. α-上调和函数与α-细拓扑

类似于通常上调和函数与位势的密切关联，与α-位势相应的是α-上调和函数. 不过，本节若无另外申明均限制 $0<\alpha<2$, $\alpha<N$. 从 $\boldsymbol{R}^N(N\geq 2)$到$[0,+\infty]$的函数 f 若满足下述条件，则称为α-上调和函数:

(1) f 为正的下半连续函数且 f 不恒等于∞;

(2) $\int_{|x|>1} f(x)|x|^{-(N+\alpha)}\mathrm{d}x<\infty$;

(3) 对每个 $x\in\boldsymbol{R}^N$，对充分小的正数 r 恒有:

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} * f(x):=\int f(x-y)\,\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^{(r)}(y)\leq f(x),$$

其中， $\varepsilon_{a}^{(r)}(y)=\begin{cases}0, & 当|y|<r, \\ \Gamma(\frac{N}{2})\pi^{-(\frac{N}{2}+1)}(\sin\frac{\pi\alpha}{2})r^{2}(|y|^{2}-r^{2})^{-\frac{\alpha}{2}}|y|^{-N}, & 当|y|>r.\end{cases}$

例如, μ 为测度时, α-位势 U_{α}^{μ} 为 α-上调和函数但不是通常的(经典的)上调和函数(有时为方便计, 也把经典的上调和函数称为 2-上调和函数); 而当 $2 \le \alpha < N$ 时, U_{α}^{μ} 为 2-上调和函数. α-上调和函数 f 及其序列$\{f_n\}$有许多类似 2-上调和的性质. 例如, 对固定的实数 $r>0$, $f \cdot \varepsilon_{a}^{(r)}(x)$ 仍为α-上调和函数且当 $r\downarrow 0$ 时,

$$f \cdot \varepsilon_{a}^{(r)}(x) \to f(x);$$

若在某个 $x_0 \in \boldsymbol{R}^N$, f 达到极小值, 则 $f(x) \equiv f(x_0)$; 单调增加列$\{f_n\}$的极限要么恒等于∞, 要么为α-上调和.

从 $\boldsymbol{R}^N$ 到$(-\infty, \infty)$的函数f 称为在 $x_0 \in \boldsymbol{R}^N$ 为**α-调和的**, 若它满足下述条件:

(1)f 在 x_0的一个邻域连续;

(2) $\int_{|x|>1} f(x)|x|^{-(N+\alpha)}dx < \infty$;

(3) 对充分小的正数 r, 恒有 $f(x_0) = (\varepsilon_{a}^{(r)} \cdot f)(x_0)$.

若 f 在集 $D \subset \boldsymbol{R}^N$ 的每个点α-调和, 则说 f 在 D 为α-调和. 例如, 当 μ 为测度时, α-位势 U_{α}^{μ} 在 μ 的支柱外为α-调和; 常值实函数在 $\boldsymbol{R}^N$ 为α-调和.

值得注意的是, 测度 $\varepsilon_{a}^{(r)}$ 的支柱为$\{x \mid |x| \ge r\}$, 故α-调和及α-上调和都不是局部性质. 又 α-调和函数f 为 α-上调和当且仅当$f \ge 0$. 这是明显区别于通常调和与上调和的两个特点. 但对α-上调和函数仍有类似的 Riesz 分解. 特当 $N \ge 3$ 时, 这种分解呈简单形式:

$$f(x) = U_{\alpha}^{\mu}(x) + A,$$

其中μ为测度, A 为正的常数; 若 f 为α-调和, 则$\mu \equiv 0$, 即 $f \equiv A$.

若用 Ψ 表示α-上调和函数全体. 那么 Ψ-细拓扑与 Ψ-瘦分别

称为α-细拓扑与α-瘦. α-细拓扑严格细于通常欧氏拓扑且当$\alpha'<\alpha$时, α'-细拓扑严格细于α-细拓扑. α-细拓扑下的开集、闭集、极限等分别称为α-细开集, α-细闭集, α-细极限等. $\boldsymbol{R}^N$的子集E在x_0为α-瘦当且仅当x_0为E的α-非正则点, 因此关于α-非正则点的Wiener 判别法实即α-瘦的判别法. α-细拓扑也用于研究函数的边界值. 苏联以 Landkof N(见[32]) 为代表的学者对α-位势及α-细拓扑有深入的研究, 国内近来也有人研究α-调和函数的α-细边界值或其它意义下的细边界值与通常边界值及 Lipschitz 域的不相切边界值的关系(见[15,57]); 也有人在 Lipschitz 域上比较不同意义下的瘦的性质[72].

§ 11.5 $\mathcal{E}$ 空间上的 Dirichlet 问题

设 Ω 是 $\mathcal{E}$ 空间, D 是Ω 的开子集且$\Omega \setminus D$ 不是局部极集.

先考虑$D\cup\partial D$为紧集的情形. 对从∂D到$[-\infty,\infty]$的函数f, D上的超调和函数 u 若对每个$y\in\partial D$恒有

$$\liminf_{x\to y} u(x) \ge f(y),$$

则称u为(相对于)f 的上函数; 若 v 为$-f$ 的上函数, 则$-v$ 称为 f 的下函数. 令

$$\overline{H}_f(x) = \inf\{u(x) \mid u \text{ 为相对于} f \text{ 的上函数}\},$$
$$\underline{H}_f(x) = \sup\{v(x) \mid v \text{ 为相对于} f \text{ 的下函数}\},$$

那末$\underline{H}_f = -\overline{H}_{-f}$, 且$\underline{H}_f(x) \le \overline{H}_f(x)$, 若此式的等号在$D$处处成立且为有限值, 则称 f 为可解的, 并把调和函数 $H_f := \underline{H}_f = \overline{H}_f$称为以 f 为边界值的 **Dirichlet** 问题的一般解或 **PWB** (Perron-Wiener-Brelot)解. 当 f 是有限连续时, 则 f 必可解, 而

且

$$H_f(x) = \int f(y)\,\mathrm{d}\rho_x^D(y), \qquad x \in D,$$

此处 ρ_x^D 是 ∂D 关于 $x \in D$ 的调和测度，即 Dirac 测度 ε_x 在 $\Omega \setminus D$ 的扫除测度. f 可解的充要条件是: f 关于每个 $x \in D$ (或关于 D 的每个连通分支的每一个点 x) 为 ρ_x^D 可积. $Y \in \partial D$ 是 D 的正则边界点当且仅当对 ∂D 上的每个有限连续函数 f 恒有 $\lim_{x\to y} H_f(x) = f(y)$. 另外, $y \in \partial D$ 为 D 的正则边界点的充要条件是存在 y 的一个邻域 U 使得在 $D \cap U$ 上存在一个上调和函数 $g > 0$ 使得 g 在 y 以 0 为极限; 若 D 是区域时，这等价于对 D 上的 Green 函数 $G_x(z)$, 当 $z \to y$ 时 $G_x(z) \to 0$. 一般地, $y \in \partial D$ 非正则当且仅当 y 是 D 的某个连通分支的非正则边界点. 又，对 ∂D 上每个上有界的函数 f 及每个正则边界点 y 有

$$\limsup_{x\to y, x\in D} \overline{H}_f(x) \le \limsup_{z\to y, x\in\partial D} f(z).$$

再考虑 $D \cup \partial D$ 非紧的情形. 这时，因 Ω 非紧，考虑其添加 Alexandroff 点 ∞ 后所得到的紧空间 Ω^* 及 D 在 Ω^* 上的边界 $\partial D^* := \partial D \cup \{\infty\}$, 对 ∂D 上的函数 f, 补充定义它的值 $f(\infty) = 0$. 这时可类似地考虑 Dirichlet 问题且与上段有类似的可解性定理，对于非 ∞ 的边界 y，即 $y \in \partial D$, 正则点的定义与性质也相同，∂D 上的非正则点全体也是一个局部极集.

当 $N \ge 3$ 时，若无穷远点 ∞ 是上述区域 D 的边界点必为正则.

§ 11.6 Dirichlet 原理；广义函数的位势

1. Dirichlet 原理

设 Φ 为 $\boldsymbol{R}^N$ 有界区域 G 上的连续可微且梯度平方可积，即满足 $\mathrm{D}[f]:=\int_G |\mathrm{grad} f|^2 \mathrm{d}x<\infty$ 的实函数 f 全体．其中 $\mathrm{D}[f]$ 称为 f 的 **Dirichlet** 积分．在 Φ 上定义内积

$$(f_1,f_2):=\int_G(\mathrm{grad} f_1, \mathrm{grad} f_2)\mathrm{d}x=\int_G(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_i})\,\mathrm{d}x,$$

则依等价关系"~"：

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \mathrm{D}[f_1-f_2]=0$$

得到的商空间 Φ_0 是准 Hilbert 空间. **Dirichlet** 原理称，若 $f\in\Phi$ 且有界并可连续地延拓到 $\overline{G}$，那么在 $\mathscr{H}:=\{u\in\Phi \mid u 在 G 调和\}$中，Dirichlet 问题的解 H_f 使得$\|u-f\|=\mathrm{D}[u-f]$达到极小，它正好是 f 在子 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_0$($\mathscr{H}$ 的商空间)的正交投影.

该原理的古典形式说的是，在∂G 充分光滑时，与上述 f (只要求分片连续可微)同性质同边界值的函数 u 的全体之中，存在使得 Dirichlet 积分达到极小者.

50 年代，Deny J 用广义函数的位势证明了上述空间 Φ_0 的完备化是所谓 **BLD** 空间，它实际上是由这样的 **BLD** 函数 f 全体组成的：f 在 G 上似乎处处有限且 Φ 中有子列似乎处处收于敛于 f. 这样的 f 必几乎处处有梯度且 $\mathrm{D}[f]<\infty$. 若 f 是有界区域 $G_1(G_1\supset\overline{G})$ 内的 BLD 函数，则在 G 上，H_f 存在且除了一个附加常数外是唯一使 $\|u-f\|$ 达到极小的 BLD 函数，也是唯一的、在 G 内调和并可用 f 延拓成 G_1 内的 BLD 函数的函数.

其进一步发展见 § 13.2 Dirichlet 形式.

2. 广义函数的位势

用$D(G)$表示$\boldsymbol{R}^N$的子区域G上的所有具有紧支柱且无限次连续可微的复值函数构成的复向量空间. $D(G)$上引入一个拓扑如下：$D(G)$中的点列$\{f_n\}$收敛于 0 当且仅当存在G的一个紧子集K使得每个f_n的支柱都包含于K，并且对所有N维整数组 $k:=(k_1,k_2,\cdots,k_N)(k_i\geq 0, i=1,\cdots,N)$，$|k|:=k_1+k_2+\cdots+k_N$ 阶导数$\partial^k f_n$在G上一致收敛于 0, 其中$\partial^k:=\partial^{|k|}/\partial x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_N^{k_N}$. 关于这个拓扑，$D(G)$上的连续线性泛函称为$G$上的**广义函数**; 特当$G=\boldsymbol{R}^N$时，简称**广义函数**；广义函数全体记作$\boldsymbol{D}^*$.

设$S(\boldsymbol{R}^N)$是满足下面条件的函数φ全体：φ是$\boldsymbol{R}^N$上无限次连续可微的复值函数并且对任意自然数m, k, 都有

$$|x|^m\partial^k\varphi\to 0\text{，当 }|x|\to\infty\text{.}$$

那么$S(\boldsymbol{R}^N)$是复向量空间. 在$S(\boldsymbol{R}^N)$上定义拓扑如下：$S(\boldsymbol{R}^N)$ 的点列$\{\varphi_n\}$收敛于φ当且仅当对任意自然数m, k, 都有

$$(1+|x|^m)\partial^k\varphi_n\to(1+|x|^m)\partial^k\varphi$$

在 $\boldsymbol{R}^N$ 上一致收敛. 关于这个拓扑，$S(\boldsymbol{R}^N)$上的连续线性泛函全体记作$\boldsymbol{S}^*$; $\boldsymbol{S}^*$中的元素称为**缓增广义函数**. $\boldsymbol{R}^N$的测度$\nu\in\boldsymbol{S}^*$ 的充要条件是, 存在自然数n 使得

$$\int(1+|x|^2)^{-n}\mathrm{d}\nu(x)<\infty\text{.}$$

由于$D(\boldsymbol{R}^N)\subset S(\boldsymbol{R}^N)$，且$S(\boldsymbol{R}^N)$在$D(\boldsymbol{R}^N)$诱导的拓扑比$D(\boldsymbol{R}^N)$原来拓扑粗，所以，$\boldsymbol{S}^*\subset\boldsymbol{D}^*$. 即缓增广义函数必为广义函数.

若广义函数k的 Fourier 变换$k^{\sim}$为通常函数 (只要求几乎处处有定义)且满足$k^{\sim}\geq 0$，$(k^{\sim})^{-1}\in\boldsymbol{S}^*$ 时, 则称k 为**广义函数核**, 这时必有$k^{\sim}\in\boldsymbol{S}^*$. 例如, 对正规化的$\alpha$-核函数

$$k_\alpha(x) := A(N, \alpha)|x|^{\alpha-N}, \quad 1<\alpha<N,$$

其中

$$A(N, \alpha) := \pi^{\alpha-\frac{N}{2}}\Gamma(\tfrac{N-\alpha}{2})/\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}),$$

有$(k_\alpha)^{\sim} = |x|^{-\alpha} \in \boldsymbol{S}^*$，故 k_α 为广义函数核．

取定一个广义函数核 k，记

$\Sigma := \{T \in \boldsymbol{S}^* \mid T^{\sim}$为函数且 T 的能量$\|T\|^2 := \int k^{\sim}|T^{\sim}|^2 \mathrm{d}x < \infty\}$，它关于内积$(T_1, T_2) := \int k^{\sim} T_1^{\sim}(x) T_2^{\sim}(x) \mathrm{d}x$ 成为Hilbert空间. 若$T \in \Sigma$，则 $k^{\sim}T^{\sim} \in \boldsymbol{S}^*$，因此可确定一个满足 $u^{\sim} = k^{\sim}T^{\sim}$的广义函数 $u^{\sim}$，记作 U^T，称之为 T 的以 **k 为广义函数核的位势或广义函数的位势**. 特当 T 的支柱为紧集时有 $\mathrm{U}^T = k * T$（"$*$" 是卷积符号)，这与 T 为测度时的位势的表达式一致；而当 $T \geq 0$ 时，U^T为函数.

利用投影算子，可对广义函数的位势讨论容量，扫除和平衡问题. 下面以k_α 为例说明之. 这时，上述Σ表示α-能量有限的广义函数全体，它就是α-能量有限的复测度全体以相互能量$\mathrm{I}_\alpha(\mu, \nu)$为内积的准 Hilbert 空间的完备化. 若把$\Sigma$中那些支柱包含于$\boldsymbol{R}^N$的紧子集$K$的广义函数全体记作$\Sigma_K$，那么$\Sigma_K$是$\Sigma$的子 Hilbert 空间，$T \in \Sigma$到$\Sigma_K$ 的投影 T^1 存在且唯一，且 $\mathrm{U}^T(x) = \mathrm{U}^{T^1}(x)$在$K$的内部 K^0上几乎处处成立. 这时T^1 称为**广义函数 T 到紧集 K 的扫除**.

又，对满足 $\mathrm{U}^\Gamma(x) \equiv 1$ 在K^0成立的Σ中元素Γ（这样的Γ必存在)，其扫除Γ^1 是$\Sigma_K = \{T_1\}$中使$\|T_1 - \Gamma\|^2$ 达到极小的唯一解，称此Γ^1 为 **K 上的平衡分布**，又称$\|\Gamma^1\|^2$ 为 **K 的谱测度**. 当 $0<\alpha \leq 2$，它们分别与把 k_α 看成一般核时的容量测度和α-容量一致；而当$\alpha>2$ 时，前面已说过，关于测度的扫除问题一般无解，但这里则用广义函数的扫除解决了.

特别，对广义函数核 k_2（当$\alpha=2$ 时的 k_α)，Σ中广义函数 T 的位势 U^T称为**广义函数的 Newton 位势**，它是$\boldsymbol{R}^N(N \geq 3)$上的$\mathrm{BL}_0$

函数且

$$\| T \|^2 = (4\pi)^{-1} \int |\text{grad } U^T(x)|^2 dx ;$$

反之，任何一个 BL_0 函数几乎处处等于某个广义函数的 Newton 位势. 这里所谓 $\mathbf{BL_0}$ 函数指的是从 $\boldsymbol{R}^N$ 到$[-\infty, \infty]$的、满足下面条件的函数f:

(1)在几乎所有平行于坐标轴ox_i $(i=1,2,\cdots,N)$的直线上,$f(x)$是x的分量x_i的绝对连续函数;

(2)在$\boldsymbol{R}^N$上, $D[f] = \int |\text{grad} f(x)|^2 dx < \infty$;

(3) $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-(N-1)} \int_{|x|=r} f(x) d\sigma(x) = 0.$

§ 11.7 理想边界理论

1. 一般抽象边界

在非空集合 Ω 上赋予拓扑τ. 设I是非空指标集, 若对每个$i \in I$, 对应着由一族开集组成的一个滤基$\mathscr{B}_i$, 则在$\Omega \cup I$上存在满足下述条件的拓扑τ_1:

(1) τ_1在 Ω 的诱导拓扑正好是τ;

(2) 对任意$i \in I$, i 的邻域与Ω 的交全体构成 Ω 上的由$\mathscr{B}_i$生成的滤子(即i 的每个邻域与Ω 的交必包含$\mathscr{B}_i$的某个成员).

于是, 关于τ_1, I是Ω 的边界, 称之为Ω 的**抽象边界**. 这样的拓扑中有最细者, 它使得Ω 为开集, 在I上的诱导拓扑是离散的且$\mathscr{B}_i$中的集与i之并全体构成i的邻域基. 又, 在使 Ω 为开集的上述拓扑中最粗者记作τ_m. (Ω, τ)为 Hausdorff 空间, 则$(\Omega \cup I, \tau_m)$是 Hausdorff 空间的充要条件是: a) (Ω, τ)为

Hausdorff 空间; 且 b) $\forall i \in \mathrm{I}, \forall x \in \Omega, x$在$(\Omega, \tau)$有一个邻域$U$与$\mathscr{B}_i$某个成员$V$不相交; 且 c) $\forall i, j \in \mathrm{I}, i \neq j$, 存在$U \in \mathscr{B}_i, V \in \mathscr{B}_j$, 使得$U$与$V$不相交.

2. 极小细边界与极小细拓扑

设(Ω, τ)为拓扑空间$(\Omega \neq \varnothing)$, 一族从$\Omega$到$[0, \infty)$的连续函数组成的凸锥$\mathscr{V}$($\mathscr{V}$包含常值函数0)和一族从$\Omega$到$[0, \infty]$的下半连续函数组成的凸锥$\mathscr{P}$分别称为**抽象调和锥**和**位势锥**, 指的是它们满足下面两个公理:

i) $u \in \mathscr{V}$, $p \in \mathscr{P}$且$u \leq p$ 蕴涵 $u = 0$;

ii) $u \in \mathscr{V}, v \in \sum := \mathscr{V} + \mathscr{P} = \{h + p \mid h \in \mathscr{V}, p \in \mathscr{P}\}$蕴涵$\inf\{u, v\} \in \sum$.

例, Green空间上的正调和函数全体记作$\mathscr{V}$, Green位势全体记作$\mathscr{P}$($\infty \notin \mathscr{P}$), 则$\mathscr{V}$与$\mathscr{P}$满足上二公理, 分别为调和锥与位势锥.

$\mathscr{V}$中的元素h ($h \neq 0$) 称为**极小调和函数**指的是, 对是任意$u \in \mathscr{V}, u \leq h$ 蕴涵存在正的常数α 使得$u = \alpha h$.在向量空间 $\mathscr{V} - \mathscr{V}$中, $\mathscr{V}$是一个正子锥, $h \neq 0$ 为极小当且仅当$\overline{h} = \{\alpha h \mid \alpha \geq 0\}$为凸锥$\mathscr{V}$ 的极端母线. 若规定: h_1 等价于h_2为存在$\alpha > 0$使$h_1 = \alpha h_2$, 则可把$\overline{h}$它看成h 的等价类. 极小(正)调和函数的概念原系Martin R S 于 1941 年引入的, Brelot M 等人在抽象空间上加以发展, 关于抽象锥的研究已发展成专门的H-锥理论(见[5]).

设$h(h \neq 0)$为极小调和函数,Ω的子集E称为**关于h为瘦** (亦称**极小瘦**) 指的是关于凸锥Σ, h到E 的缩减函数$R_h^E \neq h$, 或等价地,存在$p \in \mathscr{P}$使得在E上有$p \geq h$成立. 集族$\{\Omega \setminus E \mid E$ 关于h 瘦$\}$构成一个滤子$\mathscr{F}_h$,与h 等价的极小调和函数h' 所对应

的滤子 $\mathcal{F}_{h'}=\mathcal{F}_h$ ，因此每个等价类 $\overline{h}$ 对应唯一的滤子 $\mathcal{F}_h$ ，于是，若的把 $\overline{h}$ 全体记作 I，它在上段意义下的抽象边界称之为Ω 的**极小边界**，它也是Ω 在下段所谓极小细拓扑下的边界.

Ω 上相对于凸锥 $\Phi := \Sigma \cup \{+\infty\}$ 的细拓扑记作 τ'. 那么 $\mathcal{F}_h$ 中的元素都是 τ'-开集. 在$\Omega \cup I$ 中关于滤子族$\{\mathcal{F}_h\}$ 产生的、使 I 成为抽象边界、Ω 成为 τ'-开集、在Ω 的诱导拓扑为细拓扑 τ' 的诸拓扑中最粗者 τ_m 称为**极小细拓扑**. 关于 τ_m，从Ω 内到边界点 $\overline{h}$ 的上、下极限与关于滤子 $\mathcal{F}_h$ 的上、下极限一致. 若 τ'是 Hausdorff 的，且$\forall x \in \Omega$, 存在一个位势 p 使得 $p(x) > 0$，则 τ_m 也是 Hausdorff 的.

3. CC 紧致化与理想边界

在实用中，常据所考虑的函数族的性质来引入边界且保证原空间附加边界后为紧的. 著名的 **Constantinescu-Cornea 定理**给出了统一处理常用的紧致化的办法：若Ω 是非紧的、局部紧的 Hausdorff空间，ψ 是一族从Ω 到$[-\infty, \infty]$ 的连续函数，则存在唯一（至多相差一个同胚）的紧空间 $\hat{\Omega}$ 满足:

1) Ω 在 $\hat{\Omega}$ 中稠密且为开集；

2) ψ 中每个函数 f 能延拓成 $\hat{\Omega}$ 上的连续函数 $\hat{f}$ ；

3) $\hat{f}$ 全体能分辨$\Delta:=\hat{\Omega}\setminus\Omega$ 中的点.

Δ 称为Ω 的**理想边界**. 适当选取 ψ，可得到位势论中常用的如下紧空间与相应的理想边界:

a) 当ψ 取为空集时，$\hat{\Omega}$ 为 Alexandroff 单点紧致化；

b) 当ψ 取为从Ω 到$[-\infty, \infty]$的连续函数全体，$\hat{\Omega}$ 为 Stone-Cech 紧致化；

c) 当ψ 取为如下从Ω 到$(-\infty, \infty)$ 的连续函数f 全体：在Ω中有紧集 K_f 使得$\Omega \setminus K_f$ 是一些区域之并且在其中每个区域上，f 取常数值，则$\hat{\Omega}$为 Kerekjarto-Stoilov 紧致化；

d) 当Ω是$\mathcal{E}$ 空间，ψ 取为从Ω 到$(-\infty, \infty)$的、连续的 BLD 函数全体时，$\hat{\Omega}$为 Royden 紧致化；

e) 当Ω 是 $\mathcal{E}$ 空间，ψ 为 d) 中函数族的一个子族，使得对其中每个函数f ，Ω 有闭子集 F_f 使得f 在$\Omega \setminus F_f$ 里调和且在那些于 F_f 上取值等于f 的 BLD 函数的 Dirichlet 积分中，f 达到极小，则$\hat{\Omega}$为 Kuramochi 紧致化；

其中 c)、 d)、 e)三种紧致化与理想边界还常用于研究 Riemann 曲面分类, 聚值论, HB 、 HD 、 HP 函数； c ）还用于研究共形映射. 此外，还有 f ） Wiener 紧致化，以及下述, 在位势论中最重要的 Martin 紧致化.

g) 当 Ω 是 Green 空间, $Y:=\{K_y(x) \mid y \in \Omega\}$, 其中 $K_y(x):= K(x, y): = G(x, y) / G(x, y_0)$, $y_0 \in \Omega$ 是任意取定的, $G(x, y)$是 Ω 的 Green 函数,约定 $K(y_0, y_0) = 1$. 这时相应的 CC 紧致化空间称为 **Martin** 空间，$\Delta:=\hat{\Omega}\setminus \Omega$ 称为 **Martin 边界**. 一般说来，$\boldsymbol{R}^N$的区域 Ω 的欧氏边界$\partial\Omega$ 与 Δ 全然不同，只是当 Ω 是球或其它较为正则的区域（如 Lipschitz 区域）时两者一致；对 $\boldsymbol{R}^2$ 的单连通 Green 区域 Ω, Δ 等同于 Caratheodory 分歧边界.

Martin 空间$\hat{\Omega}$是可度量化的且关于这种度量为完备；也可通过在 Ω 中先引入一个与 $K(x, y)$有关的度量，使其对应的拓扑与原拓扑等价，再由关于这个度量的完备化得到.

在 Martin 空间$\hat{\Omega}$中，对 Ω 上的极小正调和函数 u ，必存在唯一的 $X\in\Delta$ 使得 $u(y) = u(y_0)K(X, y)$, 称这样的 X 为 Δ 的极小点. 极小点全体记作 Δ_1, 它是一个 G_δ 型集. 利用 Choquet 关于紧凸集的极端点定理容易给出下述 Martin 积分表现定理的简单的证

明：对 Ω 上的任何非负调和函数 u，必存在唯一的、分布在 Δ_1 上的 Radon 测度μ使得

$$u(y) = \int K(X, y)\, \mathrm{d}\mu(X), \qquad y \in \Omega .$$

上式也称为 **Martin-Choquet** 积分表现；其右端是双层位势的推广，当 Ω 为 $\boldsymbol{R}^N$ 的球时，$K(X, y)$就是 Poisson 核. 其实，Martin 边界原来就是为了把 Poisson 积分表现推广到一般区域的正调和函数的情形去而设计的.

对 Martin 边界同样可考虑 Dirichlet 问题. 可把 Ω 上的细拓扑延拓成 $\Omega \cup \Delta_1$ 上的极小细拓扑，可类似地定义边界点的正则性，比较瘦的性质，讨论函数的边界值问题（参见 § 11.4 所述 Fatou-Doob 定理）. Martin 边界可翻译成概率的语言并在随机过程论得到应用和推广.

Martin 紧致化有许多推广的形式. 特别，对相当广泛的一类二阶椭圆型方程，可用它们在 $\boldsymbol{R}^N$（甚至一些 N 维流形）的区域上的 Green 函数 $G'(x, y)$代替通常 Green 函数，得到与该方程某族极小正解相关联的 Martin 边界 Δ' （有时称作椭圆 Martin 边界）及极小点集 Δ_1'，并可进而研究 Δ' 与 Δ 及其它理想边界的关系等. 特别，对二阶自共轭椭圆方程（或 Schroedinger Equaqtion）$\mathrm{L}u = Pu$（这里 L 表示 Laplace 算符，$P \geq 0$ 是局部 Hoelder 连续函数或者可测函数，或者更一般地，一个测度），考虑 Riemann 曲面的端 Ω 上的、于相对边界上取值为 0 的正（即非负）解族，用 Δ_1'表示盖在理想边界上的 Martin 边界的极小点集，把 Δ_1'的基数称为椭圆维数（它是 Heins M 调和维数这一概念的推广），记作 dim P，日本 Nakai M 等学者在一些特殊的端（例如，从单位圆盘挖去一点）上对 dim P 的值域与密度 P 的关系做了许多研究. 国内也有人在一般的端上探讨了盖在理想边界 δ 上的椭圆 Martin 边界及 dim P 与 δ 的关系 (见[51-53]).

§ 11.8 Abel 群上的位势论

本节均设 X 是一个局部紧的 Abel 群(简记为 LCA 群), 用 X 上的测度作为位势核, 以所谓"粗"的观点给出相应的位势原理. 限于篇幅, 此处仅给基本概念和主要结论. 详见文献[75].

本节约定的其它记号有:

Γ: X 的对偶群;

$C(X)$: X 上连续的复值函数全体;

$C_b(X)$: $C(X)$中有界函数全体, 赋予范数

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|\mid x\in X\};$$

$C_0(X)$: $C(X)$中在 X 的无穷远点以 0 为极限的函数全体, 范数同上.

$C_c(X)$: $C(X)$中具有紧支柱的函数全体, 范数同上.

$\mathscr{M}(X)$: X 上的、带(符)号(的)Radon 测度全体所成线性空间.

$\mathscr{M}_b(X)$: X 上有界、带号 Radon 测度全体之线性空间.

$\mathscr{M}_c(X)$: X 上具紧支柱的、带号 Radon 测度全体之线性空间.

ω_X: X 上的 Haar 测度.

ε_x: 集中在 $x\in X$ 的单位正测度, 即在 x 的 Dirac 测度.

$\widetilde{\mu}$: $\mu\in\mathscr{M}_b(X)$的 Fourier-Stieltjes 变换, 即

$$\widetilde{\mu}(r)=\int\overline{(x,r)}\,\mathrm{d}\mu,\ r\in\Gamma,\ \text{其中}(x,r)=r(x).$$

若 $\mathscr{M}^0(X)$, $C_1(X)$分别表示 $\mathscr{M}(X)$, $C(X)$的线性子空间, 则用 $\sigma(\mathscr{M}^0(X),C_1(X))$表示 $\mathscr{M}^0(X)$中的弱拓扑, 即 $\mathscr{M}^0(X)$中的测度网 $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ 弱收敛(依弱拓扑收敛)于μ 当且仅当 $\lim(\mu_\alpha, f)=(\mu, f)$ 对任意$f\in C_1(X)$成立(其中 (μ,f)表示f 关于测度 μ的积分, 以前我们记作 $\mu(f)$, 本节采用文献[75]的记号). 特别, 弱拓扑 $\sigma(\mathscr{M}(X), C_c(X))$称为 $\mathscr{M}(X)$中的浑拓扑(参看 § 2.8); 弱拓扑

$\sigma(\mathcal{M}_b(X),C_b(X))$称为**Bernoulli**拓扑；$\mathcal{M}(X)$中的测度网$(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ 浑收敛于μ记作$\mu_\alpha \Rightarrow \mu$. 用$\mathcal{M}_b^+(X)$表示$\mathcal{M}_b(X)$中的正元素子集，那么$\mathcal{M}_b^+(X)$中的测度网$(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ 按 Bernoulli 拓扑收敛于$\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$的充要条件是$\mu_\alpha \Rightarrow \mu$ 且有 $\lim \mu_\alpha(X) = \mu(X)$.

1. 迁移卷积半群与位势核

若$(\mu_t)_{t>0} \subset \mathcal{M}_b^+(X)$ 满足如下条件:

1) $\forall t > 0$ ，$\mu_t(X) \le 1$；

2) $\forall t, s > 0$ ，$\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$；

3) 当 $t \to 0_+$ 时，$\mu_t \Rightarrow \varepsilon_0$.

则称测度族$(\mu_t)_{t>0}$是X上的一个**浑连续卷积半群**；下面关系式

$$\widetilde{\mu}_t(r) = \exp(-t\Psi(r)), t>0, r\in\Gamma$$

确定了X上的卷积半群$(\mu_t)_{t>0}$ 与 Γ上的连续负定函数 ψ之间的一对一对应，称 $\psi(r)$是与$(\mu_t)_{t>0}$ **相关联的**. 又，对正数 λ，定义X上的正测度 ρ_λ：

$$(\rho_\lambda, f) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\mu_t, f)dt, \qquad f\in C_c(X).$$

称测度族$(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$是卷积半群$(\mu_t)_{t>0}$的**预解族**(resolvent). $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$ 满足**预解方程**

$$\rho_\lambda - \rho_\mu = -(\lambda - \mu)\rho_\lambda \cdot \rho_\mu.$$

设$(\mu_t)_{t>0}$ 是卷积半群，若 $\int_0^\infty \mu_t dt$ 的浑积分存在，即

$$\int_0^\infty (\mu_t, f)\, dt < \infty, \qquad \forall f\in C_c^+(X),$$

则称此半群是**迁移的**或**非常返的**，这时$\mu_t \Rightarrow 0\ (t\to\infty)$.若$(\mu_t)_{t>0}$不是迁移的，则称为是**常返的**.

若$(\mu_t)_{t>0}$ 是一个迁移卷积半群，则称测度 $\kappa := \int_0^\infty \mu_t dt$ (若存在的话)是**位势核**.

对于一个测度 ν，记 $D^+(\nu) := \{\sigma \mid \nu \cdot \sigma \text{ 存在}, \sigma\in \mathcal{M}^+(X)\}$.

对 $D^+(\kappa)$中的测度σ，称$\kappa * \sigma$ 为σ 的 κ-位势.

设$\mu \in \mathscr{M}_b^+(X)$, $\mu(X) \le 1$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^n$ 浑收敛，这里μ^n表示 μ 的 n 重卷积, $\mu^0 = \varepsilon_0$，则称 $\kappa := \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$ 是由μ确定的基本核. 它是由μ确定的卷积半群$(e^{-t} \cdot e^{t\mu})_{t>0}$的位势核. 另一方面，若已知 κ 是位势核，则对任意实数$\lambda > 0$，$\lambda\kappa + \varepsilon_0$是由 $\lambda\rho_\lambda$确定的基本核，即 $\lambda\kappa + \varepsilon_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\rho_\lambda)^n$.

对一个正测度 κ，若存在X的单位元 0 的一个紧邻域基 $\mathscr{B}$及满足下述四个条件的基本测度网$(\sigma_v)_{v\in\mathscr{B}}$，则称 κ 是一个完全核(perfect kernel):

1) $\sigma_v(X) \le 1$；

2) $\sigma_v \in D^+(\kappa)$，$\kappa * \sigma_v \le \kappa$ 且 $\kappa * \sigma_v \ne \kappa$；

3) 在 v 的余集上有，$\kappa * \sigma_v = \kappa$；

4) $\kappa * \sigma_v^n \Rightarrow 0\ (n \to \infty)$.

每一个完全核都是位势核；反之，每个位势核都是完全核.

2. 超过测度与不变测度

若 $\xi \in D^+(\mu)$ 满足 $\mu * \xi \le \xi$ (相应地 $\mu * \xi = \xi$)，则称 ξ 是μ-上调和测度(μ-调和测度). X 上的 Haar 测度 ω_X是μ-上调和测度. 当且仅当$\mu(X) = 1$ 时，ω_X是μ-调和测度.

设$(\mu_t)_{t>0}$ 是 X 上的卷积半群，ξ 是正测度. 若$\forall t > 0$，ξ是μ_t-上调和的(μ_t-调和的)，则称 ξ 关于$(\mu_t)_{t>0}$ 是超过测度(不变测度). Haar 测度 ω_X 是超过测度. 当且仅当μ_t 是概率测度时，ω_X是不变测度. 又，若 κ 是位势核，则$\forall\sigma \in D^+(\kappa)$，$\sigma$的 κ-位势 $\kappa * \sigma$是超过测度. 当且仅当 $\sigma = 0$ 时 $\kappa * \sigma$ 是不变测度. 对于每个超过测度 ξ，下面 Riesz 分解式成立:

$$\xi=\kappa*\sigma+\eta,$$

其中$\sigma\in D^{+}(\kappa)$，η是不变测度. 每一个超过测度是一个单调增加的位势网的浑极限.

设 G 是开集, ξ 是超过测度, 那么测度

$$R_{\xi}^{G}:=\inf\{\mu\mid\mu \text{ 是超过测度且在 } G \text{ 上}\mu\geq\xi\}$$

称为ξ在 G 上的缩简测度(reduced measure). R_{ξ}^{G} 也是一个超过测度, $R_{\xi}^{G}\leq\xi$ 且在 G 上有 $R_{\xi}^{G}=\xi$ ，它的 Riesz 分解式

$$R_{\xi}^{G}=\kappa*\sigma+\eta,$$

满足 $\mathrm{supp}(\sigma)\subset\overline{G}$. 若 G 是相对紧的开集, 则 R_{ξ}^{G} 是一个位势; 特别， $R_{\omega_X}^{G}$ 是一个位势, 故存在唯一的$\sigma_G\in D^{+}(\kappa)$ 使得 $R_{\omega_X}^{G}=\kappa*\sigma_G$.

对于相对紧的开集 G 及由 $R_{\omega_X}^{G}=\kappa*\sigma_G$所确定的唯一测度$\sigma_G$, 称 $\mathrm{cap}(G)=\int d\sigma_G$为 G 的 κ-**容量** .

3. 基本原理

a. 扫除原理（ balayage principle ） 设κ是一个测度，$\mu\in D^{+}(\kappa)$, G 为开集，若$\mu'\in D^{+}(\kappa)$且满足下面条件，则称 μ'是 μ 在 G 上的 κ-**扫除测度**:

1) μ'的支柱 $\mathrm{supp}(\mu')\subset\overline{G}$ ；

2) $\kappa*\mu'\leq\kappa*\mu$ ；

3) $\kappa*\mu'|_G=\kappa*\mu|_G$.

关于测度κ，若对任意$\mu\in\mathcal{M}_c^{+}(X)$及任意相对紧开集 G ，μ 在 G 的 κ-扫除测度都存在，则称为 κ **满足扫除原理**. 若对开集 G 去掉“相对紧”的限制, 则称κ **对所有开集满足扫除原理**.

b. 控制原理（ domination principle ） $\forall f, g \in C_c^+(X)$, 若

$$\kappa * f(x) \leq \kappa * g(x),\ x \in \mathrm{S}(f),$$

蕴涵该不等式在 X 上成立，就称 κ 满足**控制原理**．

c. 完全极大值原理（ complete maximum principle ）

$\forall f, g \in C_c^+(X)$，$\forall \varepsilon \geq 0$，若

$$\kappa * f(x) \leq \kappa * g(x) + \varepsilon\ ,\quad x \in \mathrm{S}(f),$$

蕴涵该不等式在 X 成立，就称 κ 满足**完全极大值原理**.

d. 正质量原理（ principle of positivity of mass ）

$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathrm{D}^+(\kappa)$, 若

$$\kappa * \mu_1 \leq \kappa * \mu_2$$

蕴涵$\mu_1(X) \leq \mu_2(X)$，就称 κ 满足**正质量原理**.

e. 平衡原理（ equilibrium principle ） 若对每个相对紧开集 G, 存在$\lambda = \lambda_G \in \mathrm{D}^+(\kappa)$满足下述条件:

1) $\mathrm{supp}\,(\lambda) \subset \overline{G}$;

2) $\kappa * \lambda \leq \omega_X$;

3) $\kappa * \lambda = \omega_X$ 在 G 上成立,

则称 κ 满足平衡原理, 这时 λ 称为 G 的 **κ-平衡分布** .

f. 电容器原理（ condenser principle ） 设 G_1， G_2是开集, $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \varnothing$ 且$\overline{G_1}$ 为紧集, 则存在 μ_1，$\mu_2 \in \mathrm{D}^+(\kappa)$ 使得 $\xi := \kappa * (\mu_1 - \mu_2)$ 满足

1) $0 \leq \xi \leq \omega_X$

2) $\xi = \omega_X$ 在 G_1 上成立;

3) $\xi = 0$ 在 G_2上成立;

4) $\mathrm{supp}(\mu_1) \subset \overline{G_1}$ ， $\mathrm{supp}(\mu_2) \subset \overline{G_2}$.

这个性质称为**电容器原理** .

位势核 κ 满足上述六个原理 .

4. Levy-Khinchin 公式

设$(\mu_t)_{t>0}$是X上的卷积半群，则$X\backslash\{0\}$上的正测度网

$$(t^{-1}\mu_t|_{X\backslash\{0\}})_{t>0}$$

当$t\to 0$时浑收敛于$X\backslash\{0\}$上的一个正测度μ，称μ为关于$(\mu_t)_{t>0}$的 **Levy** 测度.

X的对偶群Γ上一个复值函数ψ成为一个具有对称 **Levy** 测度的连续负定函数的充分必要条件是

(*) $\psi(r)=c+il(r)+q(r)+\int_{X\backslash\{0\}}(1-\mathrm{Re}(x,r))\mathrm{d}\mu(x),\quad r\in\Gamma,$

其中常数$c\geq 0$, l是Γ的连续实值同态, i是虚数单位, q是Γ上非负连续二次型, μ是$X\backslash\{0\}$上的正对称测度且满足

$$\int_{X\backslash\{0\}}(1-\mathrm{Re}(\kappa,r))\mathrm{d}\mu(x)<\infty,\qquad r\in\Gamma,$$

并且c, l, q, μ由ψ唯一决定，即$c=\psi(0)$, $l=\mathrm{I_m}\psi$, μ是关于ψ的 Levy 测度，$q(r)=\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(n,r)}{n^2}$, $r\in\Gamma$. 方程(*)称为 Levy-Khinchin 公式 .

5. Hunt 核

比位势核更一般的核有 Hunt 核，它指的是满足下条件的正测度 $\kappa=\int_0^\infty\mu_t\,\mathrm{d}t$:

1) $\mu_0=\varepsilon_0$

2) $\forall t, s\geq 0$, $\mu_t*\mu_s=\mu_{t+s}$;

3) $\mu_t\Rightarrow\mu_s\ (t\to s)$.

Hunt 核也满足扫除原理以及推广的电容器原理等位势论基本原理.

第十二章　扫除空间位势论

本书的第四至第九章已较详细地介绍了公理体系的一种最基本、最重要的形式 — 调和空间位势论. 本章将介绍它的一种直接的发展形式 — 扫除空间位势论. 另外几种公理位势论将在下一章略述.

我们已看到, 调和空间是由对某一类微分方程的解的性质的研究而引入的, 其对应的 Markov 过程总有连续的轨道. 但是轨道是否连续这对 Markov 过程的位势论并没有起重要作用. 而且, 甚至在调和空间中, 位势 (包括上调和函数) 所起的作用比调和函数更为重要. 并且, 由连续位势组成的凸锥起了决定性的作用, 这在更为一般的框架中也成立.

从这种观点出发, Bliedtner J 与 Hansen W 把 Mokobodzki G-Bony D S 关于概率位势论的研究与 Constantinesca C-Cornea A 关于调和空间的研究所采用的方法结合起来, 并进而引入扫除空间的概念. 这一概念不仅可以阐明分析位势论与概率位势之间的联系, 而且为扫除理论提供了一个清楚而又直接了当的表达.

在基地空间具有可数基的假定之下, 调和空间成了扫除空间的特殊情形. 而且在四至九章叙述的调和空间的主要性质都可在扫除空间中得以保持. 特别, 不同类型的 Dirichlet 问题可以用一个精巧的方法统一处理. 这种扫除空间理论的一个有决定意义的新优点是, 它把 Riesz 位势与 Markov 链当成了扫除空间的标准例子, 从而也就把它们的位势论包含了. 因此, 它确实比调和空间前进了一步.

以下均设X作为一个拓扑中具有可数基的、局部紧Hausdorff空间.

§ 12.1 扫除空间

设$\mathscr{W}$是由X上的、正的、下半连续函数组成的一个凸锥，如§ 11.4所说，$\mathscr{W}$-细拓扑（简称细拓扑）是使得$\mathscr{W}$中每个函数都连续的最粗拓扑. 就像§ 6.1一样，可以证明：

引理 12-1-1 X中每一个点x有一个由紧的(原拓扑下)、细邻域构成的邻域基; X赋予细拓扑之后成为一个Baire拓扑空间.
□

这保证了$\mathscr{W}$中的两个函数若除了一个细贫集（即细拓扑下的无处稠密集）外相等，则必恒等.

定义 对上述$\mathscr{W}$, 若下面四个公理满足，则称$(X, \mathscr{W})$是一个扫除空间.

(B1) $\mathscr{W}$是σ-稳定的，即$\mathscr{W}$中任何单调增加列的极限函数仍属于$\mathscr{W}$;

(B2)（**下定向公理**） 对$\mathscr{W}$的任何子集$\mathscr{V}$，其下确界函数 $g:=\inf\mathscr{V}$ 关于细拓扑的下半连续正则化$\tilde{g}$仍在$\mathscr{W}$中.

(B3)（**自然分解公理**） 若$u, f, g \in \mathscr{W}$使得$u \le f+g$，则存在$v, w \in \mathscr{W}$使得

$$u = v + w, v \le f \text{ 且 } w \le g.$$

(B4) 存在一个函数锥（见§ 1.4）$\mathscr{P} \subset C^+(X)$ 使得

$$\mathscr{W} = \Sigma(\mathscr{P}) := \{ u \mid \text{存在 } \mathscr{P} \text{ 中的单调增加列收敛于 } u \}.$$

可以证明，(B2)保证了对$\mathscr{W}$的任何子集$\mathscr{V}$, $\inf\mathscr{V}$关于细拓扑的下半连续正则化与关于原拓扑的下半连续正则化一致且集

$$\{ \hat{\inf}\mathscr{V} < \inf\mathscr{V} \}$$

是细贫集.

在$\mathscr{W}$满足条件 (B2) 的前提下,条件 (B3) 是$\mathscr{W}$成为位势锥 (见 § 1.4) 的一个充要条件.

定理 12-1-2 当 $(X, \mathscr{W})$ 满足(B1)、(B2) 及 (B3)时, 条件 (B4) 等价于下面两个命题中的任一个:

命题 1 设

$$\mathscr{P}:=\{p\in\mathscr{W}\cap C(X)\mid \mathscr{W}\cap C(X)\text{中存在一个严格正的函数 } v \text{ 使得 } \frac{p}{v}\in C_0(X)\}.$$

则$\mathscr{P}$是一个函数锥, 满足关于有限个元素取min运算封闭且$\Sigma(\mathscr{P})=\mathscr{W}$, 其中

$$C_0(X):=\{f\in C(X)\mid \forall\varepsilon>0\ \exists X\text{的紧集}K\text{使得}|f|<\varepsilon\ \text{在}X\setminus K\text{成立}\}.$$

命题 2 $\mathscr{W}$是线性分离的(见 § 8.3);存在严格正的函数$p, v\in\mathscr{W}\cap C(X)$ 使得$\frac{p}{v}\in C_0(X)$且每个 $u\in\mathscr{W}$满足:

$$u=\sup\{v\in\mathscr{W}\cap C(X)\mid v\le u\}.\ \square$$

把这一结论应用于预解族与相应的半群得:

定理 12-1-3 设$\mathbf{V}:=(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha>0}$是$X$上的一个子Markov预解族, 那么$(X, \mathbf{E}_\mathbf{V})$ ($\mathbf{E}_\mathbf{V}$定义见 § 8.2) 是一个扫除空间当且仅当下面两条件同时满足:

(1) 对每个$f\in \boldsymbol{K}(X)$有 $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\alpha\mathrm{V}_\alpha f=f$;

(2) $\mathbf{E}_\mathbf{V}$ 是线性分离的且存在严格正的函数$f, g\in\mathbf{E}_\mathbf{V}\cap C(X)$使得$f/g\in C_0(X)$且对每个$u\in\mathbf{E}_\mathbf{V}$ 有:

$$u=\sup\{v\in\mathbf{E}_\mathbf{V}\cap C(X)\mid v\le u\}.$$

进一步, 若$(X, \mathbf{E}_\mathbf{V})$是扫除空间, 则对每个既是细开集又是Borel 集的G及每个$x\in G$ 都有 $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\alpha\mathrm{V}_\alpha(x, G)=1$.

特别, $1\in\mathbf{E}_\mathbf{V}$ 且 $\mathbf{E}_\mathbf{V}$ 是 $\mathbf{S}_\mathbf{V}$ 中所有细下半连续函数全体.$\square$

推论 12-1-4 设$\mathbf{P}:=(\mathrm{P}_t)_{t>0}$是$X$上的一个子Markov半群,

那么$(X, \mathbf{E_p})$成为一个扫除空间当且仅当下面两条件都成立:

(1) 对每个$f \in \boldsymbol{K}(X)$, $\lim_{t\to 0+} \mathrm{P}_t f = f$;

(2) $\mathbf{E_p}$是线性分离的且存在严格正的函数$f, g \in \mathbf{E_p} \cap \boldsymbol{C}(X)$使得$f/g \in C_0(X)$, 并对每个$u \in \mathbf{E_p}$有

$$u = \sup\{v \in \mathbf{E_p} \cap \boldsymbol{C}(X) \mid v \le u\}.$$

进一步, 若 $(X, \mathbf{E_p})$ 是扫除空间, 则对每个既是细开集又是 Borel 集的 G, 对每个$x \in G$有

$$\lim_{t\to 0+} \mathrm{P}_t(x, G) = 1.$$

特别, $1 \in \mathbf{E_p}$ 且 $\mathbf{E_p}$ 是 $\mathbf{S_p}$ 中所有细下半连续函数组成的集. □

例1 设$\mathbf{P}$为$\boldsymbol{R}^N$上的Brown半群 (见 § 8.1), 则$(\boldsymbol{R}^N, \mathbf{E_p})$ 是一个扫除空间且满足.

a) 每个非空的细开集若为 Borel 集, 其N维 Lebesgue 测度必为严格正的;

b) $\boldsymbol{R}^N$的每个可数子集都是细闭的, 特别, 只有$\boldsymbol{R}^N$ 的有限子集是细紧的.

例2 用 Π表示$\boldsymbol{R}^1$上的平移半群(§ 8.1), 那么$(\boldsymbol{R}^1, \mathbf{E}_\Pi)$是一个扫除空间.

例3 离散位势论: 设X是一个赋予离散拓扑的可数集, 对X上的一个子 Markov 核 P 及每个实数$t > 0$, 令

$\mathrm{P}_t := e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty} t^k (k!)^{-1}\mathrm{P}^k$, 那么$\mathbf{P} = (\mathrm{P}_t)_{t>0}$ 是一个 Markov 半群且满足$\mathbf{E_p} = \mathbf{S_p}$, 称此$\mathbf{P}$为伪 **Poisson 半群**. 那么, 若$\mathbf{E_p}$能分离$X$中的点, 则 $(X, \mathbf{E_p})$ 是一个离散的扫除空间且$1 \in \mathbf{E_p}$.

注意到在经典位势论$\boldsymbol{R}^N (N \ge 3)$ 中, 常数1是上调和函数且对每个正的、连续的上调和函数p, 若$p \in C_0(\boldsymbol{R}^N)$, 则$p$是一个位势; 因此给出如下

定义 在扫除空间 $(X, \mathscr{W})$ 中, 对于一个函数$p \in \mathscr{W} \cap \boldsymbol{C}(X)$,

若存在一个严格正的函数 $v \in \mathscr{W} \cap C(X)$ 使得 $p/v \in C_0(X)$, 则称 p 是 X 上的一个**连续位势**.

下面用 $\mathscr{P}$ 表示 X 上的连续位势全体, 它显然是一个凸锥且其中任两个函数的下确界函数仍在 $\mathscr{P}$ 中, 并有 $\Sigma(\mathscr{P})=\mathscr{W}$(见定理 12-1-2). 令

$$\mathscr{P}_\sigma := \{ p \in C(X) \mid 存在\{p_n\}\subset \mathscr{P} 使得 p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \}.$$

易知 $\mathscr{P}_\sigma$ 是一个函数锥. 又令

$$C_{\mathscr{P}}(X) := \{q \in C(X) \mid 存在 p \in \mathscr{P} 使得 |q| \le p \}.$$

相对于函数族 $\mathscr{W}$ 定义缩减函数 (如同调和空间, 见 § 5.1), 即对 X 的任意子集 A 及从 A 到 $[-\infty,\infty]$的函数 f,

$$R_f^A := \mathscr{W}\text{-} R_f^A := \inf\{v \in \mathscr{W} \mid f \le v 在 A 上成立\};$$

当 $f \in \mathscr{W}$ 时, 则还可以表示成

$$R_f^A := \inf\{v \in \mathscr{W} \mid v \le f;\ v = f 在 A 上成立\};$$

当 $A = X$时, R_f^A 简记为 Rf.

于是, 有下面主要结论:

定理 12-1-5 关于扫除空间$(X, \mathscr{W})$, 连续位势锥 $\mathscr{P}$ 是含于 $\mathscr{W}$ 的最大位势锥且 $\mathscr{P} = \mathscr{P}_\sigma = \mathscr{W} \cap C_{\mathscr{P}}(X)$; 进一步

$$\mathscr{P} = \{ p \in \mathscr{W} \cap C(X) \mid 当 X 的紧集 K 增大为 X 时, R_p^{X\setminus K} 局部一致收敛 0 \}. \quad \square$$

类似于调和空间, 对 $u, v \in \mathscr{W}$ 及实数 $\alpha \ge 0$ 有:

$$R_{u+v}^A = R_u^A + R_v^A, \quad R_{\alpha u}^A = \alpha R_u^A \quad ;$$

$$u \le v \ \Rightarrow R_u^A \le R_v^A \ .$$

因此, 对每个取定的 $x \in X$, $A \subset X$, 从 $\mathscr{P}$ 到 $(0, \infty)$ 的映射 $p \mapsto R_p^A(x)$ 是 $\mathscr{P}$ 上的一个泛函, 具有可加性、正齐性及单调增加性. 于是可推出

定理 12-1-6 X 上存在唯一的测度 ξ_x^A 使得对每个 $p \in \mathscr{P}$ 都

有下式成立

$$\int p \, \mathrm{d}\xi_x^A = R_p^A(x),$$

且 ξ_x^A 的支柱在 $\overline{A}$. □

定理 12-1-7 设 u 为 X 上的一个下半连续函数且关于 $\mathcal{P}$ 下有界 (即存在 $p \in \mathcal{P}$ 使得 $u \geq -p$)

那么下面三个命题等价:

(1) $u \in \mathcal{W}$;

(2) $\int u \, \mathrm{d}\xi_x^{A \setminus G} \leq u(x)$ 对每个 $x \in X$ 及 x 的每一个开邻域 G 成立.

(3) 对每个 $x \in X$ 及 x 的每个开邻域 G, 存在在 G 的子集 V 使得 $\xi_x^{A \setminus V} \neq \varepsilon_x$ 且 $\int u \, \mathrm{d}\xi_x^{A \setminus V} \leq u(x)$. □

推论 12-1-8 扫除空间$(X, \mathcal{W})$具有**截断性质**, 即对 X 的每个开集 U 及 $u, v \in \mathcal{W}$, 若在 $X \setminus U$ 上有 $u \geq v$, 则如下定义的函数 w 属于 $\mathcal{W}$:

$$w := \inf\{u, v\} \qquad 在 U; \qquad w := v \qquad 在 X \setminus U.$$ □

第八章关于 **P**-调和空间的讨论有关的概念都可以平行地搬到扫除空间, 并且可得出如下重要定理, 它建立了扫除空间$(X, \mathcal{W})$与 X 上的子 Markov 半群的一对一对应关系.

定理 12-1-9 设$(X, \mathcal{W})$为扫除空间且 $1 \in \mathcal{W}$. 又设 $p \in \mathcal{P}_b$ 为严格位势 ($\mathcal{P}_b$ 表示 $\mathcal{P}$ 中有界函数全体). 那么 X 上存在唯一的子 Markov 半群 $\mathbf{P} := (\mathrm{P}_t)_{t>0}$ 使得 $\mathbf{E_p} = \mathcal{W}$ 且 $\mathbf{P}$ 的位势核 V 满足 $\mathrm{V}1 = p$, 而且 V 正好为关于 p 的位势核. 进一步,

$$\mathrm{P}_t(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P},\ \mathrm{P}_t(\boldsymbol{K}(X)) \subset \mathcal{P}_b(X) \text{ 且 } \mathrm{P}_t(\boldsymbol{C}_{\mathcal{P}}(X)) \subset \boldsymbol{C}_{\mathcal{P}}(X)$$

对每个 $t > 0$ 成立. □

§ 12.2 扫除空间的调和结构

受经典位势论中 Poisson 积分及其在上调和函数研究中的作用 (见 § 3.9 、§ 8.1 等) 的启发, 本节给出扫除核的概念, 并进而定义的调和核系. 后者相当于调和空间的 $\mathscr{H}$-扫除系(见 § 4.6).

先用 X 表示具有可数基的局部紧拓扑空间.

定义 设 U 为 X 的开集, X 上的一个核(见 § 8.2)H_U 如满足下面条件, 则称之为(相对于 U)的**扫除核**: 对 $x \in U$, $H_U(x, U) = 0$ 且对 $x \in X \setminus U$ 有 $H_U(x, U) = \varepsilon_x$. 用 $\boldsymbol{F}$ 表示 U 上的、收敛于某个 $z \in \partial U$ 的滤子, 若 $H_U(x, \cdot)$ 沿滤子 $\boldsymbol{F}$ 浑收敛于ε_z (参见 § 2.8), 则称 $\boldsymbol{F}$ 是正则的. 否则称 $\boldsymbol{F}$ 是非正则的.

设 $\mathscr{B}$ 为 X 的相对紧开集组成的一个基, 又设$(H_U)_{U\in\mathscr{B}}$ 是一族扫除核. 对 X 的每个开集 V, 用${}^*\mathscr{H}^+(V)$表示 V 上所有正的超调和函数构成的集, 即

$${}^*\mathscr{H}^+(V) := \{f \in \boldsymbol{B}^+(X) \mid f \text{ 在 } V \text{ 下半连续且} \forall U \in \mathscr{B}, \text{当 } U \text{ 的闭包包含于 } V \text{ 时必有 } H_U f \le f\}$$

用 $\boldsymbol{S}^+(V)$表示 V 上所有正的上调和函数全体, 即

$$\boldsymbol{S}^+(V) := \{g \in {}^*\mathscr{H}(V) \mid \forall U \in \mathscr{B} \text{ 且 } \overline{U} \subset V \text{ 有 } H_U g|_U \in \boldsymbol{C}(U)\};$$

用 $\mathscr{H}^+(V)$表示 V 上所有正的调和函数全体, 即

$$\mathscr{H}^+(V) := \{h \in \boldsymbol{S}^+(U) \mid \forall U \in \mathscr{B} \text{ 且 } \overline{U} \subset V \text{ 有 } H_U h = h\}$$

$$= \{h \in \boldsymbol{B}^+(X) \mid h|_V \in \boldsymbol{C}(V); H_U h = h, \forall U \in \mathscr{B} \text{ 且 } \overline{U} \subset V\}.$$

定义 若上述扫除核族$(H_U)_{U\in\mathscr{B}}$ 满足下列公理, 则称之为**调和核系**:

(H1) 对每 $x \in X$ 的邻域基$\{U \mid x \in U \in \mathscr{B}\}$ 作为滤子收敛于 x 时, $\{H_U(X, \cdot)\}$浑收敛于ε_x或者, 关于 ${}^*\mathscr{H}^+(x)$ 的缩减函数 $R_1^{\{x\}}$ 在

x为下半连续．

(H2) 对每个 $V, U \in \mathscr{B}$, 若 $\overline{U} \subset V$ 则 $H_U H_V = H_V$.

(H3) 对每个 $U \in \mathscr{B}$ 及 $f \in \boldsymbol{B}_b(X)$, 当 f 有紧支柱时满足 $H_U f \in \boldsymbol{B}_b(U)$.

(H4) 对每个 $U \in \mathscr{B}$ 及 $x \in U$ 存在一个 Evans 函数 w，即 $w \in {}^*\mathscr{H}^+(U)$, $w(x) < \infty$ 且对 U上每个非正则超滤子$\boldsymbol{F}$有 $\lim_{\boldsymbol{F}} w = \infty$.

(H5) ${}^*\mathscr{H}(X)$是线性分离的(见 § 8.2)且存在一个严格正的函数 $s_0 \in \boldsymbol{S}^+(X) \cap \boldsymbol{C}(X)$.

例 设X为$\boldsymbol{R}^N$ 的一个开集($N \geq 1$)且当 $N \leq 2$ 时补充要求X是相对紧的. 设$\mathbf{B}$是所有闭包包含于X的开球$B(a, r)$组成的集族, 对每个 $U := B(a, r) \in \mathbf{B}$, 定义一个扫除核 H_U如下:

$$H_U f(x) := \int f \mathrm{P}_{a,r}(x) \mathrm{d}\sigma_{a,r} \quad (f \in \boldsymbol{B}^+(X), x \in U),$$

其中 $\mathrm{P}_{a,r}$ 是 $B(a, r)$上的 Poisson 核. $\mathrm{d}\sigma_{a,r}$ 是单位正质量在球面$\partial B(a, r)$上的均匀分布. 那么, $(H_U)_{U \in \mathbf{B}}$ 是X上的一个调和核系且 ${}^*\mathscr{H}^+(U)$ 与 $\mathscr{H}^+(U)$分别是经典位势论中的正超调和与正调和函族.

下面设$(X, \mathscr{W})$是扫除空间, $\mathscr{P}$为所有连续位势所构成的凸锥, 对X的任意开集 U和 $x \in U$, 令:

$$H_U(x, \cdot) = \xi_x^{\complement U}, \tag{2.1}$$

称之为与扫除空间相关联的核.

仍用 $\mathscr{B}$ 表示 X 的一个由相对紧开集组成的基, 那么有下面主要结论:

定理 12-2-1 与一个扫除空间$(X, \mathscr{W})$相关联的核族$(H_U)_{U\in\mathscr{B}}$是X上的一个调和核系, 它所对应的、X上的正超调和函数全体 ${}^*\mathscr{H}^+(X) = \mathscr{W}$ 而且 $\mathscr{W} \cap \boldsymbol{C}(X) = \boldsymbol{S}^+(X) \cap \boldsymbol{C}(X)$ ，同时

$$\mathscr{P} = \{ p \in \mathscr{W} \cap \boldsymbol{C}(X) \mid \inf\{ R_p^{X \setminus K} \mid K \text{为} X \text{的紧子集} \} = 0\}$$
$$= \{ p \in \mathscr{W} \cap \boldsymbol{C}(X) \mid \forall h \in \mathscr{H}^+(X), h \leq p \Rightarrow h = 0 \}. \ \square$$

下面我们将证明相反的问题, 即证明任何一个调和核系确

定的 ${}^*\mathscr{H}^+(X)$ 必使 $(X, {}^*\mathscr{H}^+(X))$成为一个扫除空间且有(2.1)式成立. 为此, 仍设$(H_U)_{U\in\mathscr{B}}$ 是具可数基的局部紧空间 X 上的一个调和核系, 用 U 表示 X 的任一个开集.

先给出由$(H_U)_{U\in\mathscr{B}}$ 所确定的 $\mathscr{H}^+(X)$, ${}^*\mathscr{H}^+(X)$, $\mathscr{S}^+(X)$及所具有的一些基本性质.

（一）收敛性质

定理 12-2-2 设$\{h_n\}$为 $\mathscr{H}^+(U)$中的一个单调减少列, 则 $\inf h_n \in \mathscr{H}^+(U)$.□

定理 12-2-3 设 $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}^+(U)$为一个下定向集, 则$\mathscr{V}$中存在单调减少列$\{h_n\}$使得 $\inf h_n = \inf\mathscr{V}$ 在U上成立, 从而 $\inf\mathscr{V}$ 在U中连续. 若$\mathscr{V}$ 中还包含一列$\{g_n\}$使 $\inf g_n = \inf\mathscr{V}$ 在$X\setminus U$成立, 则 $\inf\mathscr{V} \in \mathscr{H}^+(U)$. □

（二）极小值原理与簇性质

仍设 V 为 X 的开集, 对 $x \in V$, 用 $\mathrm{N}(x)$表示 x 的一个邻域基使得其中每个成员 $U \in \mathscr{B}$ 且$\overline{U} \subset V$. 定义

$$ {}^*\mathscr{H}_{\mathrm{N}}(V) := \{g\in B(X) \mid g \text{ 在 } U \text{ 下半连续且} \forall x \in V, \forall U \in \mathrm{N}(x) \text{有} -\infty < H_U g(x) \le g(x)\} $$

$$ \mathscr{H}_{\mathrm{N}}(V) := {}^*\mathscr{H}_{\mathrm{N}}(V) \cap (-{}^*\mathscr{H}_{\mathrm{N}}(V)) $$

$$ = \{ h \in B(X) \mid h \in C(X);\ H_U h(x) = h(x),\ \forall x \in V,\ \forall U \in \mathrm{N}(x)\} $$

显然, ${}^*\mathscr{H}^+(V) \subset ({}^*\mathscr{H}_{\mathrm{N}})^+(V)$ 且 $\mathscr{H}^+(V) \subset (\mathscr{H}_{\mathrm{N}})^+$.

定理 12-2-4 (极小值原理) 设U为相对紧的开集, $g \in {}^*\mathscr{H}_{\mathrm{N}}(U)$使得$g \ge 0$在$X\setminus U$成立且对每个$z \in \partial U$有 $\liminf\limits_{x\to z} g \ge 0$, 则$g \ge 0$.

□

定理 12-2-5 $({}^*\mathscr{H}_{\mathrm{N}})^+(V) = {}^*\mathscr{H}^+(V)$ 且 $(\mathscr{H}_{\mathrm{N}})^+(V) = \mathscr{H}^+(V)$. □

这说明了超、正调和函数族与所选的邻域系 $N(x)$无关.

（三）下半连续正则化

令 $X_0 := \{ x \in X \mid \lim_{U, N(x)} H_U(x, \cdot) = \varepsilon_x \}$，其中 $N(x)$是 $x \in X$ 的一个邻域基. 我们知道（ § 1.1.8 ）， $N(x)$看成滤基收敛于 x.

那么有下面

定理 12-2-6 设 $\mathcal{V} \subset {}^*\mathcal{H}^+(X)$, $g := \inf \mathcal{V}$. 那么 g 的下半连续正则化 $\hat{g} \in {}^*\mathcal{H}^+(X)$且在 $X \setminus X_0$ 上有 $\hat{g} = g$ ；而对每个 $x \in X_0$ 有

$$\hat{g}(x) = \sup_{U \in N(x)} H_U^* g(x) = \lim_{U, N(x)} H_U^* g(x),$$

其中

$$H_U^* g: \quad x \mapsto \int^* g(y) H_U(x, dy).$$

(注 $\mu := H_U(x, \cdot)$ 是一个测度, $H_U(x, dy)$ 相当 $d\mu(y)$) . □

定理 12-2-7 若 $f \in C^+(X)$以某个上调和函数为上界, 则 $R f \in \mathcal{S}^+(X) \cap C(X)$; 而且对每个满足 $H_U f \geq f$ 的 $U \in \mathcal{B}$ 有 $H_U f = Rf$. 特别, $R f$ 在 f 的支柱之外(即关于 X 的余集) 调和 . □

于是对每个 $s \in {}^*\mathcal{H}^+(X)$, $\mathcal{S}^+(X) \cap C(X)$中有一个单调增加列以 s 为极限; ${}^*\mathcal{H}^+(X)$的任意子集 $\mathcal{V}$ 的下确界函数关于原来拓扑的下半连续正则化与关于${}^*\mathcal{H}^+(X)$-细拓扑的下半连续正则化相等.

现在进一步考虑由调和核系定义的位势.

定义 一个函数 $p \in \mathcal{S}^+(X)$ 称为**位势**， 若常数 0 是 p 唯一的正调和劣势函数(下属) .

用 $\mathcal{P}(X)$ 表示 X 上的位势全体，那么这种位势与调和空间中的位势具有相同的主要性质. 如 :

定理 12-2-8 $\mathcal{P}(X)$是一个凸锥; $\mathcal{S}^+(X)$ 是$\mathcal{P}(X)$与$\mathcal{H}^+(X)$的直和, 即 Riesz 定理成立: 每一个正的上调和函数 s 都可唯一地表示成

$$s = p + h_s$$

的形式, 其中 $p \in \mathcal{P}(X)$; 而 $h_s \in \mathcal{H}^+(X)$是 s 的、最大的调和下属. □

定理 12-2-9 若$\{p_n\}$是$\mathcal{P}(X)$中的一列函数且$p := \sum_{n=1}^{\infty} p_n \in \mathcal{H}^+(X)$, 则$p \in \mathcal{P}(X)$. □

下面考虑$\mathcal{P}(X)$的子锥$\mathcal{P}_l := \mathcal{P}(X) \cap C(X)$. 显然$\mathcal{P}_l$关于其中有限个元素取下确界运算是封闭的.

进一下可推出

定理 12-2-10 $\mathcal{P}_l$是一个函数锥且

$^*\mathcal{H}^+(X) = \Sigma(\mathcal{P}_l) = \{ u \mid u$ 是 $\mathcal{P}_l$ 中某个单调增加列的极限$\}$. □

从而可推出主要结果:

定理 12-2-11 关于 X 上的一个调和核系$(\mathcal{H}_U)_{U\in\mathcal{B}}$确定的$^*\mathcal{H}^+(X)$, $(X, {}^*\mathcal{H}^+(X))$是一个扫除空间且对每个$x \in U \in \mathcal{B}$有

$$H_U(x, \cdot) = \xi_x^{X\setminus U},$$

即(2.1)式成立. □

注 1) 用$\mathcal{B}'$表示X的相对紧开集全体. 将定理 12-2-11 与(2.1)结合起来, 可把$(H_U)_{U\in\mathcal{B}}$延拓成调和核系$(H_U)_{U\in\mathcal{B}'}$. 然后,由定理 12-2-5 知, 对X的每个开子集V, 若将$(H_U)_{U\in\mathcal{B}}$换成$(H_U)_{U\in\mathcal{B}'}$, 则V上的所有正超调和及正调和函数族不变, 从而正上调和函数族也不变, 并且X上所有位势组成的凸锥相对于调和核系的延拓不变.

同样道理, 若$\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}$是$X$的一个基, 那么用$(H_U)_{U\in\mathcal{B}''}$代替$(H_U)_{U\in\mathcal{B}}$时仍有同样结论.

2) 因此, 本定理说明了一个扫除空间的调和核系唯一确定, 事实上, 若$(X, \mathcal{W})$是一个扫除空间, $(H_U)_{U\in\mathcal{B}}$是X上的一个扫除核系, 那么, 由定理 12-2-1 知 $^*\mathcal{H}^+(X) = \mathcal{W}$, 而且本节定义的$\mathcal{P}_l:= \mathcal{P}(X)\cap C(X)$就是 $(X, \mathcal{W})$中的连续位势(全体构成的)锥, 而$\xi_x^{X\setminus U}$由$\mathcal{P}_l$按 (2.1) 式来定义, 故 $H_U(x, \cdot)$唯一.

§ 12.3　扫除空间与调和空间

本节进而研究扫除空间与 CC 意义下的 **P** 调和空间的关系.

设$(X, \mathscr{W})$是一个扫除空间, $(H_U)_{U\in\mathscr{B}}$ 为一个调和核系使得 ${}^*\mathscr{H}^+(X)=\mathscr{W}$.

定义　对每个 $x\in X$, 用α_x 表示测度 $\xi_x^{X\setminus\{x\}}$. 若 $\alpha_x=0$, 则称 $x\in X$ 为一个吸收点. 用 A_0 表示 X 中吸收点全体所成之集.

回顾 § 12.2 开头定义的 X_0, 它是使得 $\alpha_x=\varepsilon_x$ 的点全体, 因此 $A_0\subset X\setminus X_0$.

定理 12-3-1　对 $x\in X$, 下面四个命等价:

(1)　x 为吸收点;

(2) 对每个集 E, 当 $x\notin E$ 时 $\xi_x^E=0$;

(3) 对 x 的每个相对紧邻域 U 有 $H_U(x,\cdot)=0$;

(4) 对每个在 x 的某个邻域调和的函数 $h\geq 0$, 必有 $h(x)=0$. □

定理 12-3-2　1) A_0 是闭的, 细开的, 且为 X 的离散子空间.

2) 一个点 $x\in X$ 为细弧立点当且仅当$\alpha_x\neq\varepsilon_x$. $X\setminus X_0$ 为细弧立点全体, 是可数集.

3) 若 $u\in\mathscr{W}$, v 是从 X 到 $[0,\infty]$ 的映射且对每个 $x\in X$ 满足

$$\alpha_x(u)\leq v(x)\leq u(x),$$

则 $v\in\mathscr{W}$. □

定理 12-3-3　设 **P** 是 X 上的一个子 Markov 半群使得$(X, \mathbf{E_P})$为一个扫除空间, 那么对每个 $x\in X$, x 是吸收点等价于对于每个 $t>0$, $\mathrm{P}_t(x, X\setminus\{x\})=0$. □

定理 12-3-4　设 **P** 是 X 的一个子 Markov 半群使得$(X, \mathbf{E_P})$是一个无吸收点的扫除空间, 又设 $u\in\mathbf{E_P}\cap C(X)$. 若有某个 $t>0$ 使得 $\mathrm{P}_t u=u$, 那么 u 为调和函数. 若 u 为位势, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{P}_t u=0$.

因此，X 上有界位势全体 $\mathcal{P}_b$ 满足

$$\mathcal{P}_b=\{q\in \mathbf{E_P}\cap C_b(X)\mid \lim_t \mathrm{P}_t q=0\};$$

而有界正调和函数全体

$$\mathcal{H}_b^+(X)=\{h\in \mathbf{E_P}\cap C_b(X)\mid \text{对每个 } t>0\,,\ \mathrm{P}_t h=h\}$$
$$=\{h\in \mathbf{E_P}\cap C_b(X)\mid \text{存在 } t>0 \text{ 使得 } \mathrm{P}_t h=h\}.$$

但是，当 X 有吸收点时，情况可完全不同. 如，当 X 为离散空间，$\mathbf{P}$ 为平凡半群，即 $\mathrm{P}_t=\mathrm{I}$ (恒等核) $\forall t>0$ 时，那么

$$\mathcal{P}_b=\boldsymbol{B}_b^+(X)=\{f\in \boldsymbol{B}_b^+(X)\mid \text{对每个 } t>0,\ \mathrm{P}_t f=f\}\text{且}$$
$$\mathcal{H}_b^+(X)=\{0\}=\{f\in \boldsymbol{B}_b^+(X)\mid \lim_{t\to\infty}\mathrm{P}_t f=0\}.$$

定义 称扫除空间$(X,\mathcal{W})$具有**局部截断性质**，如果对 X 的任意开集 U 及任意一对 $u,v\in\mathcal{W}$，当 $u\ge v$ 在 U 的边界上成立时，定义函数 w 使得

w 在 U 上取 $\inf\{u,v\}$ 的值，在 $X\setminus U$ 取 v 的值，

则 w 必在 $\mathcal{W}$ 中.

定理 12-3-5 当扫除空间具有局部截断性质时，$X=X_0\cup A_0$，即 X 的一个点为细弧立点当且仅当它是吸收点. □

定义 一个扫除空间$(X,\mathcal{W})$称为是 **BH**(Bliedtner-Hansen)**调和空间**，如果$(X,\mathcal{W})$具有局部截断性质并且 X 不包含任何的弧立点；或等价地$(X,\mathcal{W})$具有局部截断性质且没有吸收点.

前面我们已经假定，X 有可数基. 这时容易验证，, BH 调和空间等价于 CC 调和空间中的 $\mathbf{P}$ 调和空间.

定理 12-3-5 下面四个命题等价:

(1) $(X,\mathcal{W})$ 具有局部截断性质;

(2) 对 X 的每个开集 V 及每个 $x\in V$ 有

$$\xi_x^{XV}(X\setminus\partial V)=0\,;$$

(3) 对每个 x 的相对紧开邻域 U, $H_U(x,X\setminus\partial U)=0$.

(这说明关于 U 的扫除核 H_U 作为测度，其质量集中在∂U 上).

(4) 对 X 的每个开集 V, 每个 $u \in {}^*\mathcal{H}^+(U)$ 及每个 Borol 函数 v, 当 $v=u$ 在 U 上成立时, 有 $v \in {}^*\mathcal{H}^+(U)$.

定理 12-3-7 设 $1 \in \mathcal{W}$, 则下面两个命题等价:

(1) $(X, \mathcal{W})$ 有局部截断性质;

(2) 存在 X 上的一个子 Markov 半群 $\mathbf{P} := (P_t)_{t>0}$ 使得 $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} = \mathcal{W}$ 且对每个 $f \in \mathbf{K}^+(X)$ 有 $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{1}{t} P_t f$ 在 $X \setminus S(f)$ 上局部一致收敛于 0, 这里 $S(f)$ 表示 f 的支柱. □

总结本节及前两节的结果, 得到关于调和空间的特征如下:

定理 12-3-8 设 $\mathcal{W}$ 是 X 上的数值函数组成的一个凸锥, $1 \in \mathcal{W}$, 则下面三个性质等价:

(1) $(X, \mathcal{W})$ 是一个 BH 调和空间;

(2) X 上存在满足下面条件的调和核系 $(H_U)_{U \in \mathcal{B}}$:

a) ${}^*\mathcal{H}^+(X) = \mathcal{W}$;

b) $H_U(x, X \setminus \partial U) = 0$ 对每个 $x \in U \in \mathcal{B}$ 成立;

c) $H_U(x, \partial U) > 0$ 对每个 $x \in U \in \mathcal{B}$ 成立;

(3) X 上存在一个子 Markov 半群 $\mathbf{P} := (P_t)_{t>0}$ 及一个关于有限元取下确界函数封闭的函数锥 $\mathcal{P} \subset \mathbf{C}^+(X)$ 使得

a) $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} = \Sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{W}$;

b) 对每个 $f \in \mathbf{K}(X)$, $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{1}{t} P_t f = 0$ 在 $X \setminus S(f)$ 上局部一致收敛于 0;

c) 对每个 $x \in X$, 存在 $t > 0$ 使得 $P_t(x, X \setminus \{x\}) > 0$.

例 前面列举的"经典位势论"所对应的扫除空间是调和空间, 这因为对每个 $x \in U \in \mathcal{B}$ 有 $H_U(x, X \setminus \partial U) = 0$ 及 $H_U(x, \partial U) = 1$. 由定理 12-3-6 知其有局部截断性质, 由定理 12-3-1 知其不包含吸收点.

据定理 8-1-2 及定理 12-3-7 知 $\mathbf{R}^N$ 上的 Brown 半群对应于调和空间. $\mathbf{R}^1$ 上的平移半群的情形类似.

另一方面，在离散位势论（§ 12.1）中，空间 X 的每一点都是孤立点，故它所对应的扫除空间不是调和空间，尽管在 X 上也可以定义一个调和核系使得它们产生的位势锥 $\mathcal{P}$ 满足 $\Sigma(\mathcal{P}) = {}^*\mathcal{H}^+(X)$. 进一步，一个对应于伪 Poisson 半群的扫除空间 $(X, \mathcal{W})$ 若不是由 X 上的所有正数值函数组成，则不满足局部截断性质，从而不是调和空间.

下面构造一个扫除空间，使得其中的位势正好是 α 阶 Riesz 位势.

定义 $(0, \infty)$ 上的一族测度 $(\mu_t)_{t>0}$ 若满足下面条件，就叫做 $(0, \infty)$ 上的一个（浑连续的）卷积半群：

(1) $\mu_t(0, \infty)) \le 1$ 对所有 $t > 0$ 成立;

(2) $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ 对所有 $s, t > 0$ 成立;

(3) $\lim\limits_{t \to 0+} \mu_t = \varepsilon_0$ (浑收敛).

那么，对 $\alpha \ge 0$ 及 $t > 0$，令 $\mu_t := e^{-\alpha t} \varepsilon_t$，则 $(\mu_t)_{t>0}$ 是 $(0, \infty)$ 上的一个卷积半群. 易于证明，对 $0 < \alpha \le 2$，存在 $(0, \infty)$ 上唯一的由概率测度组成的卷积半群 $(\eta_t^\alpha)_{t>0}$ 使得 $L\eta_t^\alpha(s) = \exp(-ts^{\alpha/2})$ 对任何 $s, t > 0$ 成立，这里 L 表示 μ 的 Laplace 变换，即

$$Lu : x \mapsto \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, d\mu(t), \qquad x \in (0, \infty).$$

这个 $(\eta_t^\alpha)_{t>0}$ 称为单边稳定半群，显然，对每个 $t > 0$ 都有 $\eta_t^\alpha = \varepsilon_t$.

若 $\mathbf{P} := (P_t)_{t>0}$ 是 X 上的一个可测的子 Markov 半群，$(\mu_t)_{t>0}$ 是 $(0, \infty)$ 上的一个卷积半群，则对每个 $t > 0$，可定义 X 上的一个核 P_t^μ 如下:

$$P_t^\mu f := \int P_s f \, d\mu_t(s) \qquad (f \in \mathcal{B}^+(X)),$$

这时 $\mathbf{P}^\mu := (P_t^\mu)_{t>0}$ 称为是借助于 $(\mu_t)_{t>0}$ 而从属于 $\mathbf{P}$ 的子 **Markov** 半群（易验它确实一个子 Markov 半群）.

例 1 当 $\mathbf{P} := (P_t)_{t>0}$ 是 X 上可测的子 Markov 半群时，若有

某个$\alpha \geq 0$ 使得$\mu_t = e^{-\alpha t}\varepsilon_t$ 对所有 $t>0$ 成立时，则 $\mathbf{P}^{\mu} = (P_t^{\alpha})_{t>0}$ 是从属于 $\mathbf{P}$ 的子 Markov 半群，其中 $P_t^{\alpha} = e^{-\alpha t}P_t$, $t>0$.

(2) 设$\mathbf{P} := (P_t)_{t>0}$为$\boldsymbol{R}^N$上的Brown半群且对某个$\alpha \in (0,2]$，$(\eta_t^{\alpha})_{t>0}$ 为单边稳定半群. 令

$$P_t^{\alpha} f := \int P_s f \,\mathrm{d}\eta_t^{\alpha}(s) \qquad (f \in \boldsymbol{B}^+(\boldsymbol{R}^N)).$$

那么，$\mathbf{P}^{\alpha} := (P_t^{\alpha})_{t>0}$ 是从属于 $\mathbf{P}$ 的子 Markov 半群. 称此 $\mathbf{P}^{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{R}^N$ 上以 α 为指标的对称稳定半群. 因为对每个 $t>0$,

$$P_t^{\alpha} 1 = \int 1 \mathrm{d}\,\eta_t^{\alpha} = 1,$$

故 $\mathbf{P}^{\alpha}$ 为 Markov 半群且特别有 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

定理 12-3-9 设$\mathbf{P}^{\alpha}$为$\boldsymbol{R}^N$上以 $\alpha \in (0, N) \cap (0, 2]$为指标的对称稳定半群，则$(\boldsymbol{R}^N, \mathbf{E}_{\mathbf{P}(\alpha)})$为扫除空间且该空间的位势正好是 α-阶 Riesz 位势，这里，作为下标，用 $\mathbf{P}(\alpha)$ 代表 $\mathbf{P}^{\alpha}$，以下同此. □

在定理条件下，下面考虑扫除空间 $(\boldsymbol{R}^N, \mathbf{E}_{\mathbf{P}(\alpha)})$上的调和核系，当$\alpha = 2$ 时，该核可用 Poisson 积分给出 (见 § 8.1). 下面设 $0<\alpha<2$. 用$\mathbf{B}$表示$\boldsymbol{R}^N$上所有开球$B(z, r)$构成的族，对每个$U := B(z, r)$，令

$$H_U^{\alpha} f(x) = \int_{X \setminus U} f\,P(x, U, \alpha)\,\mathrm{d}\lambda, \qquad (f \in \boldsymbol{B}^+(X), x \in U)$$

这里 λ 是 N 维 Lebesgue 测度，密度 $P(x, U, \alpha)$定义为

$$P(x, U, \alpha)(y) := C_{\alpha} \frac{(r^2 - |x-z|^2)^{\alpha/2}}{(|y-z|^2 - r^2)^{\alpha/2} |y-x|^N},$$

其中 $|x - z| < r \leq |y - z|$,

$$C_{\alpha} := \pi^{-(N/2)-1}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\sin\frac{\alpha\pi}{2}.$$

那么H_U^{α}是相对于U及$(\boldsymbol{R}^N, \mathbf{E}_{\mathbf{P}(\alpha)})$的扫除核；而且$(H_U^{\alpha})_{U \in \mathbf{B}}$是与 $(\boldsymbol{R}^N, \mathbf{E}_{\mathbf{P}(\alpha)})$相关联的调和核系.

由此出发，可对α-核位势论进行一系列的研究，其主要结论正如我们在第十一章所见到的那样.

$P(x,U,\alpha)$ 可视为推广的 Poisson 核，$H_U^\alpha f$ 就是推广的 Poisson 积分. 我们看到，测度 $H_U^\alpha(x,\cdot)$的支柱在 $X\setminus U$. 从而不满足定理 12-3-8 中的 b)，即 $H_U^\alpha(x, X\setminus\partial U)\neq 0$. 因此关于$\alpha$- ($\alpha\in(0,2)$)阶 Riesz 核所对应的扫除空间 (据定理 12-2-11 及其后的注知，其对应的调和核系唯一) 不是调和空间.

§ 12.4 扫除空间的 Dirichlet 问题

§ 12.2 已讲过，CC 调和空间中的、具有可数基的 **P** 调和空间是满足 (1)局部截断性质且 (2)无细弧立点的扫除空间. 因此 **P** 调和空间中的结论若与这两个性质无关者都可以完全搬到一般的扫除空间上来. 特别，本书第八、九两章的结论及绝大部分记号都可移植到扫除空间上来，有些记号的相应变动是明显的，如调和空间 $(X, \mathcal{U})$ 中的 $\mathcal{U}_+$ 改为扫除空间 $(X, \mathcal{W})$ 中的 $\mathcal{W}$；有些概念和条件的替代也是必须的，如调和空间由调和测度组成的扫除系换成扫除空间的调和核系等. 关于X的一个开集U上 Dirichlet 问题(广义解)的 PWB 方法可照样使用，上解、下解等可完全类地定义，只是在扫除空间中要对在X或在$X\setminus U$上有定义的函数f来考虑其上、下解与可解性，不再像调和空间考虑只在∂U上有定义的函数了. 在 § 12.1 我们已类似调和空间那样定义U上的正则滤子，故U的正则与非正则边界点也可一样地讨论.

下面，我们仅列举一些较重要的或需做改动的结论来说明.

以下均设$(X, \mathcal{W})$是一个扫除空间，U是X的一个开集，$\mathcal{P}$是$\mathcal{W}$中的连续位势全体；$(H_U)_{U\in\mathcal{B}}$是调和核系.

定理 12-4-1 (1)设 $u\in\mathcal{W}$，则 $\overline{H}_u^U = R_u^{X\setminus U}$

(2) 每个 $p\in\mathcal{P}$ 都是可解的且

$$H_u^U = R_u^{X\setminus U} = H_U p.$$

(3) 每个$f\in \boldsymbol{K}(X)$ 在 U是可解的且$H_f^U=H_U f$. □

定义 令

$\mathrm{R}_n(U):=\{f: X\to[-\infty,\infty]\mid \underline{H}_f^U=\overline{H}_f^U=:H_f^U, |H_f^U|<\infty$ 在 $U\}$,
称其中的函数f为近于可解的, 若 $H_f^U\in \mathcal{H}(U)$, 就称f为可解.
若每个$f\in \boldsymbol{K}(X)$ 在 U上都可解, 则称U是可解集.

定理 12-4-2 $f: X\to[-\infty,\infty]$ 是近于可解的当且仅当对每个$x\in U$, f关于$H_U(x,\cdot)$可积, 这时, $H_f^U=H_U f$.

定理 12-4-3 对U的每个边界点z, 下面各论点等价:

(1) z是正则边界点, 即对每个$f\in \boldsymbol{K}(X)$有

$$\lim_{x\to z, x\in U} H_f^U(x)=f(z) \tag{4.1}$$

(或将其中H_f^U改为$H_U f$也成立. 因对$f\in \boldsymbol{K}(X)$, 二者相相等), 即U上每个收敛于z的滤子都正则;

(2) 对每个$f\in \boldsymbol{C}_{\mathcal{P}}(X)$, $\lim\limits_{x\to z}\varepsilon_x^{X\setminus U}(f)=f(z)$ 成立. 这时$\varepsilon_x^{X\setminus U}$是$\varepsilon_x$在$X\setminus U$上的扫除测度(参见§ 9.1); $\boldsymbol{C}_{\mathcal{P}}(X):=\{g\in \boldsymbol{C}(X)\mid$ 存在$p\in\mathcal{P}$使得$|g|\le p\}$.

(3) 对某个严格位势$p\in\mathcal{P}$, $\lim\limits_{x\to z} H_p^U(x)=p(z)$ 成立;

(4) $\varepsilon_x^{X\setminus U}=\varepsilon_x$;

(5) $X\setminus U$在z不瘦. □

定理 12-4-4 U的非正则边界点全体U_i是一个K_σ型的半极集; $(X,\mathcal{W})$满足极性公理当且仅当对X的每个开集U, U_i是极集.
□

下面简要介绍一种广义的 Dirichlet 问题. 先介绍几个概念

定义 X上的一个核D称为是一个收缩核, 如果对每个$p\in\mathcal{P}$有$\mathrm{D}p\le p$ 成立; 一个收缩核称为是$\mathcal{W}$-收缩($\mathcal{P}$-收缩), 若$\mathrm{D}(\mathcal{W})\subset\mathcal{W}$(或相应地$\mathrm{D}(\mathcal{P})\subset\mathcal{P}$).

显然, 若D是一个$\mathcal{P}$收缩, 则必为$\mathcal{W}$收缩且满足$\mathrm{D}(\boldsymbol{C}_{\mathcal{P}}(X))\subset$

$C_{\mathcal{P}}(X)$.

定义 X 上的一个函数锥 $\boldsymbol{S}$ 称为**单纯锥**，如果对每个 $x \in X$，存在唯一的测度 $\mu_x \in \mathcal{M}_x(S)$ 使得 $\mu_x(X \setminus \mathrm{Ch}_S X) = 0$，其中 $\mathcal{M}_x(S)$ 及 Choquet 边界 $\mathrm{Ch}_S X$ 的定义见 § 8.3.

弱 Dirichlet 问题

对于扫除空间 $(X, \mathcal{W})$ 的一个开集 U，给定 $X \setminus U$ 上一个 $\mathcal{P}$ 有界的实值函数 f （即存在 $p \in \mathcal{P}$ 使得 $|f| \le p$ 在 $X \setminus U$ 成立），那么经典位势论的 Dirchlet 问题是要寻求 f 在 $C_{\mathcal{P}}(X)$ 中的一个连续延拓 f_1 使得 f_1 在 U 调和. 因此，人们把兴趣放在线性空间

$$H(U) := C_{\mathcal{P}}(X) \cap \mathcal{H}(U)$$

之上. 对于一个非正则集 U，人们要问，$X \setminus U$ 是否至少有一个闭子集 B 使得 B 上的每个连续函数可连续延拓. $H(U)$ 中的一个函数. 鉴于一般形式的极小值原理（见定理 8-3-4)的作用，对这样的集 B 的一个很自然的选择是 $\mathrm{Ch}_{S(U)} X$，此处 $S(U) := C_{\mathcal{P}}(x) \cap \mathcal{S}(U)$.

但是 $\mathrm{Ch}_{S(U)} X$ 未必为闭集. 因此提出下面

弱 Dirichlet 问题：给定 $\mathrm{Ch}_{S(U)} X$ 的一个闭子集 A 及 A 上一个 $\mathcal{P}$ 有界的连续函数 f，在 $\boldsymbol{H}(U)$ 中是否存在 f 的一个连续延拓？

利用单纯锥可给出一个确定的回答. 而且可以把 f 的延拓 h 清楚地构造出来. 事实上，有下面:

定理 12-4-5 对 X 的每个开集 U 及 $\mathrm{Ch}_{S(U)} X$ 的每个闭子集 A，存在一个 $\mathcal{P}$ 收缩 D 使得 $\mathrm{D}(C_{\mathcal{P}}(x)) \subset H(U)$ 且对每个 $x \in A$,

$$\mathrm{D}(x, \cdot) = \varepsilon_x.$$

进一步，$S(U)$ 是一个单纯锥且对每个 $x \in X$, $\mathrm{D}^U(x, \cdot) := \varepsilon_x^{\beta(X \setminus U)}$ 是满足 $\mathrm{D}^U(x, \cdot) \in \mathcal{M}_x(S(U))$ 且 $\mathrm{D}^U(x, X \setminus \mathrm{Ch}_{S(U)} X) = 0$ 的唯一测度. □

下一定理更由一步阐明了 $\mathrm{D}^U(x, \cdot)$ 与 $\varepsilon_x^{X \setminus U}$ 之间的关系:

定理 12-4-6 设 U 为 X 的开集，U_i 为 U 的非正则点全体，那么下面两个命题等价:

(1) 对每个 $x \in X$ 有 $\mathrm{D}^U(x, \cdot) = \varepsilon_x^{X \setminus U}$;

(2) 对每个 $x \in X$ 有 $\varepsilon_x^{X \setminus U}(U_{\mathrm{i}}) = 0$. □

广义解的特征

对于 $f \in \mathcal{C}_p(X)$, 我们在上面分别考虑了广义 Dirichlet 问题解 H_f^U 与弱 Dirichlet 问题解 $\mathrm{D}^U f$, 二者都在 U 调和. 显然, 若 $f \in \mathcal{H}(U)$, 则 $H_f^U = \mathrm{D}^U f = f$. 但对一般的 $f \in \mathcal{C}_p(X)$, 我们必须搞清楚, 何者为"适合的"解. 为此, 引入

定义 X 上的一个收缩核 L 称为 U 上的一个 **Keldych 算子**, 如果 $\mathrm{L}(\mathcal{C}_p(x)) \subset \mathcal{H}(U)$ 且对每个 $h \in \mathcal{H}(U)$ 有 $\mathrm{L}h = h$ 成立. 开集 U 称为 **Keldych 集**, 如果对 U 上每一个 Keldych 算子及每个 $f \in \mathcal{C}_p(X)$ 都有 $\mathrm{L}f = H_f^U$ 在 U 上成立.

定理 1-4-7 (1) U 为 Keldych 集当且仅当对每个 $x \in U$ 有 $\mathrm{D}^U(x, \cdot) = \varepsilon_x^{X \setminus U}$;

(2) 若存在闭集 $A \subset U$, 则存在开集 V 使得 $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$ 且对每个 $x \in X$ 有 $\varepsilon_x^{X \setminus U}(V_{\mathrm{i}}) = 0$. 特别, 这样的 V 必为 Keldych 集.

□

定理 12-4-8 设 L 为 X 的开集 U 上的一个 Keldych 算子, 则对每个 $f \in \mathcal{C}_p(x)$, $\mathrm{L}f = H_f^U$ 在 U 成立当且仅当 L 满足下面所谓**内稳定条件**: 若 $f \in \mathcal{C}_p(x)$, $\{U_n\}$ 是 U 的一个穷尽列, 且对每个 $n \in \mathbf{N}$, L_n 是 U_n 上的一个 Keldych 算子, 那么在 U 上有

$$\lim_n \mathrm{L}_n f = \mathrm{L} f. \quad \square$$

上二定理给出了 Dirichlet 广义解的一个特征, 它显示了广义解在诸解中具有特殊重要的作用.

当 $(X, \mathcal{W})$ 满足极性公理 (例如在经典位势论及 Riesz 位势论) 时, X 的每个开集都是 Keldych 集.

在扫除空间上还可以考虑"细 Dirichlet 问题", 研究解的逼近问题及可去性等. 有兴趣的读者可参见[6].

第十三章　H 锥、狄氏型与非线性位势论

本章简要介绍另外三种形式的公理体系位势论.

§ 13.1 H-理论，它是调和空间位势论的一种发展形式. N.Boboc, Buchur Gh 和 Cornea A 等人从经典位势论中位势族的两大特点——"次序"与"凸性"出发，脱离函数及其定义集的拓扑的限制，直接给出 H 锥及标准 H 锥的概念，然后寻找 H 锥对应的函数锥，再由标准的函数 H 锥给出函数定义集上的自然拓扑与细拓扑. 这样做，不但能把调和空间的主要结果移植过来，而且便于利用 H 锥的对偶锥的来研究共轭微分算子所对应的位势以及 Dirichlet 空间；由于 H 锥与一类预解族的超过函数锥之间的对应关系，H 锥与 Markov 过程的联系也以一种相当自然的方式形成.

§ 13.2　介绍在当今 Dirichlet 空间的多种发展模式中占主流地位的所谓"狄氏型"(Dirichlet form, 亦称 Dirichlet 形式).

§ 13.3　简要介绍非线性位势论的一种形式— Lehtola 意义下的非线性调和空间. 它包含了一类非线性的二阶椭圆型微分算子的位势论. 由于它与线性调和空间中的 Brelot 调和空间较接近，容易为熟悉线性位势论的读者学习与掌握，可为进一步掌握当今迅速发展的、形形式式非线性系统奠定基础.

§ 13.1　H 锥理论

定义　一个有序凸锥是如下一个集 S，它赋予加法"+":

$$\mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \mathbf{S}, \qquad (s, t) \mapsto s + t$$

与正实数的数乘

$$[0, \infty) \times \mathbf{S}, \qquad (\alpha, s) \mapsto \alpha s$$

及一个次序关系“≤”,使得下面条件满足:

(1)($\mathbf{S}$, +)是一个可交换的半群并有一个零元, 记作 0;

(2)加法与数乘满足分配律, 即

$$\alpha(s+t) = \alpha s + \alpha t; \qquad \alpha \in [0, \infty), \quad s, t \in \mathbf{S}$$

$$(\alpha+\beta) s = \alpha s + \beta s; \qquad \alpha, \beta \in [0, \infty), \quad s \in \mathbf{S}$$

$$(\alpha \beta) s = \alpha (\beta s); \qquad \alpha, \beta \in [0, \infty), s, t \in \mathbf{S}$$

$$1s = s, \qquad s \in \mathbf{S}.$$

(3) $s \in \mathbf{S} \Rightarrow s \geq 0$;

$$s \leq t \Rightarrow \alpha s \leq \alpha t, \qquad \alpha \in [0,\infty), s, t \in \mathbf{S},$$

$$s \leq t \Leftrightarrow s + u \leq t + u \qquad s, t, u \in \mathbf{S}.$$

对一个有序凸锥 $\mathbf{S}$ 的任意子集 $\mathbf{F}$, 用 $\vee \mathbf{F} = \vee_{t \in \mathbf{F}} t$ 表示 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{S}$ 中的最小上界; $\wedge \mathbf{F} = \wedge_{t \in \mathbf{F}} t$ 表示 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{S}$ 中的最大下界, 如果这些上下界存在的话. 对 $s, t \in \mathbf{S}$, 记 $s \wedge t := \wedge\{s, t\}, s \vee t := \vee\{s, t\}$.

显然, 一个有序向量空间的正元素全体组成的锥的任何凸子锥都是一个有序凸锥; 反之, 任何有序凸锥都可以看成某个有序向量空间的正元素组成的一个凸子锥.

定义 有序凸锥 $\mathbf{S}$ 若满足下述公理, 则称 $\mathbf{S}$ 是一个 H **锥**:

H1) 对任何在 $\mathbf{S}$ 有上界的上定向集 $\mathbf{F} \subset \mathbf{S}$, $\vee \mathbf{F}$ 存在且对任何 $s \in \mathbf{S}$ 有下式成立:

$$s + \vee \mathbf{F} = \vee (s + \mathbf{F});$$

H2) 对任何非空集 $\mathbf{F} \subset \mathbf{S}$, $\wedge \mathbf{F}$ 存在且对任何 $s \in \mathbf{S}$ 有下式成立

$$s + \wedge \mathbf{F} = \wedge (s + \mathbf{F});$$

H3) $\mathbf{S}$ 满足 Riesz (自然) 分解性质, 即对任意 $s, u, v \in \mathbf{S}$, 当

$s \leq u+v$ 时，必存在 $f, g \in \boldsymbol{S}$ 使得

$$s=f+g \text{ 且 } f \leq u, \quad g \leq u.$$

定义 设 $(X, \mathcal{F})$ 是可测空间，X 上的一个预解族 $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha>0}$（或一个核 V）称为（相对于某个有限测度 μ）**绝对连续的**，如果对任意 $\mathcal{F}$ 可测的、正的数值函数 f，当 $\int f \mathrm{d}\mu=0$ 必有 $\mathrm{V}_\alpha f=0$ 对每个实数 $\alpha \geq 0$ 成立（相应地有 $\mathrm{V} f=0$）.

例 以下各凸锥都是 H 锥:

1) 正实数集 $[0, \infty)$;

2) $\boldsymbol{R}^1$ 上定义的、正的单调增的实函数全体组成的凸锥;

3) 一个调和空间中的正上(或超)调和函数全体组成的凸锥;

4) 在 Stone 空间中的正连续函数全体组成的凸锥;

5) 相对于一个绝对连续的预解族的超过函数全体组成的凸锥.

定义 设 $\boldsymbol{D}$ 为一个 H 锥 $\boldsymbol{S}$ 的子集，称 $\boldsymbol{D}$ **依序从下(在 $\boldsymbol{S}$)稠密**，若对任意 $s \in \boldsymbol{S}$ 都有

$$s=\bigvee\{d \in \boldsymbol{D} \mid d \leq s\}.$$

$\boldsymbol{D}$ 称为 (在 $\boldsymbol{S}$) **增加稠密**，如果对每个 $s \in \boldsymbol{S}$，$\{d \in \boldsymbol{D} \mid d \leq s\}$ 都是上定向集且以 s 为最小上界.

定义 设 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$ 是两个 H 锥，$\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的一个凸子锥. 一个从 $\boldsymbol{D}$ 到 $\boldsymbol{T}$ 的映射 φ 称为

可加的，若 $s, t \in \boldsymbol{D} \Rightarrow \varphi(s+t)=\varphi(s)+\varphi(t)$;

单调增加的，若 $s, t \in \boldsymbol{D}$ 且 $s \leq t \Rightarrow \varphi(s) \leq \varphi(t)$;

依序从下连续的，若对任何 $s \in \boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的任何一个以 s 为最小上界的上定向子集 $\boldsymbol{F}$ 都有 $\varphi(s)=\bigvee_{t \in \boldsymbol{F}} \varphi(t)$.

定义 由一个集 X 上的正数值函数组成的一个凸锥 $\boldsymbol{S}$ 若满足 H2),H3)以及下面四个条件，则称为是一个**函数 H 锥**.

(F0) 对任意 $s, t, u \in \boldsymbol{S}, s+u \leq t+u \Rightarrow s \leq t$.

(F1) 对 $\boldsymbol{S}$ 的任何上定向子集 $\boldsymbol{F}$，若 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{S}$ 中有上界，则 $\sup \boldsymbol{F} \in \boldsymbol{S}$.

(F2) $\inf\{s, t+\alpha\} \in \boldsymbol{S}$ 对任何 $s, t \in \boldsymbol{S}$ 及任何 $\alpha \in [0, \infty)$ 成立.

(F3) $\boldsymbol{S}$ 能分辨 X 中的点且对任何 $x \in X$, 存在 $s \in \boldsymbol{S}$ 使得 $s(x) > 0$.

易验证，函数 H 锥必为 H 锥.

例 对于 CC 调和空间 X, 若常数是其中的调和函数，则正上调和函数全体构成一个函数 H 锥；又设 $\mathbf{V}$ 是可测空间$(Y, \mathscr{B})$上的子 Markov 预解族，它相对于一个有限测度绝对连续，则关于 $\mathbf{V}$ 的超过函数全体 $\mathbf{E}_{\mathbf{V}}$ 是一个函数 H 锥当且仅当下面条件同时成立：$1 \in \mathbf{E}_{\mathbf{V}}$; $\inf\{s, t\} \in \mathbf{E}_{\mathbf{V}}$ 对任意 $s, t \in \mathbf{E}_{\mathbf{V}}$ 成立且 $\mathbf{E}_{\mathbf{V}}$ 能分离 Y 中的点.

为了研究位势论性质，标准 H 锥的概念是很重要的，为了叙述简单，我们只介绍标准的函数 H 锥.

定义 设 $\boldsymbol{S}$ 为集 X 上的函数 H 锥，若 $u \in \boldsymbol{S}$ 满足 $u(x) > 0$ 对任意 $x \in X$ 成立，则称 u 为 $\boldsymbol{S}$ 的一个**弱单位**. 关于弱单位 u，用 $\boldsymbol{S}_0(u)$表示 $\boldsymbol{S}$ 中这样的元素 v (称为 u-连续函数)全体:

对任意 $\varepsilon > 0$, 对任意以 v 为最小上界的上定向集 $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{S}$, 存在 $t \in \boldsymbol{F}$ 使得 $v \le t + \varepsilon u$.

令 $\boldsymbol{S}_0 := \cap\{w \in \boldsymbol{S}_0(u) \mid u \text{ 为 } \boldsymbol{S} \text{ 的弱单位 }\} = \cap_u \boldsymbol{S}_0(u)$.

函数 H 锥 $\boldsymbol{S}$ 称为**标准的**，如果常数 $1 \in \boldsymbol{S}$ 且 $\boldsymbol{S}$ 中至少包含有一个弱单位，并且 $\boldsymbol{S}_0$ 中有一个可数子集 $\boldsymbol{D}$ 在 $\boldsymbol{S}$ 中为增加稠密的.

定义 X 上的、使得每个 $w \in \boldsymbol{S}_0$ 都连续的最粗拓扑称为**自然拓扑**；使每个 $s \in \boldsymbol{S}$ 都连续的最粗拓扑称为**细拓扑**.

显然 $\boldsymbol{S}$ 中每个函数 s 关于自然拓扑都是下半连续的. 若 X 上的自然拓扑是可度量化且完备的，容易证明（参看 § 6.1), X 关

于细拓扑是 Baire 拓扑空间. 关于调和空间、扫除空间的许多与细拓扑有关的性质在此都成立.

可以证明, 相对于一个由正核生成的、绝对连续的预解族的超过函数族是一个标准 H 锥. 反之, 一个标准的 H 锥可以"增加稠密"地嵌入到某个波兰 (Polish) 空间上的、相对于一个绝对连续预解族的超过函数锥之中. 因此, 对于一个给定的标准 H 锥可用一个可度量化的紧空间上的特定的 Ray 半群联系起来, 这样就使得 H 锥理论获得了一个深刻的概率结构.

H 积分的概念在 H 锥理论中起了很重要的作用.

定义 设 $\boldsymbol{S}$ 是一个 H 锥. 从 $\boldsymbol{S}$ 到 $[0, \infty)$ 的一个映射 μ 称为是一个 **H 积分**, 如果 μ 是可加的, 单调增加的且依序从下连续的, 并且在 $\boldsymbol{S}$ 的一个增加稠密的子集上取有限值.

在 H 锥 $\boldsymbol{S}$ 上的 H 积分全体记作 $\boldsymbol{S}^*$, 在其中赋予点状次序 (即 $f, g \in \boldsymbol{S}^*$, $f \leq g \Leftrightarrow f(s) \leq g(s), \forall s \in \boldsymbol{S}$) 与代数运算, 则 $\boldsymbol{S}^*$ 也是一个 H 锥, 它被称为 $\boldsymbol{S}$ 的对偶; 若 $\boldsymbol{S}$ 是标准的, 则 $\boldsymbol{S}^*$ 也是标准的; 若 $\boldsymbol{S}$ 是标准的 H 锥, 则 $\boldsymbol{S}$ 可以增加稠密地嵌入 $\boldsymbol{S}^{**} := (\boldsymbol{S}^*)^*$.

若 $\boldsymbol{S}$ 是关于一个绝对连续的预解族的超过函数全体构成的 H 锥, 且这个预解族有一个共轭预解族, 则 $\boldsymbol{S}$ 的对偶 $\boldsymbol{S}^*$ 可通过"能量形式"与相对于共轭预解族的超过函数锥同构. 特别, 若一个 H 锥是相对于某个微分算子 L 的上调和函数锥, 而微分算子 L 具有一个共轭 L^* 的话, 则 $\boldsymbol{S}^*$ 同构于相对于 L^* 的正上调和函数锥.

用这种方式, 标准 H 锥成了研究位势论中对偶问题的一个自然框架.

可以给出关于一个标准 H 锥的泛函表示式与积分表示式. 这样做的关键是在于 H 锥 $\boldsymbol{S}$ 上的自然拓扑. 关于自然拓扑, $\boldsymbol{S}^*$

是一个完备的凸锥而且 $\mathbf{S}^*$ 的冠 (cap) 是一个 Choquet 单纯形；而且 $\mathbf{S}$ 可以表示为某个波兰空间上的一个由下半连续函数构成的凸锥 $\mathbf{S}_1$, 使得 $\mathbf{S}$ 的、有上界的上定向子集的最小上界与它在 $\mathbf{S}_1$ 中关于点状次序上确界一致，且 $\mathbf{S}$ 中有限集的最小下界与它在 $\mathbf{S}_1$ 中点状下确界一致.

当一个 H 锥表示成一个集 X 上的函数 H 锥时，则位势论中通常概念，如细拓扑、瘦性、半极集、极集、扫除与位势的支柱等可相应地定义，而且与这些概念有关的主要结果也可得到. 例如，对于上定向集的 Doob-Bauer 收敛性质(参见 § 4.1), 关于单调增集列的扫除收敛定理(参见 § 9.2). 又如 X 上的一个 Borel 集是半极集, 如果它的任何紧子集都是半极集的话(参见 § 7.2).

上述对偶理论可用以研究 Dirichlet 空间 (或称 Dirichlet 形式，狄氏型). 可以证明, 任何 Dirichlet 空间上的所有位势之集是一个 H 锥且其对偶同构于由所有协位势(copotential)组成的 H 锥. 其中一种特殊情形是自对偶 H 锥，它同构于一个对称的 Dirichlet 空间的位势锥. 在这里， Hilbert 的方法成了 H 锥理论的、最主要的分析学上的工具.

对于一个定义在集 X 上函数 H 锥 $\mathbf{S}$, 对 $A \subset X$ 及 $s \in \mathbf{S}$, 令

$$R_s^A := \inf\{t \in \mathbf{S} \mid t \geq s \text{ 在 } A \text{ 上}\},$$

$$B_s^A := \wedge\{t \in \mathbf{S} \mid t \geq s \text{ 在 } A \text{ 上}\};$$

容易看到， B_s^A 是 R_s^A 关于 X 上细拓扑的下半连续正则化. R_s^A 与 B_s^A 有与调和空间中缩减函数与扫除相类似的性质(参看 § 5.3, § 6.1). 因此第六章关于调和空间的、用扫除定义的容量可以搬到 H 锥上来. 例如(见[60]), 可以证明, 若 $s \in \mathbf{S}$ 仅取有限值，则关于 X 上的细拓扑，映射

$$\Gamma : A \mapsto B_s^A$$

是一个凸容量.

若 $\mathbf{S}$ 为 X 上的标准的函数 H 锥，则关于自然拓扑，对于任意 $s \in \mathbf{S}$, 映射 Γ_s： $A \to B_s^A$ 是 X 上凸的拟容量；若存在弱单位 u 使得 $p \in \mathbf{S}_0(u)$ 且 p 在 X 的一个稠密子集上取有限值，则 Γ_p： $A \mapsto B_p^A$ 是 X 上的凸容量.

§ 13.2 Dirichlet 形式(狄氏型)

在 § 11.6 已看到， Berling A 与 Deny J 利用广义函数将经典位势论中的 Dirichlet 原理的研究推进到一个新的台阶，建立了 Dirichlet 空间理论. 而后，这种理论有多种多样的推广形式，特别引人注目的是 Fukushima M 在局部紧空间上考虑的 Dirichlet 形式(狄氏型). 1971 年他在正则狄氏型上构造出强 Markov 过程. 如今，狄氏型已发展成把分析位势论与 Markov 过程有机地结合在一起的新兴数学理论. 在某种意义上说，(对称) 狄氏型理论就是对称 Markov 过程理论，因此与调和空间、扫除空间或 H 锥理论相比，狄氏理论另具一格，且在一定意义上更接近于概率位势论.

下面参照马志明[37]，仅给出粗略介绍，并省去对纯概率论的概念的介绍.

先观察经典位势论中的一个例子（比较 § 11.6）.

考虑三维实空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中二带电体系 P 与 Q，设其电荷分布密度分别为 $p(x)$与 $q(x)$. 则产生的位势函数(静电势场) u 为：

$$u(x)=\int \frac{kp(y)}{|x-y|}\,\mathrm{d}y, \tag{2.1}$$

其中 k 为库仑定律常数，积分区域为 $\boldsymbol{R}^3$(以下同此). 同样， Q 产生的位势函数 v 为：

$$v(x)=\int\frac{kq(y)}{|x-y|}\,\mathrm{d}y.$$

u 与 v 的相互电位势（相当于在静电场 v 中把电荷 P 从无穷远处移到现在位置所作的功，或把 Q 在场 u 中从无穷远处移到现在位置所作的功）为：

$$\mathcal{E}(u,v)=\int p(x)v(x)\,\mathrm{d}x=\iint\frac{k\cdot p(x)q(x)}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

为了便于数学运算，我们把 $\mathcal{E}(u,v)$的定义扩充到由所有位势函数及其极限组成的函数空间. 为此，令 $D(\mathcal{E})_0$ 为 $L^2(\boldsymbol{R}^3,\mathrm{d}x)$中位势函数的全体. 注意到 $\mathcal{E}(u,v)$在 $D(\mathcal{E})_0$ 上具的内积的性质：

对称性: $\mathcal{E}(u,v)=\mathcal{E}(v,u)$;

非负定性: $\mathcal{E}(u,u)\geq 0$;

双线性: $\mathcal{E}(\alpha u_1+\beta u_2,v)=\alpha\,\mathcal{E}(u_1,v)+\beta\,\mathcal{E}(u_2,v)$, α,β 为实数.

如果令

$$\mathcal{E}_1(u,v)=\mathcal{E}(u,v)+\int u(x)v(x)\mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

那么，$\mathcal{E}_1$ 在 $D(\mathcal{E})_0$ 上也具的内积的性质.

此外，$(\mathcal{E},D(\mathcal{E})_0)$在 $L^2(\boldsymbol{R}^3,\mathrm{d}x)$中有可闭性：$D(\mathcal{E})_0$ 关于内积 $\mathcal{E}_1$ 的完备化 $D(\mathcal{E})$是 $L^2(\boldsymbol{R}^3,\mathrm{d}x)$的一个线性子空间（即 $D(\mathcal{E})$可以被连续地嵌入到 $L^2(\boldsymbol{R}^3,\mathrm{d}x)$）.

通过取极限可以把 $\mathcal{E}(u,v)$的定义自然地扩充到 $D(\mathcal{E})$. 我们称$(\mathcal{E},D(\mathcal{E}))$为 $L^2(\boldsymbol{R}^3,\mathrm{d}x)$上的一个狄氏型.

由上例可抽象出狄氏型的严格数学定义. 由(2.1)式可得 $p(x)=-c\Delta u(x)$, 其中Δ 为 Laplace 算子，$c=\frac{1}{4\pi k}$ 为真空介电常数. 因此 (2.2) 式可以改写为：

$$\mathcal{E}(u,v)=-c\int(\Delta u)v\,\mathrm{d}x.$$

由于位势函数在无穷远处为 0，用 Green 公式可得

$$\mathcal{E}(u,v)=c\int(\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x.$$ （∇为梯度算子.）

从数学上可以严格证明如下事实：

$$D(\mathcal{E}) = H_1(\boldsymbol{R}^3) := \{ u \in L^2(\boldsymbol{R}^3) | \int |\nabla u|^2 \, dx < \infty \}, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{E}(u, v) = c \int (\nabla u \cdot \nabla v) dx, \forall u, v \in D(\mathcal{E}), \tag{2.5}$$

其中 ∇u 按广义函数的意义理解．由(2.4)、(2.5)可以推出 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 的如下性质：

1) $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 是 $L^2(\boldsymbol{R}^3, dx)$上的对称闭型; $D(\mathcal{E})$是 $L^2(\boldsymbol{R}^3, dx)$的、稠密的线性子空间，($D(\mathcal{E}), \mathcal{E}_1$) 构成一个 Hilbert 空间，其中 $\mathcal{E}_1$ 由(2.3)式定义．

2) 满足收缩性质: 若 $u \in D(\mathcal{E})$, φ 为 R 上的实函数，使得 $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le |s - t|$, $\forall s, t \in R$, 则 $\varphi \circ u \in D(\mathcal{E})$, 且

$$\mathcal{E}(\varphi \circ u, \varphi \circ u) \le \mathcal{E}(u, u).$$

性质 2 等价于下面性质 2′:

2′）若 $u \in D(\mathcal{E})$, 则

$$u^* := (u \vee 0) \wedge 1 \in D(\mathcal{E}) \text{ 且 } \mathcal{E}(u^*, u^*) \le \mathcal{E}(u, u).$$

把性质 1 和性质 2′ 抽象出来，就得到下面一般的定义．

设$(Y, \mathcal{F})$为一个可测空间, μ 是$(Y, \mathcal{F})$上σ 有限测度, $L^2(Y, \mu)$表示 Y 上定义的、关于 μ 平方可积的数值函数(等价类)全体关于

$$\mathcal{E}(f, g) := \int f g \, d\mu$$

为内积构成的 Hilbert 空间．

定义　设 $\mathcal{E}$ 是定义在 $L^2(Y, \mu)$的一个稠密的线性子空间 $D(\mathcal{E})$ ($D(\mathcal{E})$表示 $\mathcal{E}$ 的定义域，以下同此)上的双线性泛函．那么，

(a) 称 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$是 $L^2(Y, \mu)$上的对称闭型，如果

($\mathcal{E}$ 1)　$\mathcal{E}(u, u) \ge 0$ 且$(D(\mathcal{E}), \mathcal{E}_1)$构成一个 Hilbert 空间，其中

$$\mathcal{E}_1(u, v) := \mathcal{E}(u, v) + (u, v), \quad \forall u, v \in D(\mathcal{E}).$$

(b) 称 $L^2(Y, \mu)$上的对称闭型$(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$为(对称)狄氏型，如果它满足收缩性质，即

($\mathcal{E}$2) 若 $u \in D(\mathcal{E})$, 则

$$u^* := (u \vee 0) \wedge 1 \in D(\mathcal{E}) \text{ 且 } \mathcal{E}(u^*, u^*) \le \mathcal{E}(u, u).$$

定义 设 $(\Lambda, D(\Lambda))$为$L^2(Y, \mu)$ 的自伴算子 (即 Λ 为 $L^2(Y, \mu)$ 的自伴算子, $D(\Lambda)$为 Λ 的定义域,下同). 如果对每个 $u \in D(\Lambda)$都有 $(-\Lambda u, u) \ge 0$, 就说 Λ 为**非正定的**.

熟知, 自伴算子 Λ 为非正定的当且仅当它只有非正谱.

定理 13-2-1 $L^2(Y, \mu)$上的对称闭型 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 与非正定自伴算子$(\Lambda, D(\Lambda))$ 按下面关系一一对应:

$$D(\mathcal{E}) = D(\sqrt{-\Lambda}) \text{ 且 } \mathcal{E}(u, v) = (\sqrt{-\Lambda} u, \sqrt{-\Lambda} u). \quad \square$$

这个定理表明了对称闭型在数学物理研究中的重要地位. 因为非正定自伴算子与强连续半群、强连续预解族有一一对应关系.

定义 称 $L^2(Y, \mu)$上的线性算子族$(T_t)_{t>0}$为**强连续对称压缩半群**, 简称**强连续半群**, 如果满足:

(T1) 每个 T_t 是满足 $D(T_t) = L^2(Y, \mu)$的对称算子;

(T2) 半群性: $T_t T_s = T_{t+s}$, $\forall s, t > 0$;

(T3) 压缩性: $(T_t u, T_t u) \le (u, u)$, $\forall t > 0, u \in L^2(Y, \mu)$;

(T4) 强连续性: $(T_t u - u, T_t u - u) \to 0$,

当 $t \to 0_+, \forall u \in L^2(Y, \mu)$.

称 $L^2(Y, \mu)$上的线性算子族$(G_\alpha)_{\alpha>0}$为**强连续对称压缩预解族**, 简称**强连续预解族**, 如果满足:

(G1) 每个 G_α是满足 $D(G_\alpha) = L^2(Y, \mu)$的对称算子;

(G2) 预解方程: $G_\alpha = G_\beta + (\beta - \alpha) G_\alpha G_\beta$, $\forall \alpha, \beta > 0$;

(G3) 压缩性: $(\alpha G_\alpha, \alpha G_\alpha) \le (u, u)$, $\forall \alpha > 0, u \in L^2(Y, \mu)$;

(G4) 强连续性: $(\alpha G_\alpha u - u, \alpha G_\alpha u - u) \to 0$,

当 $\alpha \to \infty$, $\forall u \in L^2(Y, \mu)$.

下面定理是狄氏型理论的一个基本结果

定理 13-2-2 (Beurling-Deny)　设$(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$是$L^2(Y, \mu)$上的对称闭型, $(T_t)_{t>0}$与$(G_\alpha)_{\alpha>0}$分别是关联于$\mathcal{E}$的强连续半群与强连续预解族, 则下述各命题等价:

1) $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$是狄氏型;

2) $(T_t)_{t>0}$是 Markov 半群;

3) $(G_\alpha)_{\alpha>0}$是 Markov 预解族;

4) 若$u \in D(\mathcal{E})$, φ是$\boldsymbol{R}^1$上的实函数且满足:

$$\varphi(0)=0, |\varphi(t)-\varphi(s)| \le |t-s|, \forall t, s \in \boldsymbol{R}^1,$$

则$\varphi \circ u \in D(\mathcal{E})$ 且 $\mathcal{E}(\varphi \circ u, \varphi \circ u) \le \mathcal{E}(u, u)$. □

这个定理建立了狄氏型与 Markov 半群的一一对应, 为狄氏型与 Markov 过程的相互联系奠定了基础. 但由一般的 Markov 半群并不能构造出性质较好的 Markov 过程, 因此狄氏型仍停留在纯分析的范围内. 这种状况直到 70 年初 Fukushima M 首次由正则狄氏型构造出 Hunt 过程才有重大突破.

定义　称$L^2(Y, \mu)$上的狄氏型$(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$为正则狄氏型, 如果下面三条件满足:

1) Y是局部紧的可度化的拓扑空间, $\mathbf{B}(Y)$是Y上的Borel代数, μ是 $(Y, \mathbf{B}(Y))$上的 Radon 测度;

2) $\boldsymbol{K}(Y) \cap L^2(Y, \mu)$ 在$D(\mathcal{E})$ 中关于$\mathcal{E}_1$范数稠密;

3) $\boldsymbol{K}(Y) \cap L^2(Y, \mu)$ 在$\boldsymbol{K}(Y)$ 中关于一致收敛范数稠密.

下面定理中的 1)首先由 Fukushima 构造, 其它人作了改进并给出其余结论.

定理 13-2-3　1)设 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 是 $L^2(Y, \mu)$ 上的正则狄氏型, 则存在 Hunt 过程$\boldsymbol{M}$与$(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$相关联.

2) 若 Hunt 过程$\boldsymbol{M}$与正则狄氏型$(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$相关联, 令$(P_t)_{t>0}$为$\boldsymbol{M}$的转移半群, $(T_t)_{t>0}$为与 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$相关联的强连续半群, 则$\forall t>0, \forall f \in L^2(Y, \mu)$, $P_t f$是$T_t f$的拟连续修正.

3)与正则狄氏型相关联的 Hunt 过程在等价意义下唯一. □

在与正则狄氏型相关联的 Hunt 过程构造出来后，寻找与狄氏型相关联的、性质较好的 Markov 过程成了人们越来越关心的课题. 特别是，随着狄氏型在数学和物理其它分支的应用日益广泛，人们对非正则狄氏型的关心程度日益增强. 最近，上述课题由于 Albeverio S 、马志明与 Rokner M 等人的出色工作[37]得到满意的解决，并由此产生了拟正则狄氏型的概念，建立了拟正则狄氏型与右过程之间的一一对应.

狄氏理论的应用较广泛，例如，可应用于非相对于量力学、Feynman-Kac 半群与 Schrodinger 算子、 Markov 场、伪微分方程、反射扩散过程、无穷维随机分析、复分析及鞅论等领域的研究.

§ 13.3 非线性位势论

以上介绍的都是线性位势论，当 X 限制为 $\boldsymbol{R}^N$ 或 $\boldsymbol{R}^N$ 的一个开集或区域时，它们实际上都与某个线性微分算子相关联，各种意义下的调和函数簇在开集上都各自成为线性空间.

随着线性体系的发展，非线性系统也在八十年代获得较大的进展. 但由于“线性”提供的方便没有了，由此产生的困难是可以想像的. 因而多数的成果仍只是出现在发表研究论文的原始期刊或论文集上. 近年来才有专著，见[76-77]. 值得提及的是 Adams D R ， Hedberg L I ， Lehtola P, Martio O, Lindqvist P, 等人在研究非线性与拟线性位势论方面所做出的重大贡献.

本节将以 $\boldsymbol{R}^N$ 上关于一个非线性微分算子的位势论为背景简要说明非线性公理体系的建立. 详细请见[39]

首先注意到，$\boldsymbol{R}^N$ 的开集 G 上的，关于 Laplace 算子的调和

函数 u 具有这样的特征:

$$u \in \mathrm{loc}W_2^1(G) \cap \boldsymbol{C}(G)$$

且对所有 $\varphi \in \boldsymbol{C}_0^\infty(G)$ 满足

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}\lambda = 0, \tag{3.1}$$

这里 $\mathrm{d}\lambda$ 是 N 维 Lebesgue 测度, $\boldsymbol{C}_0^\infty(G)$是 G 上具紧支柱且无限可微的实函数全体, "·" 表示内积运算符, $\mathrm{loc}W_2^1(G)$表示局部 Sobolev 空间, 即 $u \in \mathrm{loc}\ W_2^1(G)$ 当且仅当 u 及 u 的梯度(在广义函数意义下) ∇u 在 G 为局部平方可积的.

对于相当大的一类微分算子 A, 其解 u 可类似地定义, 只是(3.1)改为: 对所有$\varphi \in \boldsymbol{C}_0^\infty(G)$满足

$$\int_G \mathrm{A}(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}\lambda = 0. \tag{3.2}$$

对于非线性的算子A, 为了保证线性位势论的性质能较多地移植过来, 我们希望 A 能保持次序, 即当 G 是有界区域, u , $v \in \boldsymbol{C}(G)$ 且满足 (3.2) 时, 若 $u \le v$ 在∂G 上成立必有 $u \le v$ 在 G 上也成立. 这种例子的典型是 $\mathrm{A}(x,\nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ 当 $p > 1$ 的情形, 它所关联的微分方程为 $\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$; 当 $p = 2$ 时, 就成了 Laplace 方程.

具体地, 我们要求一个微分算子 $\mathrm{A}: G \times \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}^N$, 满足下面条件(其中 $1 < p < \infty$, $0 < \alpha \le \beta < \infty$):

(1) 对每个 $h \in \boldsymbol{R}^N$, $x \mapsto \mathrm{A}(x, h)$ 为可测, 且

(2) 对 a.e.(几乎所有) $x \in G$, $h \mapsto \mathrm{A}(x, h)$, 为连续;

(3) 对每个 $h \in \boldsymbol{R}^N$ 及 a.e. $x \in G$ 有

$$\mathrm{A}(x, h) \cdot h \ge \alpha |h|^p, \qquad |\mathrm{A}(x, h)| \le \beta |h|^{p-1},$$
$$(\mathrm{A}(x, h_1) - \mathrm{A}(x, h_2)) \cdot (h_1 - h_2) > 0, \qquad h_1 \ne h_2,$$

及

$$\mathrm{A}(x, \lambda h) \equiv |\lambda|^{p-2}\lambda\, \mathrm{A}(x, h); \qquad \lambda \in \boldsymbol{R}^1.$$

定义 一个函数 $u \in \boldsymbol{C}(G) \cap \mathrm{loc}W_p^1(G)$ 称为方程

$$\nabla \cdot A(x, \nabla u(x)) = 0 \tag{3.3}$$

(由算子 A 引导出的方程) 的解, 如果(3.2) 式对所有$\varphi \in C_0^\infty(G)$成立. 此处 $\mathrm{loc}W_p^1(G)$是 Sobolev 空间, 其中每一个函数 u 是局部 p-可积的 (即 $|u|^p$ 局部可积), 同时它在分布意义下的一阶偏导数也是局部 p-可积的, 又 $\nabla u(x) = (\partial_1 u(x), \cdots, \partial_N u(x))$ 是 u 的梯度. (3.3) 的解称为 **A-调和函数**.

上述关于 A 的限制保证了(3.3)是一个二阶椭圆型偏微分方程, 一般情况下为退化的, 关于 ∇u 齐次的.

G 上的 A-调和函数 u 有这样的性质:

1) u 在 G 上为局部 Holder 连续的, 且当 $u \geq 0$ 时有这样的 Harnack 不等式, 即对 G 的任何紧子集 K, 存在一个正的实常数 $c := c(N, p, \alpha, \beta, K)$ 使得

$$\sup_K u \leq c \inf_K u .$$

2) 当 G 为区域时, G 上单调增的 A-调和函数列$\{u_i\}$的极限函数要么在 G 为调和, 要么恒等于 ∞.

当区域正则时, 方程(3.3) 相应的 Dirichlet 问题的解存在、唯一且保序.

定义 从 G 到 $(-\infty, \infty]$ 的下半连续函数 s 称为 **A-上调和**, 如果 s 满足 A-比较原理, 即对每个闭包包含在 G 的区域 D 及每个在 D 为 A-调和的 $u \in C(\overline{D})$, 若 $u \leq s$ 在 ∂D 上成立, 则在 D 上有同样不等式成立.

线性位势论的 Perron 方法可以照搬, 上解、下解、可解集等都类似; 利用 A-上调和函数同样可定义 A-细拓扑 τ_A. 研究 A-细拓扑的主要工具是 p-瘦的概念, 而 p-瘦是用所谓电容器的 p-容量来定义的.

定义 对 $\boldsymbol{R}^N$的开集 V 及 V 的非空子集 E, 序偶 (V, E) 称为一个**电容器**(condenser), 设 $1 < p < \infty$. 当 E 为紧集时, 令

$$\mathrm{cap}_p(V,E):=\inf\{\int_V|\nabla u|^p\mathrm{d}\lambda \mid u\in C_0^\infty(V),\ u|_E\geq 1\};$$

当 E 为开集时，令

$$\mathrm{cap}_p(V,E):=\sup\{\mathrm{cap}_p(V,F)\mid F\text{ 为 }E\text{ 的紧子集}\};$$

当 E 为一般集时，

$$\mathrm{cap}_p(V,E):=\inf\{\ \mathrm{cap}_p(V,W)\mid W\text{ 为 }E\text{ 在 }V\text{ 中的开邻域 }\}.$$

称 $\mathrm{cap}_p(V,E)$为电容器(V,E)的 p-容量.

一个集 $E\subset\boldsymbol{R}^N$ 称为在 $\boldsymbol{R}^N$ 的某一点 x_0 为 p-瘦，如果

$$\int_0\varphi(t)^m t^{-1}\mathrm{d}\,t<\infty,$$

这里$\varphi(t):=t^{p-N}\mathrm{cap}_p(E\cap\overline{B}(x_0,t),B(x_0,2t)),\ m:=(p-1)^{-1}$.

可以证明，一个集 U 是 x_0 的一个 A-细邻域当且仅当 $x_0\in U$ 且 $\boldsymbol{R}^N\setminus U$ 在 x_0 是 p-瘦的. 我们看到，p-细拓扑 τ_{A} 仅仅依赖于参数 p 而与算子 A 的选取无关. 因此 τ_{A} 应改写为 τ_p，称为 p-细拓扑. A-邻域应改为 p-邻域，余类似. 这其实就是 Meyers N G, Adams D R 及 Hedberg L I 研究过的$(1,p)$细拓扑. 令人感到有趣的是，即使在 $p=2$ 时，也存在有非线性的算子 A，它对应的细拓扑 τ_{A} 与经典的细拓扑 τ_2 一致. 当 $1<p<q\leq N$时，$\tau_q\subset\tau_p$ 且包含关系是严格的(即反包含关系不成立)；当 $p>N$ 时 τ_p 与通常的欧氏拓扑一致，这时所有的 A-上调和函数都连续；当 $p\leq N$ 时，τ_p 严格细于欧氏拓扑.

许多有关于拓扑 τ_p 的性质都可以经利用 A-上调和函数来处理，如 τ_q 与 τ_p 之间（ $p\neq q$ ）的关系、A-极集及 A-细极限等.

有了上述关于非线性微分算子位势论的实例，比较与 Brelot 调和空间 (见 § 4.3) 公理系统的差异，不难理解下面由 Lehtola [33] 引进的非线性调和空间的公理体系.

定义 设 X 是一个局部紧的，局部连通的 Hausdorff 空间，$\boldsymbol{H}$ 是 X 上的连续函数(组成的）簇 (簇的定义见 § 4.1)，V 是 X 的一个相对紧开集，称 V 是正则集，如果下面两条件满足:

(1) (Dirichlet 原则) 对每个 $f\in C(\partial V)$, 存在唯一的

$$h\in H(V)\cap C(\overline{V})$$

使得 $h|_{\partial V}=f$; 记此 h 为 H_f;

(2) (比较原则) 对每个 f , $g\in C(\partial V)$, 条件 $f\leq g$ 蕴涵着 $H_f\leq H_g$ 在 V 成立.

定义 若(X, H) 满足下面三公理则称之为一个非线性调和空间:

公理 A 若 $h\in H(V)$ 且 $\alpha\in R^1$, 则 $h+\alpha$, $\alpha h\in H(V)$;

公理 B (Harnack 原理) 若$\{u_i\}$是 $H(V)$ 中的单调增加列, V 是 X 的一个区域, 那么当 $u:=\lim_i u_i$ 在某一点 $x_0\in V$ 取有限值时, 则 $u\in H(V)$.

公理 C 对 X 的每一个开集 U 及每一个紧集 $K\subset U$, 存在一个正则集 V 使得 $K\subset V\subset U$.

注 若需要研究更深入的性质, 有的非线性公理体系还包含

公理 D $H(V)$能分辩 V 中的点.

容易看到, 前面介绍的 A-调和函数族是满足公理 A,B,C 的, 因此 Lehtola 定义的非线性调和空间是包括了一类非线性微分算子相关联的位势论.

从公理 A 看到, 在削弱了 H 族对加法封闭的情况下, 增加了常实值函数必属于 H 族的要求, 而且要求任意一个 H 族成员加上任一个实常数后仍为 H 族成员; 而在 Brelot 调和空间中并不要求实常数必为调和函数, 这使得这两类空间之间不存在包含关系. 但目前不少推广的非线性系统也不把公理 A 中 $h+\alpha\in H(V)$ 当成是必要条件.

不过, 有了公理 A 、B 、C, 要通过比较原则来建立上调和函数簇就成了可行的, 而后其它的基本性质都很容易随之而来. 例如, 在 X 的一个区域上的上调和函数若不恒等于∞, 则必在 V

的一个稠密子集上取有限值；修正 Poisson 积分以及 Perron 方法都可相应建立，边界的正则性与 Dirichlet 问题的可解性问题都能研究；扫除的概念，甚至 Poincare 引入的扫除法都可以使用.

下面给出非线性调和空间的一个简单例子：设

$$X:=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid xy=0, y\geq 0\},$$

它由从原点出发的三条射线组成，并以 $\boldsymbol{R}^2$ 的诱导拓扑作为拓扑. 形如区间

$I:=(a,b)\times\{0\}$，其中 $-\infty\leq a<b\leq\infty$，坐标原点 $O\notin I$,

$J:=\{0\}\times(a,b)$，其中 $0<a<b\leq\infty$，坐标原点 $O\notin I$，及

坐标原点 O 的邻域 $T:=(-t,t)\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,t), t>0$

的全体构成了 X 的一个拓扑基. X 上的调和簇 $\boldsymbol{H}$ 定义如下：

设 V 是 X 的一个开集, $u\in \boldsymbol{H}(V)$ 当且仅当：u 在 V 连续且

a) 当 V 是区间 I 或 J 的形式时，则 u 是 V 上的仿射函数；

b) 当 V 具有形式 T 时, $u(O)=[\max u(\partial V)+\min u(\partial V)]/2$，而在 $V\backslash\{O\}$ 的三条射线的每一条上 u 为线性的.

据此规则可把 u 的定义域延拓到 X 的任意开集上去，但由于条件 b), u 不是线性的.

但是，若把 $u(O)$ 改为由 $[u((-t,0))+u((t,0))+u((0,t))]/3$ 来定义，则 $\boldsymbol{H}$ 为线性的，所得空间为 Brelot 调和空间.

参 考 文 献

[1] Anandam V. Subharmonic function outside a compact set in R^n. *Proc. Amer. Math.soc.*,1982; **84**:52-54

[2] Albeverio S, Ma Z M. Necessary and sufficient conditions for the existence of m-perfect processes associated with Dirichlet form .In *Lecture in Math.* 1485 Berlin : Springer 1991. 374-406

[3] Albeverio S, Ma Z M. Rockner M. Non-symmetric Dirichlet forms and Markov processes on general state space . *C.R. Acad. Sci .Paris,* Serie 1,1992; **314**:77-82 and C.R.A.S., Serie 2. 1993; **314**:77-82

[4] Armitage D H. Hyperplane mean values of positive superharmonic fun-ctions. *J. London Math.Soc.*,1981; **23**(2): 129-135

[5] Boboc N, Bucur G, Cornea A. *Order and Convexity in Potential Theory: H-Cones*. Berlin: Springer, 1981

[6] Blidtner J, Hansen W. *Potential Theory —An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage*. Berlin: Springer, 1989(中译本: 高琪仁、吴炯圻译. 位势论—扫除的分析与概率方法，厦门，厦门大学出版社， 1994)

[7] Boukricha A, Hansen W. Martin boundary for Schrodinger operators with singularity. *Math Ann.*,1994; **300**:573-587

[8] Boukricha A,Hansen W. Strong nonmonotonicity of the Picard dimension. *Commun in partial differential equations*, 1995; **20**(3.4):567-590

[9] Brelot M. *On Topologies and boundaries in potential theory.* Berlin: Springer, 1971

[10] Constantinescu C, Cornea A. *Potential theory on harmonic*

spaces . Berlin： Springer, 1972

[11] Doob J L. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart.* Berlin: Springer 1983 (中译本, 概率位势论. 北京：中国科学出版社， 1993)

[12] Fuglede B. *Fine harmonic functions*. Berlin: Springer, 1972

[13] 高琪仁(Gao Qiren) α-调和函数在边界点的α-细极限. 厦门大学学报, 1986; **25**(1): 10-17

[14] 高琪仁. 上调和函数的边界极限,厦门大学学报, 1988; **27**(5): 477-482

[15] 高琪仁. 关于全纯函数的细极限和 Julia 点.数学年刊,1989;**10A** (3):328-332

[16] 高琪仁. 广义拟拓扑. 厦门大学学报, 1995; **34**(5): 675-679

[17] 高琪仁. 调和空间的正则容量. 厦门大学学报, 1994; **33**(4): 427-431

[18] 高琪仁. 上调和函数的边界细极限.厦门大学学报, 1994; **33**(2): 143-146

[19] 高琪仁. 调和空间上非负超调和函数扫除的正则可容性. 厦门大学学报,1988; **27**(1): 13-19

[20] Getoor R M. *Markov processes and potential theory* . New York: Academic Press, 1968

[21] Gao Qiren & Qiu Shuxi. Generalized Weight. *Journal of Mathematical Study* , 1994; **27**(1): 72-76

[22] 龚显宗(Gong Xianzong). On Subharmonic Extensions. *J. Math. Res.& Exp.*, 1986; **2**: 161-164

[23] Halmos P R. *Measure Theory*. Berlin: Springer 1974

[24] Hansen W. Restricted mean property and harmonic functions. In Kral J, Lukes J. *Potential Theory-ICPT94*, Berlin: Walter de Gruyter Co.,1996

[25] Hansen H, Nadirashvili N. Restricted mean value property for

positive functions. *J.reins angew. Math*, 1996; **470**: 89-107

[26] Helms L L. *Introduction to potential theory*. New York: Wiley inter-science, 1969

[27] Hewitt E, Stromoerg K. *Real and Abstract Analysis*. Berlin: Springer,1965

[28] Hunt R A, Wheeden R L. Positive harmonic functions on Lipschitz domains, *Trans . Amer. Math. Soc*. 1970; **147**:507-527

[29] Kelly J L. *General topology*. New York: Van Nostrand, 1955(中译本:吴从忻,吴让泉译. 一般拓扑学. 北京：科学出版社 1982)

[30] Kral J, Luces J, Netuka I, Vesely J. *Potentil Theory Surveys and Problems*. Berlin: Sprin-ger,1987

[31] Jerison D S, Kenig C E. Boundary Behavior of Harmonic Functions in Non-tangentially Accessible Domains. *Advances in Math*, 1982;**46**:80-147

[32] Landkof N S. *Foundations of modern potential theory*, Berlin: Springer, 1972

[33] Lehtola I. An axiomatic approach to non-linear potential theory, *Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math Diss* 1986;62:1-40

[34] 厉则治(Li Zezhi). 实变与泛函. 厦门:厦门大学出版社, 1991.

[35] 林勇(Lin Yong). α-细拓扑与全纯函数的 Julia 点. 厦门大学学报, 1986; **25**(4):400-407

[36] Lukes J, Maly J, Zajicek L. *Fine topology methods in real analysis and potential theory*, Berlin: Springer,1986

[37] 马志明(Ma Ziming) . 狄氏型及其在数学物理中的应用.数学进展, 1993; **22** (1): 46-68

[38] Maeda F Y. *Dirichlet integral on Harmonic spaces*. Berlin:

Springer, 1980

[39] Martio O. Potential theoretic aspects of non-linear elliptic partial differential equations. *Jyvaskylan yliopisto*, 1989

[40] Ma Z M, Rokner M. *An introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Berlin: Springer 1995

[41] Meyer P A. *Probability and potential.* Paris: Blaisell Publ. Comp. 1996

[42] Parthasarathy K R. *Probability measures on metric space*. New York: Academic Press INC, 1967

[43] 邱曙熙(Qiu Shuxi). 复准广义权的全变差, 厦门大学学报, 1995; **34**(2): 157 -162

[44] 邱曙熙(Qiu Shuxi). Riemann 曲面类 O_{AD} 和 O_{MD^*}. 厦门大学学报,1983; **22**(4): 427-432

[45] Qiu Shuxi. The fine continuity for complex generalized weights. *J. Math. Res. & Exp.*,1998; **18**(2): 178-180

[46] 邱曙熙和高琪仁(Qiu Shuxi & Gao Qiren). 关于 Heins 端的椭圆维数. 厦门大学学报, 1994; **33**(5): 581-584

[47] 王梓坤(Wang Zikun). 布朗运动与位势. 科学出版社,1983

[48] 吴春章(Wu Cunzhang). 黎曼流形上的布朗运动的常返性. 厦门大学学报,1989; **28**(2): 121-126

[49] 吴徵眉(Wu J M). Harmonic Measures for elliptic operators of non divergence form, *Potential Anal* 1996; **5**(1): 45-59

[50] Wu Jiongqi, Gao Qiren. On Potential Extension and Capacity on Harmomic Spaces In: Kishi M. *Potential Theory -- International Conference on Potential Theory , Nagoya, 1990*), Berlin : Walter de Cryter & co., 1992. 361-365

[51] 吴炯圻(Wu Jiongqi). 零容致密集上的椭圆 Martin 边界.数学年刊, 1993; **4A**(6):689-698

[52] 吴炯圻. 零理想边界的镶边 Riemann 曲面的椭圆维数. 厦门

大学学报,1985; **24**(3):273-247

[53] 吴炯圻. R^n上广义 Riemann 定理与椭圆 Martin 边界. 厦门大学学报,1988; **27**(3):243-247

[54] 吴炯圻. 调和空间 FO-集上的连续函数. 厦门大学学报, 1989; **28** (1):7-11

[55] 吴炯圻. 关于上调和函数的强极值原理. 厦门大学学报, 1989; **28** (3):233-237

[56] 吴炯圻. Martin 边界及其应用.漳州师院学报,1989; **3**(1): 1-9

[57] 吴炯圻. α-调和函数的 p-细边界值. 漳州师院学报, 1991; **5**(1): 1-7

[58] 吴炯圻. 从 90'国际位势论会议看发展动态. 漳州师院学报, 1990; **4**(2):6-10

[59] 吴炯圻. 正线性映射及其导出的广义权与容量. 漳州师院学报,1996;**10**(4):75-81

[60] 吴炯圻. 函数 H 锥上的扫除与广义容量. 漳州师院学报. 1991; **5**(4):13-20

[61] 吴炯圻. 椭圆调和空间上的上调和延拓. 漳州师院学报, 1992; **6**(2):1-7

[62] 吴炯圻. 现代位势论. 见：现代科技综述大辞典编委会编. 现代科技综述大辞典. 北京：北京出版社,1998:51-52

[64] 严加安,彭戈实,方诗赞等. 随机分析选讲. 北京：科学出版社, 1997

[65] 杨向群. 可列马尔科夫过程构造论. 湖南科技出版社,1981

[66] 叶仰明. 局部紧阿贝尔群上的位势论和一种推广的广义函数. 厦门大学学报, 1987; **26**(1):17-24

[67] 张鸣镛(Zhang Mingyong). *Riemann Surfaces* (in *Contemporary Math* 55), American Math Society, 1985;**48**:151-155

[68] 张鸣镛. 位势论. 北京：北京大学出版社,1998

[69] 张鸣镛. 现代分析基础. 厦门: 厦门大学出版社,1987

[70] 张鸣镛,赖万才,高琪仁等(Zhang Mingyong et al). 位势论. 见:中国大百科全书编委会编. 中国大百科全书 数学卷. 北京: 大百科全书出版社, 1988

[71] 张询(Zhang Xun). 关于开 O_G 曲面上的广义 Anandam-Brelot 位势. 厦门大学学报, 1987; **26**(2),139-146

[72] 章逸平(Zhang Yiping). Comparason entre l'effilement interne et l' effilement minimal. *C.R. Acad. Soc. Paris* ,1987; I , **304**(1): 5-8

[73] Drasin D. Proof of a conjecture of F. Nevanlinna concerning functions which have deficience sum two. *Acta Math*, 1987; **158** (1-2), 1-94

[74] Makarov N G. The size of the set of singular points on boundary of a non-Smirnov domain. *Zap. Nauchn. Sem. Liningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov* (LOMI),1989; **170**(17): 176-183,323

[75] Berg C, Forst G. *Potential theory on locally compact abelian groups*. Berlin: Springer, 1975

[76] Heinonen J, Kilpelainen T, Martio O. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Landon: Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 1993

[77] Adams D R, Hedberg L I. *Function spaces and potential theory*, Berlin: Springer,1996

[78] Gauthier P M, Sabidussi G. *Complex potential theory*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994

符号与术语索引

（1--9 章）

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

一划

二划

三划

四划

五划

六划

七划

八划

九划

十划

十一划

十二划

十三划

十四划及十四划以上